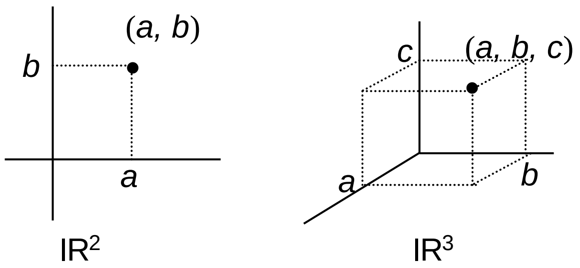
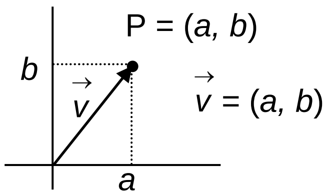
I. VECTORES, RECTAS Y PLANOS EN IR^2 Y IR^3

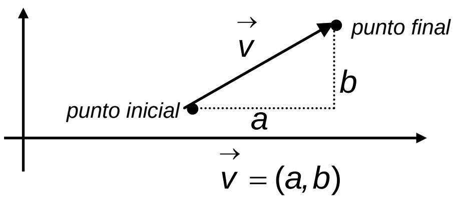
1. Un par ordenado (*a, b*) y una terna ordenada (*a, b, c*) representan puntos de IR^2 y IR^3, respectivamente. *a*, *b*, *c*, se denominan componentes del vector.



2. Cada punto tiene asociado un vector llamado radio vector o vector posición como se muestra en la siguiente figura



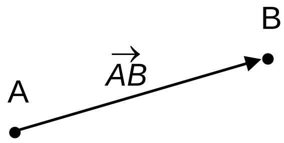
3. Dado un vector de IR^2, para representarlo gráficamente, en general, se escoge un punto cualquiera del plano y de allí se recorren dos direcciones: una paralela al eje X y otra paralela al eje Y, según el signo de las componentes. Se unen el punto inicial y final del recorrido con una flecha con el cabezal en el punto final.



De manera similar se grafican vectores de IR^3.

Nota. Dados los puntos inicial A y final B, de un vector. El vector entre ellos se determina como:

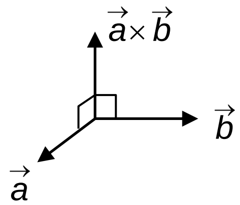
$$\overrightarrow{AB} = B - A$$



4. **Operaciones con vectores**. Las siguientes operaciones se definen para vectores de IR^3 pero, salvo la 4.4, son igualmente válidas para vectores de IR^2

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

4.1 $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
4.2 Si $r \in$ IR: $r(a, b, c) = (ra, rb, rc)$
4.3 Producto escalar:
$(a_1, a_2, a_3)\cdot(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
4.4 Producto vectorial (sólo para vectores de IR^3):
$(a_1, a_2, a_3)\times(b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$



5. ***Módulo***. Dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ se define su módulo:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Para un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ la definición es similar:

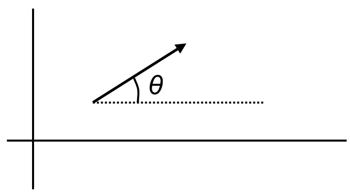
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

6. ***Vector unitario***. Es un vector cuyo módulo es igual la unidad.

$$|\vec{u}| = 1$$

7. ***Dirección***. Dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ se define su dirección como el ángulo θ tal que

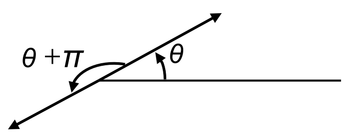
$$\theta = \text{arctg}\ (a_2 / a_1)$$



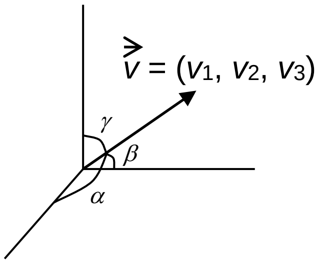
Nota 1. Dado el módulo y la dirección de un vector, éste se puede determinar de la siguiente manera:

$$\vec{a} = |\vec{a}|(\cos\theta, \text{sen}\ \theta) \ldots 7.1$$

Nota 2. La dirección $\theta + \pi$ es la *dirección opuesta* de θ.



Para un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se definen sus ángulos directores mediante sus respectivos cosenos directores:



$$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \cos\beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \ \cos\gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}$$

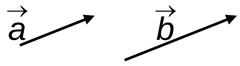
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

8. Si $\vec{a}$ no es unitario y $|\vec{a}| \neq 0$ se define el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ como:

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

9. ***Vectores paralelos***. Dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ son paralelos $(\vec{a} \,//\, \vec{b})$ si existe $r \in$ IR tal que:

$$\vec{a} = r\,\vec{b}$$



9.1 Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ y ninguna componente es cero se tiene:

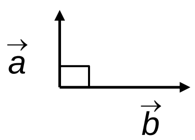
$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \ \leftrightarrow \ \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

La misma propiedad se puede hacer extensiva para vectores de IR^3.

9.2 Si $\vec{a}$, $\vec{b} \in IR^3$: $\vec{a} \,//\, \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

10. ***Vectores ortogonales***. Dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ son ortogonales $(\vec{a} \perp \vec{b})$ si:

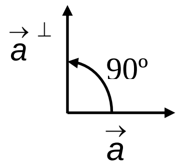
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



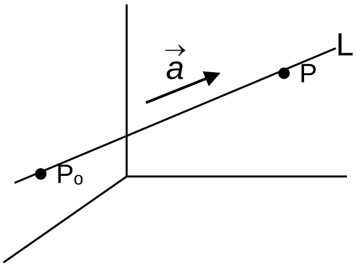
10.1 $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

10.2 Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$, se define el vector ortogonal de $\vec{a}$ como:

$$\vec{a}^{\perp} = (-a_2, a_1)$$



11. ***Rectas***. La representación vectorial de rectas en IR^3 es igualmente válida para rectas en IR^2, con las salvedades del caso.



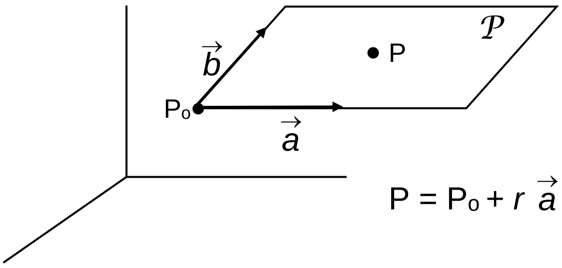
$$P = P_o + t\,\vec{a}\,, \quad t \in IR$$

L: recta de IR^3, P_o: punto de paso de L.

$\vec{a}$: vector director o dirección de L.
t se denomina parámetro de la recta.

9.1 *Nota*. Si se elimina el parámetro de una recta en IR^2 se obtiene la ecuación general de la recta; y, en IR^3 se obtiene la ecuación simétrica.

12. ***Planos en*** IR^3.

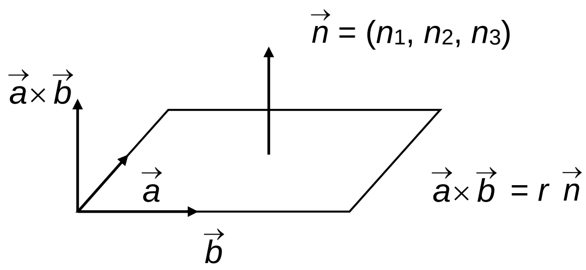


$$P = P_o + r\,\vec{a} + s\,\vec{b}\,; \quad r, s \in IR$$

P: plano en IR^3, P_o: punto de paso de P.

$\vec{a}$, $\vec{b}$: vectores generatrices de P.
r, s se denominan parámetros de la recta

10.1 Todo vector perpendicular al plano se denomina ***normal*** del plano. En particular el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es una normal. Cualquier otra normal es paralela a $\vec{a} \times \vec{b}$.



Las componentes de la normal forman parte de la ecuación general del plano:

$$n_1x + n_2y + n_3z + k = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Efectuar:

1. $2(1, 2, -3) + 3(1, -3, 1) -5(2, 3, -4)$.
2. $(1, 0, 3)\times(1, 4, 5) -3(-2, 2, -1)$.
3. $[(2, 5, 3)\times(1, 2, -3)]\times (4, 5, -1)$.
4. $[(2, 5, 3)\times(1, 2, -3)]\cdot(4, 5, -1)$.
5. $[(1, 2, 0) - 3(2, 3, 1)]\cdot(1, 0, 2)\times(1, 1, 5)$

II. Calcular los módulos indicados:

1. $\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|$ 2. $|(2, 5, 3)|$ 3. $|\,2(1, 2, -3) + 3(1, -3, 1)\,|$
4. $|\,[(2, 5, 3)\times(1, 2, -3)] \times (4, 5, -1)\,|$
5. $|\,(1, 1, -3)\times(2, 3, -1) - (0, 0, 2)\,|$

III. Hallar los vectores ortogonales correspondientes, luego calcule los respectivos módulos.
a) $(-3,2)$ b) $(4,5)$ c) $(2, -1)$ d) $(-6, -7)$

IV.
1. Si A =(8, 6), B =(2, –3), hallar el vector $\overrightarrow{AB}$, y el vector $\overrightarrow{BA}$.
2. Si $\overrightarrow{A}$ = (8, 6) y $\overrightarrow{AB}$ = (5, –3), hallar B.
3. Si $\overrightarrow{B}$ = (1, 4) y $\overrightarrow{AB}$ = (4, 0), hallar A.

V. Determinar el módulo y la dirección correspondiente a cada vector:
1. $(5, 6)$ 2. $(-3, 2)$ 3. $(-3, -5)$ 4. $(4, -7)$.

VI. Determinar los cosenos y ángulos directores correspondientes a cada vector:
1. $(2, 6, 5)$ 2. $(-3, 2, 1)$ 3. $(-1, -2, -1)$ 4. $(4, -2, 0)$.

VII. Determine cuáles de los siguientes vectores son unitarios, en el caso que no lo sean determine el correspondiente unitario en esa dirección
1. $(-3,4)$ 2. $(0, -1)$ 3. $(5, 6)$ 4. $(-3, 2)$
5. $(2, 5, 3)$ 6. $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$

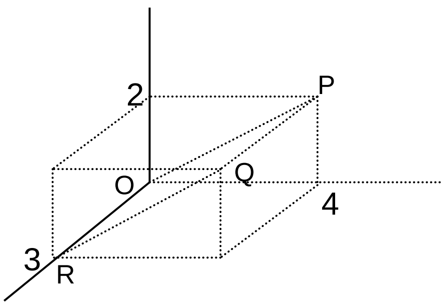
7. (–1, 2, –1)   8. (4, –2, 0).

VIII. Determinar las componentes del vector correspondiente, dados su módulo y dirección:
1. 8; 45º   2. 7; 125º   3. 6; 300º   4. 10; –30º

IX.
a) Hallar el valor de x si los vectores dados son paralelos:
1. $(x, 6)$; $(x–1, 4)$ 2. $(x+1, 3)$; $(x–1, 2)$
b) Hallar el valor de x si los vectores dados son ortogonales:
1. $(x, 6)$; $(x–10, 4)$ 2. $(x+1, 3)$; $(x–1, –2)$

X.
1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, –1, 2) y que es paralela al vector (–2, 0, 9).
2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: (2, –1, 4) y (3, 5, –1).
3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2, 1, 4) y que es paralela a la recta $L= \{(4, –2, 3) + t\,(1, –1, 0) / t \in IR\}$
4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2, 1, 4) y que es ortogonal a la recta $L= \{(4, –2, 3) + t(1, –1, 0) / t \in IR\}$.
5. Hallar la ecuación de la recta que es ortogonal a las rectas $L_1= \{(1, –2, 1) + t(1, –1, –1) / t \in IR\}$ y $L_2= \{(3, 2, –1) + t(1, 2, –3) / t \in IR\}$.

XI.
1. Hallar la ecuación general del plano que pasa por los puntos: (–3, 2, 1), (–1, 2, –1) y (4, –2, 0).
2. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto: (–1, 3, 4) y que es ortogonal a la recta $L = \{(2, 3, –5) + t(4, 2, 5) / t \in IR\}$.
3. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto (–3, 5, 2) y que es paralelo al plano $2x +3y – z +1 = 0$.
4. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto (–3, 2, 2) y que es paralelo a las rectas $L_1= \{(1, –2, 1) + t\,(1, –1, –1) / t \in IR\}$ y $L_2= \{(3, 2, –1) + t(1, 2, –3) / t \in IR\}$.
5. Hallar la ecuación del plano OPQR.



XII.
1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 0, 5) que es ortogonal al plano $3x +4y +5z –9 = 0$.
2. Hallar la intersección de la recta que pasa por los puntos (–1, 2, 1), (3, –2, 0) con el plano $3x + 6y –2z – 4 = 0$.

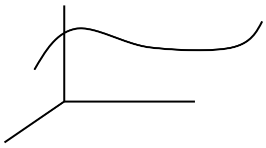
II. FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL

1. Son funciones con dominio en IR y rango en IR^n (en nuestro estudio n = 2 ó 3). Es decir, son de la forma:

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t)) \qquad \text{o} \qquad \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

2. ***Dominio***. El dominio de una función vectorial es la intersección de los dominios de sus funciones componentes.

3. ***Rango.*** Para graficar el rango de estas funciones, se puede usar el método tabular o eliminar la variable t para obtener la ecuación algebraica de alguna figura conocida. Algunas veces se deben complementar ambos métodos.



4. ***Límites***. Si cada límite existe:

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = (\lim_{t\to t_0} f_1(t), \lim_{t\to t_0} f_2(t), \lim_{t\to t_0} f_3(t))$$

5. ***Derivadas***. Si cada derivada existe:

$$\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

6. ***Integrales***. Si cada integral existe:

$$\int \vec{f}(t)dt = (\int \vec{f_1}(t)dt, \int \vec{f_2}(t)dt, \int \vec{f_3}(t)dt)$$

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt = (\int_a^b \vec{f_1}(t)dt, \int_a^b \vec{f_2}(t)dt, \int_a^b \vec{f_3}(t)dt)$$

7. ***Longitud de arco***. La longitud del arco de curva definida por $f(t)$, $t \in [a, b]$, está dada por:

$$L = \int_a^b |\vec{f}'(t)|\,dt$$

Si la integral existe.

8. ***Vectores: Tangente, Binormal y Normal.***

$$T = \frac{\vec{f}'(t)}{|\vec{f}'(t)|}, \qquad B = \frac{\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)}{|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)|} \qquad N = B \times T$$

9. ***Curvatura y Torsión***.

$$K = \frac{|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)|}{|\vec{f}'(t)|^3}, \quad \tau = \frac{(\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)) \cdot \vec{f}'''(t)}{|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)|^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Si: $\vec{f}(t) = (\cos\pi t, e^{t-1}, t^2+1)$,

$$\vec{g}(t) = \begin{cases} (\ln(t+1), 4t+2, -t) & -3 < t < 1 \\ (\tan \pi t, t+2, \sqrt{t}) & t \geq 1 \end{cases}$$

Hallar: a) $\vec{f}(1) + 2\vec{g}(1)$ b) $(\vec{f}(1) - 2\vec{g}(0)) \times \vec{g}(4)$

II. Hallar el dominio de:

1. $\vec{f}(\text{t}) = (\sqrt{4-\text{t}}, \sqrt{\text{t}+2}, 1)$ 2. $\vec{f}(t) = (\dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sqrt{t^2-1}, t)$

3. $\vec{f}(t) = (\sqrt{1-\dfrac{1}{t}}, \dfrac{4}{t^2-4}, e^t)$ 4. $\vec{f}(t) = (\sqrt{t}, \cos t, \dfrac{1}{t-3})$

III. Graficar el rango de:

1. $\vec{f}(t) = (3\cos t, -3\text{sen}\, t)$.

2. $\vec{f}(t) = (2\cos 2t, 2\text{sen}\, 2t)$ $t \in [0, \pi/4]$.

3. $\vec{f}(t) = (-4\text{sen}\, t, 5\cos t)$ $t \in [0, \pi/4]$.

4. $\vec{f}(t) = t(\cos t, \text{sen} t)$, $t > 0$ 5. $\vec{f}(t) = (3\cos t, -3\text{sen} t, 5)$.

6. $\vec{f}(t) = (\cos t, \text{sen} t, t)$ 7. $\vec{f}(t) = (t, \text{sen} t, t)$.

8. $\vec{f}(t) = (t, -t, t^2)$ 9. $\vec{f}(t) = \text{e}^{-t}(\cos t, \text{sen} t, t)$, $t \geq 0$.

10. $\vec{f}(t) = (e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t})$.

IV. Calcular: $\lim\limits_{t \to 0} (\dfrac{\text{sen} t}{2t}, \dfrac{\sqrt{t+1}-1}{t}, t+2)$

V. Calcular la derivada de cada función:

1. $\vec{f}(t) = (t^2 \cos t, \text{sen} 2t, e^{3t})$ 2. $\vec{f}(t) = (t^3 + \sqrt{t}, \sqrt[3]{t^2+1}, \tan t)$

3. $\vec{f}(t) = (\ln(3t+4), \dfrac{3t+1}{2t-3}, \cos^3 t)$.

4. $\vec{f}(t) = (\dfrac{1}{t^2+3}, t\ln t, \arccos t)$.

5. $\vec{f}(t) = (3t^2 + t - 3, t\text{e}^{5t}, \cos 4t)$

VI. Hallar la ecuación de la recta tangente a la trayectoria definida por $\vec{f}(t) = (\sqrt{t}, t\ln t, t^2 + t + 1)$ en $t = 0$

VII. Sea $\vec{r}(t) = (-2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$ el vector posición de una partícula que se mueve en movimiento circular. Demostrar que la velocidad y la aceleración son ortogonales entre sí.

VIII. Sea $\vec{r}(t) = (t^2 + t, \operatorname{sen}\dfrac{\pi t}{2}, \sqrt{t})$ el vector posición de una partícula en movimiento. Determinar la velocidad y aceleración para $t = 1$.

IX. Calcular:

1. $\int (3t + 2, \sqrt[3]{t}, e^{-t})dt$.
2. $\int z \dfrac{3t+2}{t+1}, \dfrac{1}{(2t-5)^3}, \cos 3t)dt$.
3. $\int ((3t + 2)\operatorname{sen} 2t, \sqrt{t^2+4}, t^2 e^{3t})dt$.
4. $\int (\dfrac{t}{t^2+1}, \dfrac{3}{t^2-4}, \sec t)dt$.
5. $\int (\dfrac{3}{t^2+5}, \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}, \tan t)dt$.
6. $\int_{-\pi}^{\pi} (t\cos t, 2\operatorname{sen} t \cos t, \operatorname{sen}^2 t)dt$.

X. La aceleración de una partícula está dada por $\vec{a}(t) = (0, 1, 2)$. Hallar la función vectorial que define la trayectoria de la partícula si $\vec{v}(0) = (0, 0, 0)$ y $\vec{r} = (0, 0, 0)$.

XI. Una partícula se suelta en caída libre, sin fricción, desde una altura de 100*m*. Si $\vec{v}(0) = (0, 1, -2)$, hallar la función vectorial que define la trayectoria de la partícula.

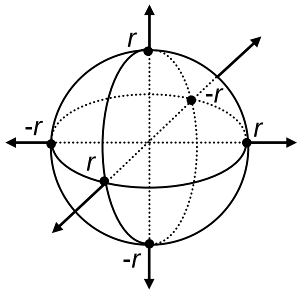
XII. Hallar los vectores *T*, *B*, *N*, en el punto indicado.

1. $\vec{f}(t) = (t^3, t^2, t)$ en $t = 1$.
2. $\vec{f}(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, t)$ en $t = 0$.
3. $\vec{f}(t) = (t \cos 2t, -t \operatorname{sen} 2t, 3)$ en $t = \pi$.
4. $\vec{f}(t) = (e^t, te^t, t+1)$ en $t = 0$.
5. $\vec{f}(t) = (1 - \cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en $t = \pi/2$
6. $\vec{f}(t) = (R\cos^2 t, R\operatorname{sen} t \cos t, R\operatorname{sen} t)$ en $t = \pi/4$

XIII. Hallar la curvatura y torsión de cada una de las curvas definidas por las funciones del problema 8, en el punto respectivo.

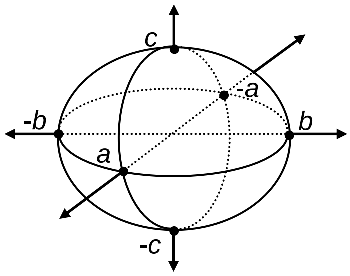
III. SUPERFICIES CUÁDRICAS.

1. Esfera:



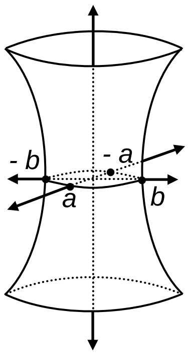
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

2. Elipsoide



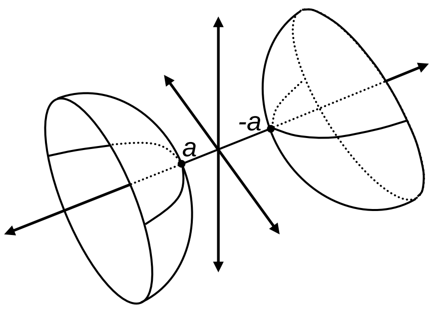
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3. Hiperboloide de una hoja.



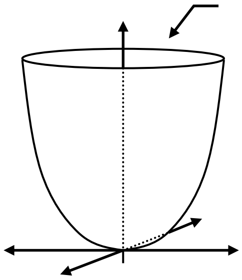
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

4. Hiperboloide de dos hojas.



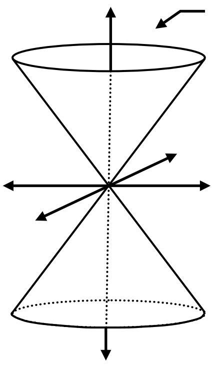
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

5. Paraboloide.



$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

6. Cono.



$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Graficar las siguientes superficies:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ 3. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$

4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ 5. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ 6. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$

7. $-\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$ 8. $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}$ 9. $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$

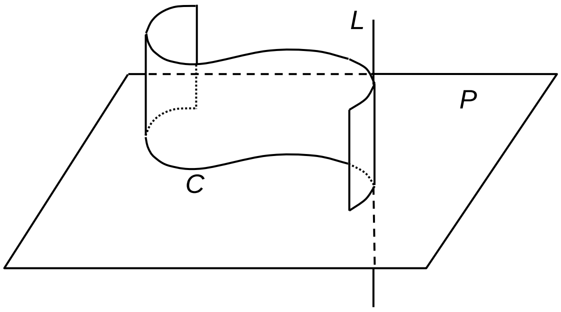
10. $x = \frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ 11. $z^2 = \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9}$ 12. $y^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9}$

13. $z = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$ 14. $x = \sqrt{4 - \frac{z^2}{9} + \frac{y^2}{9}}$ 15. $y = \sqrt{1 + \frac{z^2}{16} + \frac{x^2}{25}}$

16. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

IV. CILINDROS

Es una superficie que se genera cuando una recta L perpendicular a un plano P sigue la trayectoria de una curva C contenida en dicho plano.



L: recta generatriz. $L \perp P$
C: curva directriz.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Graficar los cilindros:

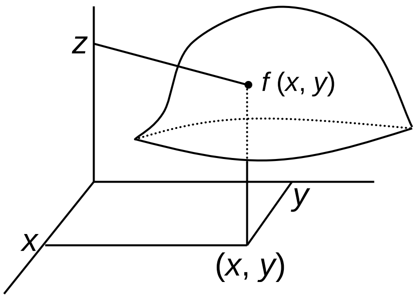
1. $z = y^2$	2. $x^2 + y^2 = 4$
3. $x = \sqrt{z}$	4. $z^2 - y^2 = 4$
5. $xz = 1$	6. $x = \operatorname{sen} z$
7. $y = e^{-x}$	8. $4x^2 + 9z^2 = 36$
9. $z = \ln x$	10. $x = y^3$
11. $z^2 - 4x^2 = 4$	12. $z = \cos x$
13. $y = -x^2 + 1$	14. $x = \mid z \mid$

V. FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES.

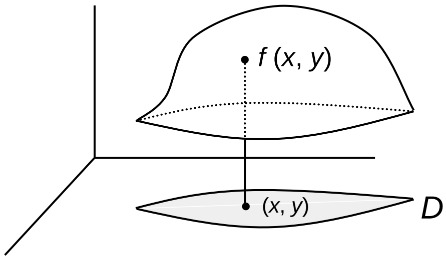
1. Son funciones con dominio en $\mathbb{R}^n$ (en nuestro estudio n = 2 ó 3) y rango en $\mathbb{R}$ Es decir, son de la forma:

$$z = f(x, y) \quad \text{o} \quad w = f(x, y, z).$$

Nota. Toda función de dos variables se puede representar gráficamente por una superficie de $\mathbb{R}^3$.



2. ***Dominio***. Es el conjunto: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; f(x, y)\ \exists\}$



3. ***Límites***. La expresión $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = L$ equivale a :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que: } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$$

Esta definición es muy difícil de manejar en la práctica. Así que para calcular algunos de estos límites se recurre a límites ya conocidos de funciones de una sola variable.

4. ***Continuidad***. $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) si:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

5. ***Derivadas parciales***. Se define la derivada parcial de una función $z = f(x, y)$ con respecto de x como sigue:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

La derivada parcial con respecto a *y* se define de manera similar:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Siempre que dichos límites existan.

Nota. Una manera de abreviar estas notaciones es:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y); \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y)$$

6. ***Diferenciales***. Se define el diferencial de una función $w = f(x, y, z)$ como:

$$dw = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial z} dz$$

7. ***Errores***. Si una magnitud w depende funcionalmente de otras x, y, z, las cuales están sujetas a errores: ε_x, ε_y, ε_z, respectivamente; entonces el error, al calcular w, se puede aproximar mediante:

$$\varepsilon_w = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \varepsilon_x + \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| \varepsilon_y + \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| \varepsilon_z$$

8. ***Regla de la cadena***.

$$z \begin{cases} x \begin{cases} s \\ t \end{cases} \\ y \begin{cases} s \\ t \end{cases} \end{cases} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

9. ***Derivadas direccionales***. La derivada direccional de una función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) y en la dirección del vector unitario $\vec{u}$ se define como:

$$D_{\vec{u}}\, z = \vec{u} \cdot (z_x, z_y)\Big|_{(x_0,\, y_0)}$$

10. ***Derivadas de orden superior***.
Las derivadas de segundo orden se definen como sigue:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = f_{xx}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = f_{yy}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = f_{xy}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = f_{yx}(x,y)$$

Las dos últimas se denominan *derivadas cruzadas*. Análogamente se definen las derivadas de mayor orden.

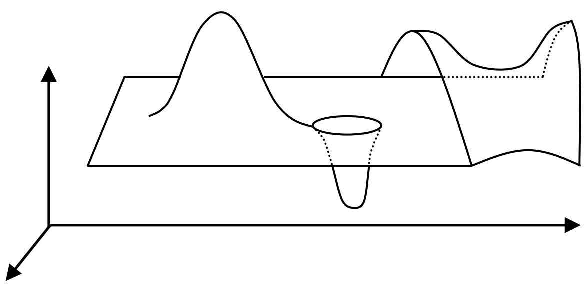
11. ***Puntos críticos de funciones de dos variables***. Un punto (x_0, y_0) es un punto crítico de f si:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

12. ***Máximos y mínimos de funciones de dos variables***. Sea un (x_0, y_0) punto crítico de f y $\Delta(x, y)$ el determinante definido por:

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

Si $\Delta(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo.
Si $\Delta(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo.
Si $\Delta(x_0, y_0) < 0$ entonces $f(x_0, y_0)$ es un punto de ensilladura.
Si $\Delta(x_0, y_0) = 0$, no hay información.



13. ***Extremos condicionados***. Sea un (x_0, y_0) punto crítico de $z = f(x, y)$ sujeta a la condición $\varphi(x, y) = 0$, entonces se cumple:

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial \varphi(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial \varphi(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$$

λ se denomina multiplicador de Lagrange.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Determinar y graficar el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = \sqrt{4 - x - y}$
2. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$
3. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$
4. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$
5. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y}}{x - y^2}$
6. $f(x, y) = \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 1}$
7. $f(x, y) = e^{\left(\frac{1}{2x - 3y}\right)}$

II. Hallar las derivadas parciales, con respecto de cada variable, de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$
2. $f(x, y) = x^3y^2 + 3xy^4 + xy^3 + 2x - 3y$
3. $f(x, y) = 4x^2y^4 - 2xy^2 + y^3 + x + 6$
4. $f(x, y) = (x^2 + x)e^{xy}$
5. $f(x, y) = x^2e^{x/y}$
6. $f(x, y) = x\text{sen}y + y\cos xy$
7. $f(x, y) = x^2\cos xy^2 + y\cos^2 x$
8. $f(x, y) = \ln x^2y^3 + \text{arctg}\sqrt{xy}$
9. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - y^2 + z^3}$
10. $f(x, y, z) = zx^2 + y^2z^2$
11. $f(x, y, z) = z\sqrt[3]{x^2 + y^2}$

III. Hallar el diferencial respectivo de cada función:

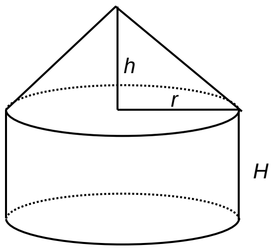
1. $z = x^2 + y^2$
2. $z = \cos(x^2 - y^2)$
3. $z = \text{sen}\, xy$
4. $w = xyz$
5. $w = x^2 + y^3 - z$
6. $w = x^2y^3 - zx + yz^2$
7. $w = \sqrt{x^2 + y^3 - z^2}$

IV. Hallar el error que se comete al calcular el área de un rectángulo si su largo mide 7 ± 0,2*cm* y su ancho 3 ± 0,3*cm*.

V. Hallar el error que se comete al calcular el volumen de una caja rectangular si su largo mide 12 ± 0,2*cm*, su ancho 9 ± 0,3*cm* y su alto 5 ± 0,2*cm*.

VI. Hallar el error que se comete al calcular el volumen de un cono de radio 5 ± 0,1*cm* y altura 10 ± 0,2*cm*. Determinar, asimismo, el error al calcular su área.

VII. Hallar el error que se comete al calcular el volumen del sólido que se muestra en la figura:



$h = 5 \pm 0{,}1cm$
$r = 3 \pm 0{,}1cm$
$H = 8 \pm 0{,}1cm$

VIII. Determinar el error al calcular el área del sólido del ejercicio anterior.

IX. Un gas contenido en un recipiente de $30 \pm 0{,}5l$ está sometido a una temperatura de $40 \pm 0{,}6$ grados kelvin. Determinar el error al calcular la presión.

X. Hallar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, para cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = x^2 - x + y + y^2$
2. $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$
3. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x+y}}$
4. $f(x, y) = \dfrac{4}{(x-y)^3}$
5. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$
7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$
8. $f(x, y) = \cos(2x - 3y)$

XI. En caso que existan, determinar los extremos relativos de las siguientes funciones:

1. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$
2. $z = x^3y^2(6 - x - y)$; $x>0$, $y>0$
3. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
4. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
5. $z = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}$
7. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$
8. $z = (x-1)^2 + 2y^2$

XII. Hallar el máximo de $f(x, y, z) = xyz$, sujeta a $\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz$.

XIII. Hallar el máximo de $f(x, y, z) = 3xyz$, sujeta a $\varphi(x, y, z) = 2xy + 2xz + yz$.

XIV. Hallar los extremos de $f(x, y, z) = xyz$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 27$

XV. Hallar el mínimo de $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, sujeta a $xyz = 8$

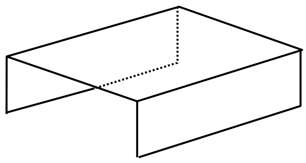
XVI. Hallar el mínimo de $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$, sujeta a $xyz = 81$

XVII. Calcular las dimensiones (r y h) que debe tener un cilindro que ocupa un volumen de 750*ml* para que su superficie sea mínima.

XVIII. Calcular las dimensiones (r y h) que debe tener un cilindro que tiene una superficie de $64cm^2$ para que su volumen sea máximo.

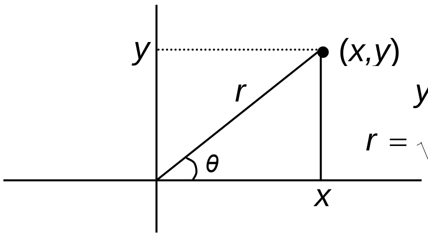
XIX. Calcular las dimensiones (r y h) que debe tener un cono que ocupa un volumen de $27cm^3$ para que su superficie sea mínima.

XX. Un túnel de 27*m* de largo tiene una entrada rectangular. Si el perímetro de la entrada es de 12*m*, determinar sus dimensiones para que el túnel tenga la máxima capacidad.



VI. COORDENADAS POLARES, ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS

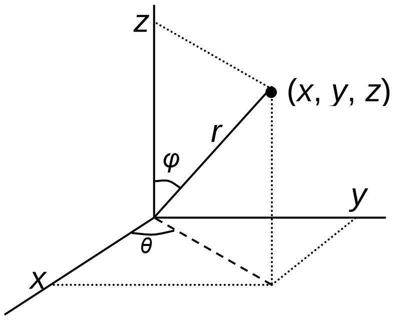
1. ***Coordenadas polares***.



$y = r\,\mathrm{sen}\theta$, $x = r\cos\theta$ ... 1.1

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = arctan(y/x)$ …1.2

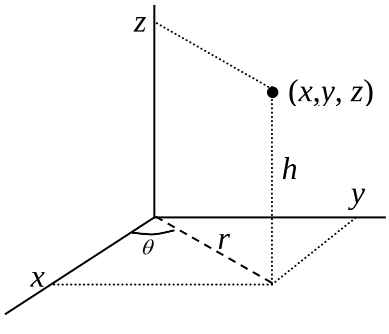
2. ***Coordenadas esféricas***.



$z = r\cos\varphi$, $x = r\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\varphi$ …2.1

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$, $\theta = arctan\ (y/x)$ …2.2

3. ***Coordenadas cilíndricas***.



$y = r\,\mathrm{sen}\theta$, $x = r\cos\theta$, $z = h$… 3.1

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = arctan(y/x)$, $h = z$… 3.2

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Expresar en coordenadas polares:

1. (3; 5) 2. (–2; 4) 3. (–3; –1) 4. (2; –5)

II. En las correspondientes fórmulas de 1.1, hallar $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$.

III. En las correspondientes fórmulas de 1.2, hallar $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}$.

IV. En las correspondientes fórmulas de 2.1, hallar $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \theta}$.

V. En las correspondientes fórmulas de 2.2, hallar $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$.

VI. Empleando las fórmulas de 3.1, calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix}$$

VII. TRANSFORMACIONES Y JACOBIANOS

1. ***Transformaciones***. Un conjunto de fórmulas como las que relacionan las coordenadas cartesianas con las polares, son ejemplos de transformaciones.
En general la dependencia de una variable x, de otras u, v se denota por:

$$x = x(u, v)$$

2. ***Jacobiano***. El jacobiano de una transformación de la forma:

$$x = x(u, v);\ y = y(u, v)$$

se define como el determinante:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Similarmente se define el jacobiano de una transformación de tres o más variables.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Determinar el jacobiano de las siguientes transformaciones:

1. $x = u + v;\ y = u - v$
2. $x = u^2 + v^2;\ y = u^2 - v^2$
3. $x = u + v;\ y = uv$
4. $x = uv;\ y = u/v$
5. $u = e^{xy};\ v = e^{-xy}$
6. $u = xe^{y};\ v = ye^{x}$
7. $r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = arctan(y/x)$
8. $y = r\,\mathrm{sen}\theta,\ x = r\cos\theta$

II. El problema 6. del capítulo anterior es un ejemplo de jacobiano de tres variables, tomando este ejemplo como modelo, determinar los jacobianos correspondientes a las siguientes transformaciones:

1. $x = u + v;\ y = u + w;\ z = v + w$
2. $x = r\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\theta,\ z = r\cos\varphi$
3. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \varphi = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},\quad \theta = arctan(y/x)$
4. $x = re^{\varphi}\cos\theta,\ y = re^{\theta}\mathrm{sen}\varphi,\ z = \cos\varphi\cos\theta$
5. $x = re^{\theta};\ y = re^{-\theta}$
6. $u = x^2 - y^2;\ v = x^2 + y^2$
7. $x = uv;\ y = \dfrac{u}{v}$
8. $x = uv;\ y = \dfrac{u}{v};\ z = 4$
9. $x = 3u;\ y = 2v$
10. $x = 4u;\ y = 2w;\ z = 3v$

VIII. INTEGRALES MÚLTIPLES

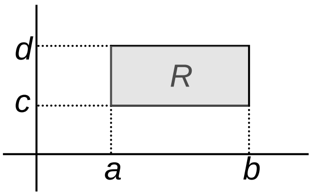
1. ***Integrales iteradas***. Suponiendo que se cumplen todas las condiciones de integración, se tiene:

$$\int_a^b \int_c^d F(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dx \right) dy$$

Para tres o más integrales, la definición es similar.

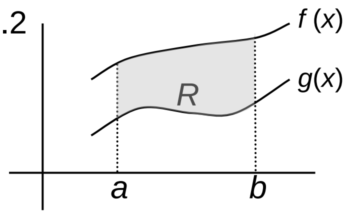
2. ***Integrales dobles sobre una región***.

2.1



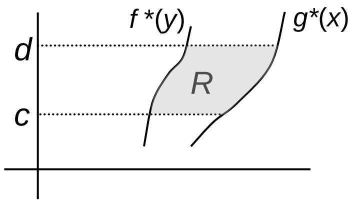
$$\iint_R F(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)dxdy$$

2.2



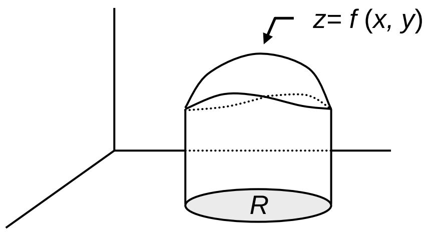
$$\iint_R F(x,y)dA = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dydx$$

2.3



$$\iint_R F(x,y)dA = \int_c^d \int_{f^*(y)}^{g^*(y)} F(x,y)dxdy$$

3. ***Interpretación geométrica***.



El volumen comprendido por la región R y la superficie correspondiente a $z = f(x, y)$ está dado por:

$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

Para $f(x, y) = 1$, el volumen coincide numéricamente con el área de la región plana R, luego, se tiene:

$$A = \iint_R dA$$

Igualmente, el volumen V de un sólido S se puede calcular numéricamente mediante:

$$V = \iiint_S dV$$

4. ***Cambio de variable***. Si $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$:

$$\iint_{R_{xy}} F(x,y)dA_{xy} = \iint_{R_{uv}} G(u,v)\,|\,J\,|\,dA_{uv}$$

$$G(u, v) = F(x(u,v), y(u,v)).$$

En R_{xy} y A_{xy} los subíndices representan la dependencia de x e y así como en R_{uv} y A_{uv} denotan la dependencia de u y v. $|\ J\ |$ representa el valor absoluto del jacobiano de la transformación.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Calcular:

1. $\int_0^1\int_0^2 (x+y)dxdy$ 2. $\int_{-1}^1\int_0^2 xydxdy$ 3. $\int_0^1\int_0^1 ye^x dydx$

4. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\pi/2}^{\pi} y\cos xydydx$ 5. $\int_0^1\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

6. $\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ 7. $\int_0^1\int_0^x 2ye^x dydx$ 8. $\int_0^1\int_{-x}^{x^2} (x-2y)dydx$

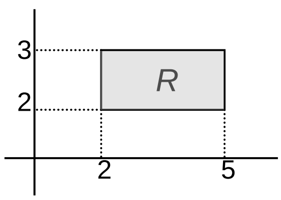
9. $\int_{-1}^1\int_{\sqrt{y}}^{y} x^3 ydxdy$ 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos x}^{1} ydydx$ 11. $\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos x} y^2 \operatorname{sen} x\, dydx$

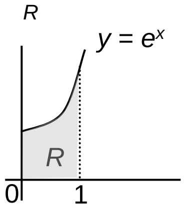
12. $\int_0^1\int_0^2\int_1^2 (x+yz)dxdydz$ 13. $\int_0^1\int_{-1}^2\int_1^2 xyzdzdydx$

14. $\int_0^1\int_0^{x-1}\int_{-y}^{y+1} xy^2\sqrt{z}\,dzdydx$

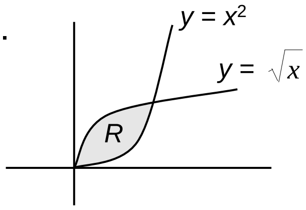
II. Calcular las siguientes integrales para cada una de las regiones dadas:

$$\iint_R (2x+3y)dA\,,\quad \iint_R \sqrt{xy}\,dA\,,\quad \iint_R x\,dA$$

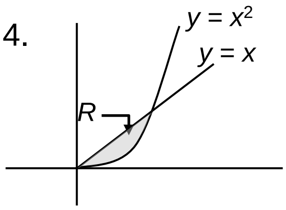
1.


2.


3.

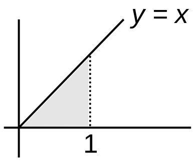


4.

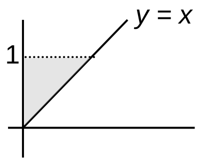


III. Calcular las siguientes integrales para su correspondiente región (sombreada):

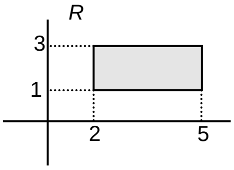
1. $\iint\limits_R (2x - 3y + 1)\, dA$



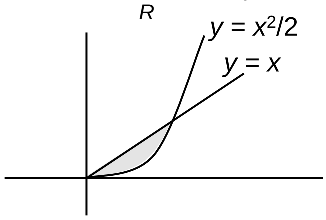
2. $\iint\limits_R \sqrt{x^3 y}\; dA$



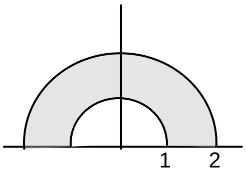
3. $\iint\limits_R \frac{y}{x}\, dA$



4. $\iint\limits_R \frac{x\,dA}{x^2 + y^2}$

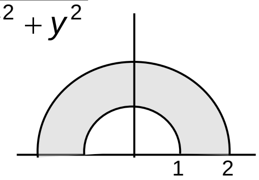


5. $\iint\limits_R \frac{x\,dA}{x^2 + y^2}$

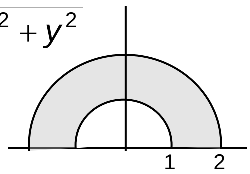


IV. Calcular las siguientes integrales, cambiando a coordenadas polares, (los arcos son arcos de circunferencias y el radio es el que se indica en el dibujo):

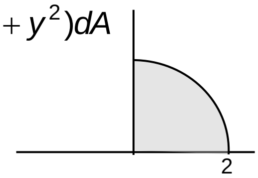
1. $\iint\limits_R \frac{x\,dA}{x^2 + y^2}$



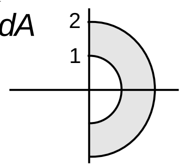
2. $\iint\limits_R \frac{dA}{x^2 + y^2}$



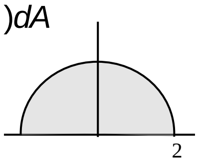
3. $\iint\limits_R (x^2 + y^2)\, dA$



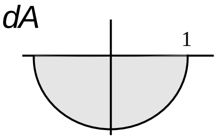
4. $\iint\limits_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$



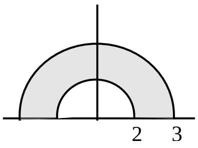
5. $\iint\limits_R (x^2 - y^2)\, dA$



6. $\iint\limits_R (x - y)\, dA$



7. $\iint\limits_R xy\, dA$



V. Calcular las siguientes integrales triples en coordenadas cartesianas o cambiando a coordenadas esféricas cuando sea necesario.

1. $\iiint\limits_{S:\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1} xyz\,dV$

2. $\iiint\limits_S xy^3z^2 dV$, S es el sólido limitado por: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le xy$

3. $\iiint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2) dV$, S es el sólido limitado, exteriormente, por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ($x^2 + y^2 + z^2 \le 9$)

4. $\iiint\limits_S \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV$, S es el sólido limitado por la parte exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y por la parte interior de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. ($1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$)

IX. GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

1. Un campo escalar queda determinado por una función $\varphi(x,y,z)$, y el campo vectorial queda determinado por una función vectorial de tres variables de la forma:

$$F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

2. ***El operador nabla***.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

3. ***Gradiente***. El gradiente de φ, se define como:

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

4. ***Divergencia***.

$$\nabla\cdot F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

5. ***Rotacional***.

$$\nabla\times F = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Calcular el gradiente de las siguientes funciones:

1. $f(x, y, z) = xyz$
2. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$
3. $f(x, y, z) = x^2 + yz^2 - 3xz$
4. $f(x, y, z) = x^2e^{yz}$
5. $f(x, y, z) = y\cos x^2 + e^{yz}$
6. $f(x, y, z) = xz\arctan e^y$
7. $f(x, y, z) = \ln(x^3y^2z)$
8. $f(x, y, z) = y\,\mathrm{sen}\,xz$
9. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2}$
10. $f(x, y, z) = \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz}$
11. $f(x, y, z) = x\ln(\frac{y}{z})$
12. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
13. $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{xyz}$

II. Hallar la divergencia y el rotacional de:

1. $F(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$
2. $F(x, y, z) = (xy,\ yz,\ zx)$
3. $F(x, y, z) = (xe^{y},\ ye^{z},\ ze^{x})$
4. $F(x, y, z) = (x^2yz,\ 2x + yz, -3zx)$
5. $F(x, y, z) = (xyz,\ 2x + 3y + z, -4)$
6. $F(x, y, z) = (\cos xyz,\ \operatorname{sen}(x + y),\ \sqrt{yz})$
7. $F(x, y, z) = (\ln xy,\ \ln yz,\ \ln zx)$
8. $F(x, y, z) = (x\tan y,\ x\operatorname{sen} yz,\ \ln(\cos x))$
9. $F(x, y, z) = (e^{-x}\cos y,\ \operatorname{sen} y\sqrt{z},\ x - y)$
10. $F(x, y, z) = (\operatorname{arcsen} x, \arctan y,\ \operatorname{arcsec} z)$

III.

1. Dada $f(x, y, z) = xy - 2z + x^2y^3$, hallar:
a) $\nabla\cdot\nabla f$ b) $\nabla\times\nabla f$ c) $\nabla\cdot(\nabla\times\nabla f)$

2. Dada $f(x, y, z) = (xy - z^2)e^{y}$, hallar:
a) $\nabla\cdot\nabla f$ b) $\nabla\times\nabla f$ c) $\nabla\cdot(\nabla\times\nabla f)$

3. Dada $f(x, y, z) = e^{y}x\cos z$, hallar:
a) $\nabla\cdot\nabla f$ b) $\nabla\times\nabla f$ c) $\nabla\cdot(\nabla\times\nabla f)$

4. $F(x, y, z) = (xyz,\ x - 3y + z, 2)$, hallar:
a) $\nabla(\nabla\cdot F)$ b) $\nabla\times(\nabla\times f)$
c) $\nabla\times(\nabla(\nabla\cdot F))$ d) $\nabla\cdot(\nabla(\nabla\cdot F))$

X. TRANSFORMADAS DE LAPLACE

1. Sea f una función definida para todo $t \geq 0$. Se define la *transformada de Laplace* de f según:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \quad \ldots\ 1.1$$

siempre que la integral exista.

- Aunque a simple vista no se aprecie, el lado derecho de la igualdad es una función de la variable s. Por eso escribiremos

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

- En los teoremas que se enuncien posteriormente asumiremos, implícitamente, la existencia de $F(s)$.

2. ***Propiedad de linealidad***.

$$L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 L\{f(t)\} + c_2 L\{g(t)\}$$

3. ***Tabla básica de transformadas***.

$f(t)$	$F(s)$
$t^n \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$, $s > 0$
$\operatorname{senh} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$, $s > \lvert\omega\rvert$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$, $s > \lvert\omega\rvert$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-as}

4. ***Primer teorema de traslación***.
Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces:

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

5. ***Segundo teorema de traslación***.

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} L\{f(t)\}$$

Algunas veces se omite escribir la función u_a y en su lugar se escribe la condición $t > a$, con lo cual el teorema se escribe así

$$L\{f(t-a)\} = e^{-as} L\{f(t)\},\ t > a$$

- Otra versión de este teorema es

$$L\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as} L\{f(t+a)\}$$

6. ***Cambio de escala***.
Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

7. ***Teorema de la multiplicación por t***.
Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$L\{t f(t)\} = -F'(s)$$

- En general se tiene

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

8. **Teorema de la división por *t***.
Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$L\{f(t)/t\} = \int_s^{\infty} F(u)du\ ,$$

siempre que exista $\lim\limits_{t \to 0} f(t)/t$.

9. **Teorema de la integral**.
Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$L\{\int_0^t f(u)du\} = \frac{F(s)}{s}.$$

10. ***Teorema de la derivada***.
Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \ldots (1)$$

$$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \ldots (2)$$

La importancia y aplicaciones de este teorema las veremos más adelante.

11. ***Comportamiento de** F(s) **cuando** s → ∞*.

Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

12. ***Teorema del valor inicial***.
Si los correspondientes límites existen, entonces

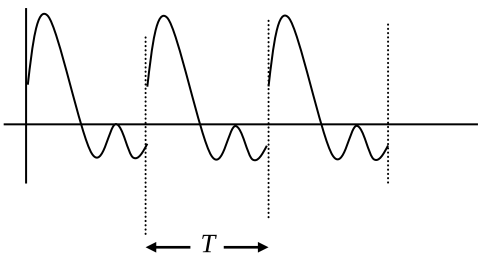
$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

13. ***Teorema del valor final***.
Si los correspondientes límites existen, entonces

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

14. **Transformada de una función periódica**.
Si f es una función periódica cuyo periodo es $T > 0$, esto es $f(t + T) = f(t)$ entonces

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Calcular las transformadas que se indican

1. L $\{1 - 3t + 2t^2\}$ 2. L $\{(2 - t + e^t)^2\}$ 3. L $\{\text{sen}^2 2t\}$
4. L $\{\text{sen}^3 t\}$ 5. L $\{\text{sen}2t\cos 3t\}$ 6. L $\{\text{sen}5t\,\text{sen}2t\}$
7. L $\{(\text{sen}3t - \cos 2t)^2\}$ 8. L $\{e^{4t}\cos 2t\}$
9. L $\{(\text{sen}t + e^t)^2\}$ 10. L $\{e^{-2t}\cos 3t \cos t\}$
11. $L\{t\int_0^t \cos u\, du\}$ 12. $L\{\int_0^t e^{-3t}\cos u\, du\}$
13. $\mathcal{L}\{e^{2t}\int_0^t e^{-u}\cos u\, du\}$ 14. $\mathcal{L}\{e^{2t}\int_0^t t\,\text{sen}^2 u\, du\}$
15. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\text{sen}\,u}{u} du\right\}$
16. L $\{(t + \cos 3t)^2\}$ 17. L $\{e^{3t} t \cos 3t\}$
18. L $\{e^{-2t} t\,\text{sen}2t\}$ 19. L $\{u(t-a)\}$

20. L $\{(2-t)^3 u(t-2)\}$ 21. L $\{(e^{3t} u(t-1)\}$

21. L $\{\text{sen}\,(t-\pi/2)\}$, $t > \pi/2$ 22. L $\{(4t^2 + 3t - 2)\}$, $t > 1$

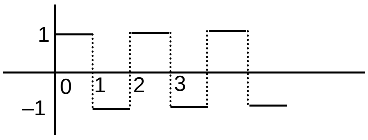
II. Calcule la transformada de cada una de las siguientes funciones periódicas

1. $f(t) = t^2$, $0 < t < 1$, $f(t+1) = f(t)$

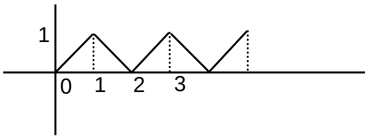
2. $f(t) = \begin{cases} -t & 0 \le t < 1 \\ t^2 & 1 \le t < 2 \end{cases}$, $f(t+2) = f(t)$

3. $f(t) = \begin{cases} sen\, t & 0 \le t < \pi \\ 0 & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$, $f(t + 2\pi) = f(t)$

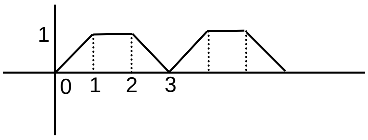
4.



5.



6.



3. En el teorema 10 demuestre la fórmula (2) empleando la número (1), y con ambas calcule la transformada $L\{f'''(t)\}$.

4. Calcular $L\{\frac{sen\, t}{t}\}$

XI. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

1. Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces la *transformada inversa* de *F* (*s*) es

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

- La transformada inversa también posee la propiedad de linealidad.

2. **Tabla básica de transformadas inversas**.

F (*s*)	*f* (*t*)
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{e^{at}t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\text{sen } \omega t$
$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos \omega t$
$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$	$e^{at}\text{senh } \omega t$
$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$	$e^{at}\cosh \omega t$
$\frac{e^{-as}}{s}$	$u(t-a)$
1	$\delta(t)$
e^{-as}	$\delta(t-a)$

3. **Primer teorema de traslación**.

Si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

4. **Segundo teorema de traslación**.

Si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

o

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a) \qquad t > a$$

5. **Cambio de escala**. Si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$$L^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f(\frac{t}{k})$$

6. **Inversa de la derivada**. Si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$$L^{-1}\{F'(s)\} = -t\, f(t)$$

7. **Teorema de la integral**. Si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$$L^{-1}\{\int_s^\infty F(u)du\} = \frac{f(t)}{t}$$

8. **Multiplicación por** s. Si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$$L^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + f(0)\delta(t)$$

9. **La división por** s. Si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, entonces

$$L^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\} = \int_0^t f(t)dt$$

10. **Propiedad de Convolución**. Si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ y $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, entonces

$$L^{-1}\{F(t)G(t)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

Esta última integral se denomina la *convolución* de f y g, y se denota por $f * g$.

- La convolución es conmutativa:

$$f * g = g * f$$

11. **Método de fracciones parciales**.

11.1 $$\frac{P_n(x)}{a_0(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + ... + \frac{A_m}{(x-a_m)}$$

11.2 $$\frac{P_n(x)}{a_0(x-a_1)^k(x-a_2)...} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_m}{(x-a_1)^k} + ...$$

11.3 Si $b^2 - 4ac < 0$

$$\frac{P_n(x)}{(ax^2+bx+c)(x-a_1)...} = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \frac{C}{(x-a_1)} + ...$$

12. ***Función de transferencia***.

Si la entrada x y la salida y de un sistema quedan relacionados por una ecuación diferencial de la forma:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = b_2x'' + b_1x' + b_0x$$

cada a_i y cada b_i son constantes.

Si transformamos cada miembro usando el T. 10 del Cap. VII, y si denotamos las transformadas de x e y por X e Y respectivamente se tiene:

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

La relación anterior es la *función de transferencia* o *ganancia* y se representa por $G(s)$:

$$\frac{Y}{X} = G(s)$$

Esta discusión se ha efectuado para una ecuación de orden dos en ambos términos pero se generaliza fácilmente para cualquier orden.

$$b_2 x'' + b_1 x' + b_0 x \longrightarrow \boxed{S\,L} \longrightarrow a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Calcular las siguientes transformadas inversas:

1. $L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2} + \frac{3}{s}\right\}$ 2. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s-1}\right\}$ 3. $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2} - \frac{2}{s}\right\}$

4. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 2s + 1}\right\}$ 5. $L^{-1}\left\{\frac{5}{(s+3)^2 + 4}\right\}$ 6. $L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 + 2s + 2}\right\}$

7. $L^{-1}\left\{\frac{2s+6}{s^2 + 6s + 13}\right\}$ 8. $L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2 - 6s + 10}\right\}$ 9. $L^{-1}\left\{\frac{s}{s-1}\right\}$

10. $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)(s+2)}\right\}$ 11. $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s(s+1)(s-2)}\right\}$

12. $L^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)(s+1)(s-3)}\right\}$ 13. $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\}$

14. $L^{-1}\left\{\frac{3s}{(s-1)^2(s-2)}\right\}$ 15. $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+1)^2(s-2)^2}\right\}$

16. $L^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^2(s-1)^2(s-2)}\right\}$ 17. $L^{-1}\left\{\frac{3}{s(s^2+1)}\right\}$

18. $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+1)(s^2+2)}\right\}$ 19. $L^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2(s^2+1)}\right\}$

20. $L^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s-1)(s^2+2s+2)}\right\}$

21. $L^{-1}\left\{\dfrac{6}{(s^2+2s+2)(s^2-4s+6)}\right\}$

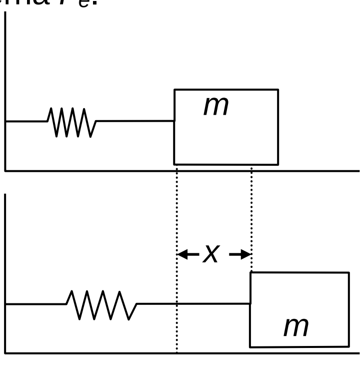
II. Resolver las siguientes ecuaciones, sujeta a las condiciones iniciales dadas:

1. $y' + 3y = e^{-t}$, $y(0) = 0$ 2. $y' - y = \text{sen } t$, $y(0) = 0$
3. $y'' + y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$
4. $y'' + 2y' = te^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$
5. $y''+3y'+2y = 2\text{sen } 3t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$
6. $y'' +2y' +2y = \cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$
7. $y'' - 4y' + 4y = 5$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$
8. $y'' - 4y' + 4y = t^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$
9. $2y'' - y' - 3y = t +1$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$
10. $2y'' - y' - 3y = e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

III. Resolver cada sistema de ecuaciones, sujeta a las condiciones dadas:

1. $x' = 2x - 3y$, $y' = y - 2x$, $x(0) = 8$, $y(0) = 3$
2. $x'' + y' + 3x = 15e^{-t}$, $y'' - 4x' + 3y = 15\text{sen } 2t$,
   $x(0)=35$, $x'(0) = -48$, $y(0)=27$, $y'(0)=-55$

IV. Una masa m sujeta a una pared mediante un resorte, cuya constante de rigidez es igual a k, se estira una longitud x y se suelta. El cuerpo se encuentra sujeto a una fuerza restauradora igual a $F = -kx$. Cuando el movimiento presenta una fuerza de resistencia o amortiguación, esta es proporcional a la velocidad del cuerpo, o sea $F_r = -cx'$. Algunas veces el cuerpo se encuentra sometido a una fuerza externa F_e.



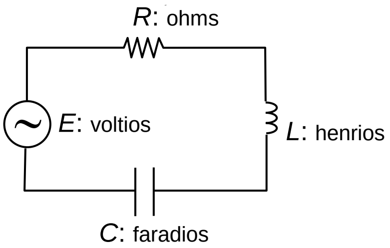
Bajo estas condiciones, de acuerdo a la segunda ley de Newton, se tiene:

$$ma = F + F_r + F_e$$
$$m\,x'' = -kx - cx' + F_e$$
$$m\,x'' + cx' + kx = F_e \qquad (*)$$

Esta última ecuación (*) es la que rige el movimiento. Resolverla en los siguientes casos:
a) $m = 1$, $c = 4$, $k = 5$, $F_e = 80\text{sen } 5t$
b) $m = 4$, $c = 5$, $k = 3$, $F_e = 80$

V. En un circuito R- L- C con una fuente E, de acuerdo con las leyes de Kirchhoff se cumple:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E \qquad (1)$$



Q: carga en coulombs, I: intensidad en amperios
Derivando (1) con respecto de t se tiene:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Recordando que $I = \frac{dQ}{dt}$ la ecuación anterior se transforma en:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} \qquad (2)$$

Reemplazando I por $\frac{dQ}{dt}$ en la ecuación (1) se tiene:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E \qquad (3)$$

Resolver la ecuación (3), esto es hallar Q e I, para:
a) $L = 2$ h, $R = 16$ ohms, $C = 0{,}02$ fd
$E = 300$ volts, $Q(0)=0$, $I(0) = Q'(0) = 0$.
b) $L = 2$ h, $R = 16$ ohms, $C = 0{,}02$ fd
$E = 100\text{sen } 3t$ volts, $Q(0)=0$, $I(0)= Q'(0)= 0$.