

**UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA**  
**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS**  
**DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**



---

**MECÁNICA COMPUTACIONAL EN LA INGENIERÍA**  
**CON APLICACIONES EN MATLAB**

---

Eduardo W. V. Chaves y Roberto Mínguez  
CIUDAD REAL, 2010



Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de EDICIONES DE LA UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA, salvo excepción prevista por la ley.

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos – [www.cedro.org](http://www.cedro.org)) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

@ de los textos: E.W.V. Chaves y R. Mínguez

@ de la edición: Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Castilla-La Mancha.

ISBN: 978-84-692-8273-1

D. Legal: SA-4-2010

Imprime: Gráficas Calima, S.A.

Avda. Candina, s/n. 39011 Santander

Impreso en España –*Printed in Spain*

*A nuestros Padres y Madres*

# Prefacio

---

La idea de escribir este libro surge a partir de la impartición por parte de los autores de la asignatura *Mecánica Computacional en la Ingeniería* en la Escuela de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Castilla-La Mancha.

El objetivo principal del libro es proporcionar a alumnos de grado y/o postgrado de carreras técnicas el conocimiento necesario para comprender el funcionamiento del Método de los Elemento Finitos (MEF), e implementar y desarrollar sus propios códigos empleando el programa MATLAB (*MATrix LABORatory*). Este planteamiento se fundamenta en el convencimiento por parte de los autores de que la mejor manera de que un alumno llegue a comprender el desarrollo y funcionamiento de un método pasa por saber programarlo. Este conocimiento les es de gran utilidad, posteriormente, para usar de forma crítica y adecuada cualquier programa comercial basado en el Método de los Elementos Finitos.

La elección del programa en el que implementar los códigos, MATLAB (*MATrix LABORatory*), se ha fundamentado en dos motivos:

- Es un lenguaje sencillo y ampliamente extendido en el ámbito académico e investigador.
- Proporciona las herramientas matemáticas y numéricas básicas, tales como multiplicación de matrices, inversión de matrices, etc., que permiten al alumno centrar su atención en lo que respecta a la implementación del Método de los Elementos Finitos.

La elaboración y desarrollo del libro sigue las pautas necesarias para conseguir un aprendizaje progresivo, pero partiendo de unos conocimientos básicos de Mecánica de los Medios Continuos, Álgebra y de MATLAB. En todo momento, junto con la justificación teórica de los conceptos tratados se proporcionan los códigos de MATLAB para implementarlos en problemas prácticos.

El libro incluye ejemplos, ejercicios resueltos y 200 ilustraciones para clarificar los conceptos. Va dirigido a físicos, ingenieros y científicos interesados en la orientación práctica del Método de los Elementos Finitos y su implementación.

Acompaña al libro material adicional en formato electrónico, que está accesible en la página web:

<http://www.uclm.es/profesorado/evieira/asignatura/book/index.htm>

en la que se encuentran disponibles muchos de los códigos, programas y material necesario para la resolución de los ejercicios. Puede constituir el material de referencia para cursos que empleen el Método de los Elementos Finitos y sus aplicaciones en la mecánica de sólidos.

En este libro se tratan básicamente problemas relacionados con la Mecánica de Sólidos en régimen elástico lineal, en una, dos y tres dimensiones. Con aplicaciones para la resolución de celosías, forjados, problemas de flujo en medios permeables, torsión de barras prismáticas, etc. El libro está estructurado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 se da una breve introducción sobre el método de los elementos finitos, y algunos de los programas comerciales existentes en el mercado.

- En el Capítulo 2 se introducen y repasan conceptos básicos de la herramienta MATLAB y del álgebra matricial, y que son necesarios para la comprensión de los capítulos posteriores.
- Dado que el MEF se fundamenta en la utilización de unas funciones de aproximación conocidas como *funciones de forma*, el Capítulo 3 está íntegramente dedicado a su descripción. Además se deducen las funciones de forma asociadas a los elementos más utilizados en la práctica.
- Una vez revisados los elementos fundamentales para la aplicación del MEF, el Capítulo 4 desarrolla la implementación para los problemas más sencillos: los sistemas constituidos por barras sometidas a compresión y/o a tracción. Se parte del problema unidimensional y progresivamente se pasa al caso bidimensional y, por último, al tridimensional.
- El Capítulo 5 extiende la implementación del MEF a la resolución de problemas de elasticidad lineal para sólidos en dos y tres dimensiones.
- En el Capítulo 6 se trata el problema de la aplicación del MEF para la resolución de forjados.
- Y por último, y dada su importancia para resolver multitud de problemas en física e ingeniería, el Capítulo 7 se dedica a la resolución de problemas de campo en régimen estacionario, y su implementación para resolver problemas de transmisión de calor en tres dimensiones, flujo en medios permeables en dos dimensiones, y problemas de torsión de barras prismáticas.
- Al final del libro hay dos breves Apéndices, uno con las ecuaciones básicas de la mecánica de sólidos (Apéndice A), y otro sobre el problema del almacenamiento de la matriz de rigidez (Apéndice B).

En resumen, este libro constituye un texto autocontenido diseñado para que aquellas personas interesadas en aprender el funcionamiento e implementación del Método de los Elementos Finitos y su aplicación práctica, lo hagan de forma gradual y sencilla. Presenta la ventaja de disponer de prácticamente la totalidad del material práctico en formato electrónico de fácil acceso.

No quisiéramos dejar pasar la oportunidad de agradecer a la Profesora Cristina Solares su colaboración y comentarios constructivos, al Dr. Sergio Blanco por proporcionarnos material para la resolución de algunos de los ejemplos prácticos, y al Profesor Enrique Castillo su confianza y apoyo para que este libro sea una realidad. A todos ellos muchas gracias.

También quisiéramos dar las gracias a la Universidad de Castilla-La Mancha por proporcionar un ambiente propicio para la redacción del libro, y a la Universidad de Cantabria y al Instituto de Hidráulica Ambiental “IH Cantabria”, lugar de trabajo actual de Roberto Mínguez, por haberle permitido dedicar tiempo a la finalización del documento.

Ciudad Real,  
25 de noviembre de 2009

*Eduardo W. Vieira Chaves*  
*Roberto Mínguez*

# Índice general

---

Índice general	v
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Algunas Aplicaciones del MEF . . . . .	1
1.2. Pasos Básicos de la Obtención del Resultado . . . . .	3
1.2.1. Factores que Influyen en los Resultados del MEF . . . . .	3
1.3. Programas Comerciales más Difundidos . . . . .	4
<b>2. Herramientas Matemáticas con MATLAB</b>	<b>5</b>
2.1. Revisión de Álgebra Matricial . . . . .	5
2.1.1. Notación Matricial . . . . .	5
2.1.2. Suma y Resta de Matrices . . . . .	9
2.1.3. Producto de una Matriz por un Escalar $\lambda$ . . . . .	9
2.1.4. Producto de Matrices . . . . .	10
2.1.5. Transpuesta de una Matriz . . . . .	11
2.1.6. Casos Particulares de Matrices . . . . .	11
2.1.7. Determinante de una Matriz . . . . .	12
2.1.8. Rango de una Matriz . . . . .	13
2.1.9. Inversa de una Matriz . . . . .	14
2.1.10. Ejemplos de Programación en MATLAB con Matrices . . . . .	15
2.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales . . . . .	22
2.2.1. Métodos Directos de Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales . . . . .	23
2.2.2. Métodos Iterativos para la Resolución de Sistemas Lineales . . . . .	45
2.3. Integración Numérica . . . . .	50
2.3.1. Reglas de Cuadratura . . . . .	51
2.3.2. Regla Trapezoidal Simple . . . . .	52
2.3.3. Regla Trapezoidal Compuesta . . . . .	53
2.3.4. Regla Trapezoidal Compuesta Mejorada . . . . .	54
2.3.5. Regla de Simpson <b>1/3</b> Simple . . . . .	58
2.3.6. Regla de Simpson <b>1/3</b> Compuesta . . . . .	60
2.3.7. Regla de Simpson <b>1/3</b> Compuesta Mejorada . . . . .	61
2.3.8. Aplicación de las Reglas de Integración Compuestas . . . . .	65
2.3.9. Regla de Simpson <b>3/8</b> Simple . . . . .	66
2.3.10. Fórmulas de Newton-Cotes . . . . .	69
2.3.11. Fórmulas de Cuadratura Gaussiana. Polinomios Ortogonales. . . . .	75
2.3.12. Fórmula de Cuadratura de Gauss-Legendre . . . . .	75
2.3.13. Integrales Multidimensionales . . . . .	82

<b>3. Funciones de Forma</b>	<b>87</b>
3.1. Introducción . . . . .	87
3.1.1. Aproximación de una Función . . . . .	88
3.1.2. Aproximación de la Geometría . . . . .	89
3.1.3. Normalización del Espacio . . . . .	89
3.2. Funciones de Forma de Elementos Unidimensionales . . . . .	90
3.2.1. Elemento Lineal . . . . .	90
3.2.2. Elemento Cuadrático . . . . .	91
3.2.3. Elemento Cúbico . . . . .	92
3.2.4. Elemento Cuártico . . . . .	93
3.3. Funciones de Forma para Elementos Bidimensionales . . . . .	95
3.3.1. Elemento Rectangular Lineal . . . . .	95
3.3.2. Elementos Rectangulares de 9 Nodos . . . . .	97
3.3.3. Elemento Rectangular de 16 Nodos . . . . .	99
3.3.4. Funciones de Forma de Elementos Triangulares . . . . .	102
3.4. Funciones de Forma de Elementos Tridimensionales . . . . .	109
3.4.1. Elemento Hexaédrico Recto de 8 Nodos . . . . .	109
3.4.2. Elemento Hexaédrico de 27 Nodos . . . . .	111
3.4.3. Elemento Tetraédrico de 4 Nodos . . . . .	113
3.4.4. Elemento Tetraédrico de 10 Nodos . . . . .	114
<b>4. Resolución de Sistemas Constituidos por Barras Mediante el MEF</b>	<b>117</b>
4.1. Resolución de un Sistema de Muelles . . . . .	117
4.1.1. Elemento Tipo Muelle . . . . .	117
4.1.2. Sistema de Muelles . . . . .	119
4.1.3. Procedimiento Sistemático de Ensamblaje de Elementos Unidimensionales	124
4.1.4. Aplicación de las Condiciones de Contorno en Sistemas Unidimensionales	127
4.1.5. Programa en MATLAB de Ensamblaje y Resolución de Sistemas de Muelles (Unidimensionales) . . . . .	129
4.2. Análisis de Estructuras de Barras . . . . .	139
4.2.1. Barra Sometida a Esfuerzo Axil . . . . .	139
4.2.2. Matriz de Rigidez del Elemento de Barra . . . . .	140
4.2.3. Elemento Barra en el Espacio Bidimensional (2D) . . . . .	149
4.2.4. Matriz de Rigidez en el Espacio 2D . . . . .	151
4.2.5. Tensión en el Elemento Barra Bidimensional . . . . .	152
4.2.6. Procedimiento Sistemático de Ensamblaje de Elementos Bidimensionales .	155
4.2.7. Aplicación de las Condiciones de Contorno en Sistemas Bidimensionales .	157
4.2.8. Elemento Barra en el Espacio Tridimensional (3D) . . . . .	165
4.2.9. Programa para Ensamblaje y Resolución de Estructuras Articuladas en MATLAB . . . . .	167
4.3. Procedimiento Genérico de Ensamblaje . . . . .	190
<b>5. Aplicación del MEF en la Elasticidad Lineal</b>	<b>195</b>
5.1. Elemento Triangular de 3 Nodos (CST) . . . . .	195
5.1.1. Matriz de Rigidez del CST . . . . .	195
5.1.2. Vector de Fuerzas Externas Nodales Equivalente del Elemento CST . . .	205
5.2. Análisis de Estructuras Bidimensionales Elásticas . . . . .	212
5.3. Elemento Finito Triangular de 6 Nodos (LST) . . . . .	222
5.3.1. Vector de Fuerzas Externas Nodales Equivalente del Elemento LST . . . .	225
5.4. Matriz de Rigidez del Elemento Rectangular de 4 Nodos . . . . .	226

5.4.1.	Matriz de Rigidez del Elemento Rectangular Regular . . . . .	227
5.4.2.	Matriz de Rigidez del Elemento Cuadrangular . . . . .	235
5.5.	Elementos Tridimensionales (3D) . . . . .	241
5.5.1.	Elemento Tetraédrico de 4 Nodos . . . . .	241
5.5.2.	Vector de Fuerzas Nodales Equivalentes en el Elemento Tetraédrico . . . . .	249
5.5.3.	Ejemplo de una Presa en Arco . . . . .	255
<b>6.</b>	<b>Aplicación del MEF a Forjados</b>	<b>261</b>
6.1.	Discretización del Forjado . . . . .	261
6.1.1.	Hipótesis de Partida . . . . .	263
6.2.	Teoría de Placas a Flexión . . . . .	263
6.2.1.	Hipótesis Básicas . . . . .	264
6.2.2.	Campo de Desplazamientos . . . . .	265
6.2.3.	Campo de Deformaciones . . . . .	266
6.2.4.	Relación Tensión-Deformación . . . . .	267
6.3.	Teoría de Kirchhoff para Placas Delgadas . . . . .	269
6.4.	Resolución de Placas Empleando el MEF . . . . .	274
6.4.1.	Elemento Finito ACM para Placas Delgadas . . . . .	274
6.4.2.	Elemento Finito Triangular de Placas (DKT) . . . . .	285
6.4.3.	Elemento Finito Cuadrangular para Placas (DKT4) . . . . .	291
6.5.	Elemento Finito Tipo Viga . . . . .	298
6.5.1.	Vigas . . . . .	298
6.5.2.	Pasos para la Obtención de la Matriz de Rigidez del Elemento de Tipo Viga	299
6.5.3.	Vector de Fuerzas Nodales . . . . .	308
<b>7.</b>	<b>Problemas de Campo</b>	<b>311</b>
7.1.	Transmisión de Calor . . . . .	313
7.1.1.	Ecuación del Flujo de Calor . . . . .	315
7.1.2.	Condiciones de Contorno . . . . .	317
7.1.3.	Formulación de Elementos Finitos para Problemas de Temperatura . . . . .	317
7.1.4.	Matriz de Rigidez del Elemento Tetraédrico de 4 Nodos . . . . .	322
7.1.5.	Ejemplo de Distribución de Temperaturas en una Presa de Gravedad . . . . .	325
7.2.	Filtración en Medios Porosos . . . . .	325
7.2.1.	Condiciones de Contorno . . . . .	329
7.2.2.	Formulación de Elementos Finitos para Problemas de Flujo . . . . .	330
7.2.3.	Matriz de Rigidez del Elemento Triangular de 3 Nodos . . . . .	333
7.2.4.	Ejemplo de Filtración Durante la Construcción de un Garaje Subterráneo	335
7.3.	Torsión . . . . .	350
7.3.1.	Función de Tensión . . . . .	352
7.3.2.	Analogía de la Membrana de Prandtl . . . . .	357
7.3.3.	Formulación de Elementos Finitos para Problemas de Torsión . . . . .	358
7.3.4.	Matriz de Rigidez del Elemento Triangular de 3 Nodos . . . . .	361
<b>A.</b>	<b>Ecuaciones Básicas de la Mecánica de Sólidos</b>	<b>365</b>
A.1.	Elasticidad Lineal . . . . .	365
A.1.1.	Tensor de Tensiones . . . . .	365
A.1.2.	Tensor de Deformación . . . . .	365
A.1.3.	Relación Desplazamiento-Deformación . . . . .	366
A.1.4.	Ley de Hooke Generalizada . . . . .	367
A.1.5.	Elasticidad Bidimensional . . . . .	368

A.2. Problema de Valor de Contorno de un Sólido en Equilibrio . . . . .	371
A.3. Aplicación de la Elasticidad Lineal a Elementos Unidimensionales . . . . .	372
A.3.1. Esfuerzo Normal y Momento Flector . . . . .	372
A.3.2. Energía de Deformación . . . . .	377
<b>B. Almacenamiento en Banda</b>	<b>379</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>381</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>383</b>

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

El estudio de todo fenómeno físico puede realizarse planteando el problema como un Problema de Valor de Contorno Inicial (PVC), en el que se emplean las ecuaciones que caracterizan el estado y comportamiento del fenómeno, que son unas ecuaciones en derivadas parciales, y unas condiciones iniciales y de contorno que caracterizan los límites del problema y su evolución temporal (véase la Figura 1.1). En general, cuando se tratan de resolver estas ecuaciones, la solución analítica (exacta) es complicada y en muchos casos imposible, debido principalmente a la complejidad en la geometría del problema, a los estímulos externos al sistema, y a las condiciones de contorno. En esos casos, la única solución para resolver este tipo de problemas es la resolución numérica (solución aproximada) del Problema de Valor de Contorno Inicial [Norrie and de Vries, 1973]. En la actualidad, los métodos más empleados para este fin son:

- Método de las Diferencias Finitas (MDF).
- Método de los Elementos Finitos (MEF).
- Método de los Elementos de Contorno (MEC).
- Método de los Volúmenes Finitos (MVF).

Sin embargo, de todos ellos, el más difundido y estudiado en la mecánica de sólidos es el Método de los Elementos Finitos (MEF).

La idea básica del método de los elementos finitos consiste en discretizar el dominio del problema en sub-regiones, tal y como se muestra en la Figura 1.2, en las cuales las ecuaciones en derivadas parciales siguen siendo totalmente válidas, y resolverlas empleando una aproximación polinomial.

### 1.1. Algunas Aplicaciones del MEF

El método de los elementos finitos se utiliza en multitud de aplicaciones de la ingeniería, una de ellas, y que es en la que principalmente se centra este libro es el análisis estructural. Se utiliza como herramienta imprescindible para tratar:

- Estructuras que presentan una gran complejidad geométrica.
- Tratamiento con estructuras que presentan una no linealidad geométrica.
- Tratamiento de materiales con comportamiento no lineal (no linealidad constitutiva).

Algunas de las aplicaciones en las que se emplea el MEF son: ingeniería mecánica, ingeniería aeroespacial, ingeniería civil, mecánica de fluidos, biomecánica, diseño óptimo de estructuras, y corrientes marítimas, entre otros.

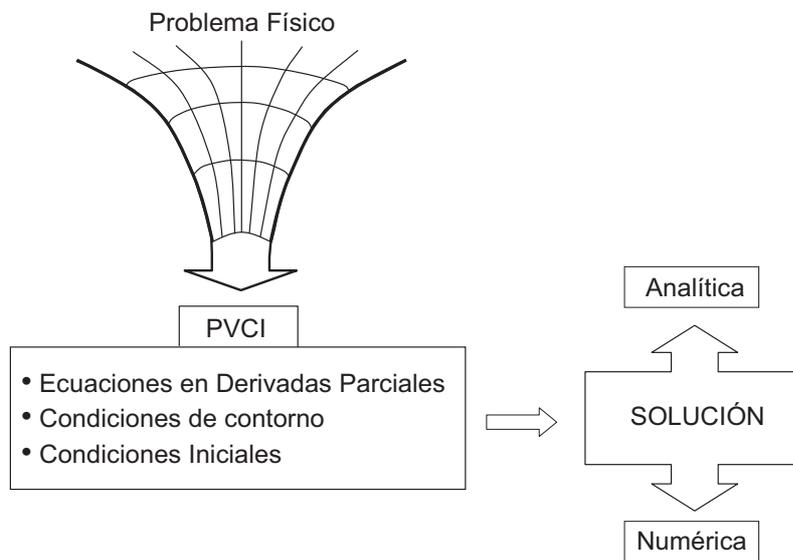


Figura 1.1: Planteamiento del problema físico.

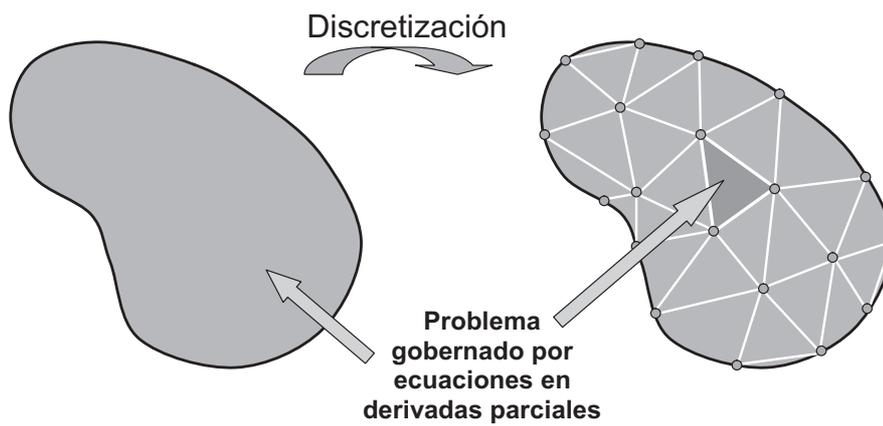


Figura 1.2: Discretización del dominio.

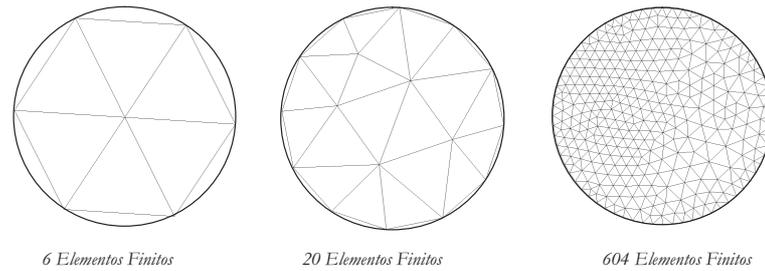


Figura 1.3: Discretización del dominio.

## 1.2. Pasos Básicos de la Obtención del Resultado

Cuando se trabaja con programas basados en la Técnica de los Elementos Finitos hay tres pasos básicos:

- **Preproceso.** En esta fase, el dominio es discretizado en elementos finitos, se eligen las cargas, las condiciones de contorno, y también se establecen las características del material.
- **Solución del Análisis de los Elementos Finitos.** En esta fase se construye la matriz de rigidez de cada elemento y se ensamblan (unen), construyendo así la matriz de rigidez global, se resuelve el sistema de ecuaciones y se imprimen los resultados en ficheros que son utilizados en el post-proceso.
- **Post-proceso.** Se procesan los resultados en forma de imágenes y/o con otras herramientas, ya que la cantidad de información suele ser demasiado grande para manejarla manualmente.

Algunos programas comerciales basados en la Técnica de Elementos Finitos ya traen incorporados sus herramientas propias de Pre y Post-proceso. Otros programas se limitan únicamente a resolver el problema, pudiendo utilizar otros programas comerciales para Pre y Post-Proceso, como por ejemplo, el programa GID (CIMNE-Barcelona).

### 1.2.1. Factores que Influyen en los Resultados del MEF

Una vez definido el problema a analizar, básicamente son dos los factores más importantes que influyen en los resultados:

- Tipo de elemento (aproximación de la función incógnita).
- Número de elementos (discretización).

En este libro se analizan los distintos tipos de elementos que se pueden emplear, y no tanto el número necesario para resolver cada problema de forma adecuada.

Respecto a la discretización del dominio, el número de elementos finitos considerado está directamente correlacionado con la precisión de los resultados. Es importante considerar que el número de elementos finitos también está condicionado por la forma del dominio, es decir, cuanto más complejo sea el dominio a discretizar, más elementos finitos se necesitan para obtener con exactitud la forma del dominio (véase la Figura 1.3).

### 1.3. Programas Comerciales más Difundidos

A continuación se listan algunos de los programas comerciales basados en el Método de los Elementos Finitos más conocidos:

- ABACUS
- ANSYS
- COSMOS
- Dyna-3D
- NASTRAN
- PATRAN
- ALGOR

En los capítulos siguientes se exponen de forma gradual todos los conceptos necesarios para comprender el funcionamiento del Método de los Elementos Finitos (MEF), y su aplicación práctica en el campo de la mecánica de sólidos.

# Herramientas Matemáticas con MATLAB

## 2.1. Revisión de Álgebra Matricial

En esta sección se hace un repaso de las operaciones básicas con matrices y su implementación en MATLAB.

### 2.1.1. Notación Matricial

Sea  $\mathbb{R}^{m \times n}$  el espacio vectorial de las matrices reales de dimensión  $m \times n$ , de forma que:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde la matriz anterior se denota como  $\mathbf{A} = (a_{ij}), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  o simplemente como  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ .

A continuación se muestra cómo definir una matriz numérica de dimensión  $3 \times 4$  con MATLAB. Esta matriz se almacena en la variable numérica A:

```
>> A = [1 2 3 4; 1 2 2 1; 1 0 0 5]

A =

     1     2     3     4
     1     2     2     1
     1     0     0     5

>> [m n]=size(A) %tamaño de la matriz

m =

     3

n =

     4
```

Las filas de la matriz se pueden separar con “;” o *enter*. Los elementos de cada fila se separan por uno (o más) espacios en blanco. Se utiliza el comando “%” para colocar comentarios en el código del programa.

Si se coloca “;” al final de la instrucción de MATLAB entonces no se muestra el resultado de la misma:

```
>> A = [1 2 3 4; 1 2 2 1; 1 0 0 5];
```

A continuación se muestra cómo acceder a los elementos, filas y columnas de una matriz, con MATLAB. Se utiliza “:” para acceder a todas las filas (o columnas) de la matriz:

```
>> A(2,3)
% elemento de la segunda fila y tercera columna en A

ans =

     2

>> A(3,:) % tercera fila de A

ans =

     1     0     0     5

>> A(:,1) % primera columna de A

ans =

     1
     1
     1
```

A continuación se muestra cómo acceder a una submatriz de una matriz dada:

```
>> A([2,3],:)
%submatriz de A formada por las filas 2 y 3

ans =

     1     2     2     1
     1     0     0     5

>> A(:, [2,3,4])
%submatriz de A formada por las columnas 2, 3 y 4

ans =

     2     3     4
     2     2     1
```

```
    0    0    5

>> A([1,2],[1,2])
%submatriz de A formada por filas y columnas 1 y 2

ans =

    1    2
    1    2

>> A(2:3,2:4)
%submatriz de A formada por filas (2 a 3) y columnas (2 a 4)

ans =

    2    2    1
    0    0    5
```

Las matrices formadas por una sola fila o columna se denominan vectores fila y columna, respectivamente. Las filas y columnas de una matriz se pueden completar utilizando vectores fila y columna:

```
>> b=[1;1;0] %vector columna

b =

    1
    1
    0

>> b(3)% tercer elemento del vector

ans =

    0

>> [A b] % completamos columnas

ans =

    1    2    3    4    1
    1    2    2    1    1
    1    0    0    5    0

>> b=[1,0,2,1] %vector fila

b =
```

```

    1    0    2    1

>> b(3)% tercer elemento del vector

ans =

    2

>> [A;b] % completamos filas

ans =

    1    2    3    4
    1    2    2    1
    1    0    0    5
    1    0    2    1

```

Se dice que una matriz  $\mathbf{A}$  es cuadrada si tiene el mismo número de filas que de columnas. Una matriz cuadrada en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  se dice que es de orden  $n$ .

Para obtener la diagonal (o diagonal principal) de  $\mathbf{A}$  se puede utilizar el comando de MATLAB “diag”. Este comando se puede utilizar para construir matrices diagonales, basta con pasarle como argumento el vector fila cuyas componentes son los elementos de la diagonal:

```

>> A=[1 1 3;1 0 2;2 0 5]

A =

    1    1    3
    1    0    2
    2    0    5

>> diag(A) %diagonal de la matriz A

ans =

    1
    0
    5

>> diag([1 2 1]) %matriz diagonal de orden 3

ans =

    1    0    0
    0    2    0
    0    0    1

```

Para obtener más información sobre el comando “diag” se puede utilizar el comando de

MATLAB “help”:

```
>> help diag
```

### 2.1.2. Suma y Resta de Matrices

Dadas dos matrices  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}^{m \times n}$  se definen las matrices suma y resta de dichas matrices como  $C = (c_{ij})$  y  $D = (d_{ij})$ , respectivamente, de dimensión  $m \times n$ :

$$\begin{aligned} C &= A + B & ; & & c_{ij} &= a_{ij} + b_{ij}, \\ D &= A - B & ; & & d_{ij} &= a_{ij} - b_{ij}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La suma de matrices con tamaños diferentes no está definida. A continuación se muestra cómo sumar y restar matrices de la misma dimensión con MATLAB, para ello se utilizan los operadores “+” y “-”:

```
>> A = [1 2 3 4; 1 2 2 1; 1 0 0 5];
>> B = [1 0 3 1; 1 1 0 1; 1 5 2 0];
>> C=A+B % suma de las matrices A y B
```

C =

```

     2     2     6     5
     2     3     2     2
     2     5     2     5
```

```
>> D=A-B % resta de las matrices A y B
```

D=

```

     0     2     0     3
     0     1     2     0
     0    -5    -2     5
```

### 2.1.3. Producto de una Matriz por un Escalar $\lambda$

Dada una matriz  $A$  en  $\mathbb{R}^{m \times n}$  y un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , el producto de ambos viene representado por una nueva matriz  $C = (c_{ij})$  de dimensión  $m \times n$  dada por:

$$C = \lambda B; \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}. \quad (2.3)$$

A continuación se muestra cómo multiplicar un escalar por una matriz con MATLAB, para ello se utiliza el operador “\*”:

```
>> A = [1 2 3 4; 1 2 2 1; 1 0 0 5];
>> C=2*A % producto de 2 por la matriz A
```

C =

2	4	6	8
2	4	4	2
2	0	0	10

#### 2.1.4. Producto de Matrices

Dadas dos matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  se define la matriz producto de ambas como una nueva matriz  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  de dimensión  $m \times n$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}; \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}. \quad (2.4)$$

Para que la multiplicación sea posible, el número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda. Se puede demostrar que el producto de matrices no es conmutativo, en general  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ .

A continuación se muestra cómo multiplicar dos matrices con MATLAB, para ello se utiliza el operador “\*”:

```
>> A = [1 2 3 4; 1 2 2 1; 1 0 0 5];
B = [1 0 3 1; 1 1 0 1; 1 5 2 0; 1 1 1 0];
>> C=A*B % producto de las matrices A y B

C =

    10    21    13     3
     6    13     8     3
     6     5     8     1
```

Para calcular una potencia entera de una matriz cuadrada se puede utilizar el operador “\*” o el operador “^”:

```
>> A=[1 2; 3 0];
>> A*A

ans =

     7     2
     3     6

>> A^2

ans =

     7     2
     3     6
```

### 2.1.5. Transpuesta de una Matriz

Considérese una matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , se define la matriz transpuesta de  $\mathbf{A}$  como la matriz en  $\mathbb{R}^{n \times m}$  dada por:

$$\mathbf{A}^T = (a_{ji}). \quad (2.5)$$

Es decir, se escriben las filas de  $\mathbf{A}$  como columnas. A este respecto, se cumplen las siguientes propiedades:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ ,  $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$ ,  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$  y  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ . Se dice que una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es simétrica si  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , y antisimétrica si  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ .

A continuación se muestra cómo calcular la transpuesta de una matriz con MATLAB, para ello se utiliza el operador “'” o la función de MATLAB “transpose”:

```
>> A = [1 2 3 4; 1 2 2 1; 1 0 0 5];
>> A' %transpuesta de la matriz A
```

```
ans =
```

```
1     1     1
2     2     0
3     2     0
4     1     5
```

### 2.1.6. Casos Particulares de Matrices

A continuación se muestran casos particulares de matrices y su definición con MATLAB:

- La matriz cuyos elementos son todos unos y que se obtiene en MATLAB con la función “ones”:

```
>> A=ones(3)
```

```
A =
```

```
1     1     1
1     1     1
1     1     1
```

```
>> ones(2,3)
```

```
ans =
```

```
1     1     1
1     1     1
```

- La matriz cuadrada cuyos elementos son todos ceros y que se obtiene en MATLAB con la función “zeros”:

```
>> A=zeros(2)
```

```
A =
     0     0
     0     0
>> zeros(2,3)

ans =
     0     0     0
     0     0     0
```

- La matriz  $I$  cuyos elementos son todos ceros salvo los de la diagonal principal que son unos ( $I$  se llama matriz identidad) y que se obtiene en MATLAB con la función “eye”:

```
>> I=eye(4)

I =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

La matriz identidad de dimensión  $n \times n$  cumple  $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$  para toda matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- En MATLAB se pueden crear matrices de números aleatorios, entre 0 y 1, utilizando la función “rand”:

```
>> A=rand(2,3)

A =
     0.9501     0.6068     0.8913
     0.2311     0.4860     0.7621
```

### 2.1.7. Determinante de una Matriz

El determinante de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es un escalar y se denotará como  $\det(\mathbf{A})$  o  $|\mathbf{A}|$ . Se dice que una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es singular si su determinante vale cero. En el caso de una matriz cuadrada de orden 3, el determinante es:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

A continuación se muestra cómo calcular el determinante de una matriz con MATLAB, para ello se utiliza la función de MATLAB “det”:

```
>> A = [1 2 3; 1 2 2; 1 0 0];
>> det(A) %determinante de la matriz A

ans =

    -2
```

A continuación se exponen algunas propiedades de los determinantes:

1. El determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales,  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ .
2. Si una matriz posee una fila (o columna) de ceros, el determinante vale cero.
3. Si una matriz posee dos filas (o columnas) iguales, el determinante vale cero.
4. Si los vectores fila (o columna) de una matriz son linealmente independientes el determinante es distinto de cero.
5. El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes,  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ .
6. Si se intercambian dos filas (o dos columnas) de la matriz  $\mathbf{A}$ , la nueva matriz  $\mathbf{B}$  cumple  $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$ .
7. Si se suma un múltiplo de una fila (columna) de la matriz  $\mathbf{A}$  a otra fila (columna), la nueva matriz  $\mathbf{B}$  cumple  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$ .
8. Si se multiplica una fila (o una columna) de la matriz  $\mathbf{A}$  por un escalar  $k$ , cuyo resultado es la matriz  $\mathbf{B}$ , se cumple que  $|\mathbf{B}| = k|\mathbf{A}|$ .

### 2.1.8. Rango de una Matriz

Se define el rango de una matriz  $\mathbf{A}$  como el número máximo de vectores fila (o columna) de la matriz que son linealmente independientes.

A continuación se muestra cómo calcular el rango de una matriz con MATLAB, para ello se utiliza la función de MATLAB “rank”:

```
>> A = [1 2 3; 1 2 2; 1 0 0];
>> det(A)

ans =

    -2

>> rank(A) %rango de la matriz A

ans =

     3
```

```
>> B=[1 1 1;2 2 2; 1 0 1];
>> det(B)

ans =

    0

>> rank(B)

ans =

    2
```

### 2.1.9. Inversa de una Matriz

Dada una matriz  $\mathbf{A}$  no-singular ( $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ), se define su inversa como una matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (2.7)$$

Nótese que se cumple que  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$  pues  $(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ .

A continuación se muestra cómo calcular la inversa de una matriz con MATLAB, para ello se utiliza la función de MATLAB “inv”:

```
>> A = [1 2 3; 1 2 2; 1 0 0];
>> inv(A)%inversa de la matriz A

ans =

    0    0    1.0000
 -1.0000    1.5000   -0.5000
    1.0000   -1.0000    0

>> A*inv(A)

ans =

    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1

>> A^(-1)

ans =

    0    0    1.0000
 -1.0000    1.5000   -0.5000
```

```
1.0000   -1.0000         0
```

### 2.1.10. Ejemplos de Programación en MATLAB con Matrices

Hasta ahora hemos introducido el código MATLAB directamente en la línea de comandos de MATLAB. Sin embargo, si el número de sentencias es elevado se aconseja escribir el código en un archivo de texto con la extensión `*.m`, éstos se denominan, dependiendo de su estructura, archivos de instrucciones (“scripts”) o funciones:

**Ejemplo computacional 2.1 (Obtención de la diagonal principal).** Crear un programa en MATLAB tal que dada una matriz  $A$  cuadrada de dimensión  $n$  devuelva una nueva matriz  $B$  cuyos elementos son los elementos de  $A$  salvo los de la diagonal principal que son ceros.

#### Solución 1:

Se crea un archivo de instrucciones llamado `ejemplo1.m`, en este archivo se inserta el siguiente código:

```
A=[1 2 3; 4 5 6;1 1 3];
[m n]=size(A);
if ~(m==n)
    error('la matriz no es cuadrada')
end
for i=1:m
    for j=1:n
        if i~=j
            B(i,j)=A(i,j);
        else
            B(i,j)=0;
        end
    end
end
end
B
```

Desde la línea de comandos de MATLAB se ejecuta:

```
>> ejemplo1

B =

     0     2     3
     4     0     6
     1     1     0
```

#### Solución 2:

Se crea un archivo de funciones llamado **ejemplo2.m**, en este archivo se escribe el siguiente código:

```
function B=ejemplo2(A)
    [m n]=size(A);
    if ~(m==n)
        error('la matriz no es cuadrada')
    end
    B=zeros(m);
    for i=1:m
        for j=1:n
            if i~=j
                B(i,j)=A(i,j);
            end
        end
    end
end
```

Desde la línea de comandos de MATLAB se ejecuta:

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6;1 1 3];
>> ejemplo2(A)

ans =

     0     2     3
     4     0     6
     1     1     0
```

En este ejercicio hemos utilizado los comandos “if” y “for” de MATLAB para controlar el flujo del código. ■

**Ejemplo computacional 2.2 (Cálculo de la traza).** Construir un programa en MATLAB tal que calcule la traza (la suma de los elementos de la diagonal principal) de una matriz  $A$  cuadrada de dimensión  $n$ .

**Solución:**

Se crea un archivo de función llamado **ejemplo3.m**, en este archivo se escribe el siguiente código:

```
function sum=ejemplo3(A)
    [m n]=size(A);
    if ~(m==n)
        error('la matriz no es cuadrada')
    end
    sum=0;
    for i=1:m
        for j=1:n
            if i==j
```

```

                sum=sum+A(i,j);
            end
        end
    end
end

```

Desde la línea de comandos de MATLAB se ejecuta:

```

>> A=[1 2 3; 4 5 6;1 1 3];
>> ejemplo3(A)

ans =

     9

```

**Ejemplo computacional 2.3 (Cálculo de la norma Euclídea).** Construir un programa en MATLAB que calcule la norma

$$\|v\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2}$$

de un vector  $v$ .

**Solución:**

Se crea un archivo de función llamado **ejemplo4.m**, en este archivo se escribe el siguiente código:

```

function norm=ejemplo4(v)
    n=length(v);
    sum=0;
    k=1;
    while k<=n
        sum=sum+v(k)^2;
        k=k+1;
    end
    norm=sum^(1/2);

```

Desde la línea de comandos de MATLAB se ejecuta:

```

>> v=[1 2 1];
>> ejemplo4(v)

ans =

     2.4495

```

En este ejercicio se ha utilizado el comando “**while**” de MATLAB para controlar el flujo del programa.



**Ejemplo computacional 2.4 (Cálculo de las normas  $p$ ).** Construir un programa en MATLAB que calcule la norma  $p$  dada por la expresión:

$$\|A\|_p = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p},$$

donde  $A$  es una matriz cuadrada.

**Solución:**

Se crea un archivo de función llamado **ejemplo5.m**, en este archivo se escribe el siguiente código:

```
function norm=ejemplo5(A,p)
    [m n]=size(A);
    if ~(m==n)
        error('la matriz no es cuadrada')
    end
    sum=0;
    for i=1:m
        for j=1:n
            sum=sum+abs(A(i,j))^p;
        end
    end
    norm=sum^(1/p);
```

Desde la línea de comandos de MATLAB se ejecuta:

```
>> A=[1 2; 3 4];
>> ejemplo5(A,2)

ans =

    5.4772
```



**Ejemplo computacional 2.5 (Suma de matrices cuadradas).** Construir un programa en MATLAB que dadas dos matrices cuadradas calcule su suma. Controlar que las matrices dadas tengan la misma dimensión.

**Solución:**

Se crea un archivo de función llamado **ejemplo6.m**, en este archivo se escribe el siguiente código:

```
function C=ejemplo6(A,B)
    [m1,n1]=size(A);
    [m2,n2]=size(B);
    if (m1~=m2)|(n1~=n2)
        error('error en las dimensiones de las matrices')
    end
    for i=1:m
        for j=1:n
            C(i,j)=A(i,j)+B(i,j);
        end
    end
end
```

Desde la línea de comandos de MATLAB se ejecuta:

```
>> A=[1 2 3;4 1 2]; B=[1 1 1;2 3 0];
>> ejemplo6(A,B)

ans =

     2     3     4
     6     4     2

>> A=[1 2 3;4 1 2]; B=[1 1 1 3;2 3 0 4];
>> ejemplo6(A,B)
??? Error using ==> ejemplo6
error en las dimensiones de las
matrices
```

■

**Ejemplo computacional 2.6 (Producto de matrices).** Construir un programa en MATLAB que dadas dos matrices calcule su producto. Controlar las dimensiones de las matrices en el procedimiento.

**Solución:**

Se crea un archivo de función llamado **ejemplo7.m**, en este archivo se coloca el siguiente código:

```
function C=ejemplo7(A,B)
    [m,n]=size(A);
    [r,s]=size(B);
    if (n~=r)
        error('error en las dimensiones')
    end
    C=zeros(m,s);
    for i=1:m
        for j=1:s
            C(i,j)=A(i,:)*B(:,j);
        end
    end
end
```

```

        end
    end

```

Desde la línea de comandos de MATLAB se ejecuta:

```

>> A=[1 2 3;4 5 1]; B=[1 2; 1 1; 3 4];
>> ejemplo7(A,B)

ans =

    12    16
    12    17

>> A*B

ans =

    12    16
    12    17

```



**Ejemplo computacional 2.7 (Producto matriz-vector).** Construir un programa en MATLAB que dados una matriz cuadrada triangular superior y un vector columna, calcule su producto. Controlar las dimensiones.

**Solución:**

Se crea un archivo de función llamado **ejemplo8.m**, en este archivo se escribe el siguiente código:

```

function w=ejemplo8(A,v)
    n=size(A,1);
    r=size(v,1);
    w=zeros(n,1);
    if (r~=n)
        error('error en las dimensiones')
    end
    for i=1:n
        w(i)=A(i,i:n)*v(i:n);
    end

```

Desde la línea de comandos de MATLAB se ejecuta:

```

>> A=[1 2 3; 0 1 2; 0 0 4]

A =

```

```
1 2 3
0 1 2
0 0 4

>> v=[1;1 ;1]

v =

1
1
1

>> A*v

ans =

6
3
4

>> ejemplo8(A,v)

ans =

6
3
4
```

**Ejemplo computacional 2.8 (Producto de matrices triangulares).** Construir un programa en MATLAB que dadas dos matrices cuadradas triangulares superiores, calcule su producto. Controlar las dimensiones de las matrices.

**Solución:**

Se crea un archivo de función llamado **ejemplo9.m**, en este archivo se inserta el siguiente código:

```
function C=ejemplo8(A,B)
n=size(A,1);
r=size(B,1);
if (r~=n)
    error('error en las dimensiones')
end
C=zeros(n);
for i=1:n
    for j=i:n
        C(i,j)=A(i,i:j)*B(i:j,j);
    end
end
```

```
end
```

Desde la línea de comandos de MATLAB se ejecuta:

```
>> A=[1 2;0 3]; B=[1 1;0 1]
```

```
B =
```

```
    1    1
    0    1
```

```
>> A*B
```

```
ans =
```

```
    1    3
    0    3
```

```
>> ejemplo9(A,B)
```

```
ans =
```

```
    1    3
    0    3
```

## 2.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Considérese un sistema de  $n$  ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las incógnitas.

Este sistema se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2.9)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

son la matriz de coeficientes, el vector solución y el vector de términos independientes, respectivamente.

En esta sección se aborda el estudio de los métodos directos e iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones como los anteriormente mencionados. Como métodos directos, que nos dan la solución exacta del problema (salvo, errores debidos al redondeo), se muestran el método de Gauss y un par de variantes suyas (factorización LU y método de Cholesky), y el algoritmo de ortogonalización. En cuanto a los iterativos, que nos dan la solución como límite de una sucesión de vectores, se introducirán el método de Gauss-Seidel y el de Jacobi.

### 2.2.1. Métodos Directos de Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

A continuación se muestra cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales con MATLAB utilizando el algoritmo de Gauss. La solución del sistema puede obtenerse mediante la operación  $\mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$ . Esta operación se lleva a cabo mediante el método de Gauss con estrategia de pivoteo parcial. En ningún caso se realiza calculando la inversa de  $\mathbf{A}$ , pues el cálculo de la inversa de una matriz es más costoso desde el punto de vista computacional, y puede generar mayores errores de redondeo.

Por ejemplo, la resolución de un sistema de ecuaciones compatible determinado (véase la Figura 2.1) se hace de la siguiente manera:

```
>> A=[3 2; -1 2]; b=[18;2];
>> det(A)

ans =

     8

>> rank(A)

ans =

     2

>> sol=A\b

sol =

     4
     3

>> A*sol

ans =

    18
     2
```

Para el caso de un sistema de ecuaciones incompatible (véase la Figura 2.2):

```
>> A=[-1/2 1; -1/2 1]; b=[1;1/2];
>> det(A)
```

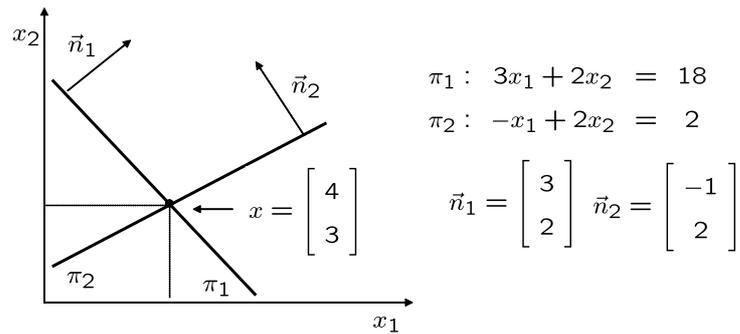


Figura 2.1: Ejemplo de sistema compatible determinado.

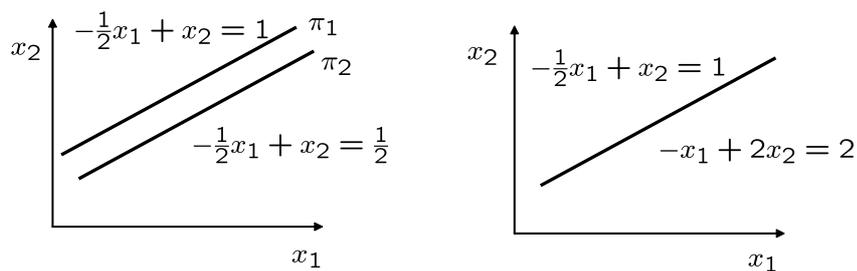


Figura 2.2: Ejemplo de sistema incompatible y compatible indeterminado.

```

ans =
    0

>> rank(A)

ans =
    1

>> rank([A b])

ans =
    2

>> A\b
Warning: Matrix is singular to working precision.

ans =

    Inf
    Inf

```

Y por último, para el caso de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado (véase la

Figura 2.2):

```
>> A=[-1/2 1;-1 2];b=[1;2];
>> det(A)

ans =

     0

>> A\b
Warning: Matrix is singular to working precision.

ans =

     NaN
     NaN

>> rank(A)

ans =

     1

>> rank([A b])

ans =

     1
```

### 2.2.1.1. Sistemas Triangulares

Los métodos que se estudian en las siguientes secciones transforman el sistema de ecuaciones inicial en otro equivalente cuya matriz de coeficientes es triangular. De esta manera, para resolver un sistema triangular superior se utiliza el método de sustitución hacia atrás y para resolver un sistema con matriz triangular inferior se utiliza el método de sustitución hacia adelante.

Considérese el siguiente sistema triangular inferior  $\mathbf{Lx} = \mathbf{b}$ :

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Si  $l_{11}l_{22} \neq 0$ , se pueden calcular  $x_1, x_2$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1/l_{11} \\ x_2 &= (b_2 - l_{21}x_1)/l_{22}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

El procedimiento general de la sustitución hacia adelante es:

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j)/l_{ii}, i = 1, \dots, n$$

El procedimiento análogo para un sistema triangular superior  $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$  se denomina sustitución hacia atrás:

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j)/u_{ii}, i = 1, \dots, n.$$

### 2.2.1.2. Método de Eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss es posiblemente el método de resolución de sistemas de ecuaciones más popular, y comprende dos fases: una primera fase de eliminación hacia delante de las incógnitas para reducir el sistema a uno triangular superior y una segunda fase de sustitución hacia atrás para resolver el sistema.

Para explicar el funcionamiento del método se van a realizar los distintos pasos utilizando un ejemplo. Considérese el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{array}{l} (e1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (e2) \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ (e3) \quad x_1 + 5x_2 - x_3 = 2. \end{array} \quad (2.13)$$

Para resolverlo, en primer lugar se elimina  $x_1$  de las ecuaciones (e2) y (e3). Para ello, se le resta a la ecuación (e2) dos veces la ecuación (e1) y a la ecuación (e3) una vez la ecuación (e1). Con lo que se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{array}{l} (e1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (e2) \quad \quad x_2 - x_3 = 3 \\ (e3) \quad \quad 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{array} \quad (2.14)$$

El siguiente paso consiste en eliminar  $x_2$  de la ecuación (e3). Para ello, se le resta a la ecuación (e3) cuatro veces la ecuación (e2). Se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{array}{l} (e1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (e2) \quad \quad x_2 - x_3 = 3 \\ (e3) \quad \quad \quad 2x_3 = -11 \end{array} \quad (2.15)$$

Una vez concluida la eliminación de incógnitas se obtiene un sistema triangular superior. Para resolverlo basta con sustituir hacia atrás, es decir, de la ecuación (e3) se obtiene  $x_3 = -11/2$ , sustituyendo este valor en (e2) se obtiene  $x_2 = 3 - 11/2 = -5/2$  y finalmente sustituyendo este valor en (e1) se calcula  $x_1 = 1 + 5/2 + 11/2 = 9$ .

La solución del sistema anterior con MATLAB, utilizando pivotaje parcial, es:

```
>> A=[1 1 1;2 3 1;1 5 -1]; b=[1 ; 5 ; 2];
>> sol=A\b

sol =

    9.0000
   -2.5000
   -5.5000
>> A*sol

ans =
```

1  
5  
2

Esta transformación del sistema inicial en sistemas equivalentes se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}, k = 1, \dots, n, \quad (2.16)$$

donde el sistema  $k$ -ésimo es de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}^k x_1 + a_{12}^k x_2 + \dots + a_{1k}^k x_k + \dots + a_{1j}^k x_j + \dots + a_{1n}^k x_n &= b_1^k \\ a_{22}^k x_2 + \dots + a_{2k}^k x_k + \dots + a_{2j}^k x_j + \dots + a_{2n}^k x_n &= b_2^k \\ &\vdots \\ a_{kk}^k x_k + \dots + a_{kj}^k x_j + \dots + a_{kn}^k x_n &= b_k^k \\ &\vdots \\ a_{ik}^k x_k + \dots + a_{ij}^k x_j + \dots + a_{in}^k x_n &= b_i^k \\ &\vdots \\ a_{nk}^k x_k + \dots + a_{nj}^k x_j + \dots + a_{nn}^k x_n &= b_n^k. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nótese que la incógnita  $x_1$  sólo aparece en la primera ecuación, la  $x_2$  en las dos primeras y así hasta la  $x_{k-1}$  que aparece en las  $k-1$  primeras. Ahora se ha de eliminar  $x_k$  de las ecuaciones por debajo de la  $k$ -ésima. Para ello, se le resta a la ecuación  $i$ -ésima para  $i = k+1, \dots, n$ ,  $l_{ik}$  veces la  $k$ -ésima, siendo  $l_{ik} = \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$ . De esta forma se consigue que, en el nuevo sistema con índice  $k+1$ , la incógnita  $x_k$  tenga coeficiente nulo en la ecuación  $i$ -ésima. El número  $a_{kk}^k$  se llama pivote de la eliminación de  $x_k$  y la fila a la que pertenece se le llama fila pivote. En el ejemplo anterior, para eliminar  $x_1$  se ha considerado  $l_{21} = 2$  y  $l_{31} = 1$ , y para eliminar  $x_2$  se ha utilizado  $l_{32} = 4$ .

### 2.2.1.3. Problemas del Método de Gauss

Un aspecto importante en el desarrollo de técnicas numéricas para la resolución de sistemas de ecuaciones es el estudio de la eficiencia en términos de velocidad de cálculo y posibilidad de errores de redondeo.

A este respecto, el número de flops (operaciones de punto flotante) que realiza el método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones de dimensión  $n$  es de  $\frac{n^3}{3} + o(n^2)$ . Por lo tanto, cuando el sistema aumenta de tamaño el número de operaciones y, por lo tanto, el tiempo de resolución aumenta considerablemente.

Si ahora se diferencia entre la etapa de eliminación, y la de sustitución, la parte más costosa en términos de número de operaciones es la de eliminación, y todo esfuerzo orientado a aumentar la eficiencia del método ha de centrarse primordialmente en la parte de eliminación.

Respecto a los errores de redondeo, el método de Gauss tiene los siguientes condicionantes:

1. Si el elemento pivote en alguna de las etapas del proceso de eliminación es cero, se produce una división por cero.
2. Conforme aumenta el tamaño del sistema ( $n > 100$ ) aumentan los errores de redondeo debido al gran incremento de operaciones que hay que realizar.

Para resolver o mitigar estos problemas, se emplean las siguientes estrategias:

1. El uso de doble precisión en los cálculos.
2. En caso de que el pivote en alguna de las etapas del proceso de eliminación sea cero, se pueden intercambiar filas.
3. Uno de los problemas de redondeo más comunes en la técnica de Gauss es que el elemento pivote sea cero, o cercano a cero. En este caso es ventajoso determinar el coeficiente más grande en valor absoluto disponible debajo de la columna pivote, e intercambiar filas para que este elemento sea el pivote. Esta técnica se conoce con el nombre de **pivoteo parcial**. Si además de buscar elemento más grande en valor absoluto por filas, se hace también por columnas, la técnica se conoce con el nombre de **pivoteo total**. Sin embargo el pivoteo total no se utiliza generalmente porque introduce una gran complejidad en el algoritmo de cálculo.
4. Si antes de realizar el pivoteo, normalizo los elementos de la fila correspondiente por el elemento máximo en valor absoluto de la fila pivote, se reducen los errores de redondeo. Esta técnica se conoce con el nombre de **escalamiento**. Sin embargo, un problema añadido del escalamiento es que puede introducir errores de redondeo por si mismo, por lo que es habitual hacer un **escalamiento simulado** de la fila pivote, es decir, que con el valor del pivote temporal obtenido con escalado, realizo el pivoteo parcial, y si tengo que intercambiar filas lo hago con la fila original de antes del escalado.

A continuación se explica el pseudocódigo para implementar en MATLAB el método de Gauss con pivotaje parcialmente escalado:

#### Algoritmo 2.1 (Descomposición de Gauss).

**Entrada:** Matriz de coeficientes  $a(n, n)$ , y vector de términos independientes  $b(n)$ .

**Paso 1:** Almacenar en un vector  $s(n)$  los valores máximos de cada fila (ecuación).

**Paso 2:** Para  $k = 1, \dots, n - 1$  realizar los pasos 3-8.

**Paso 3:** Para  $j = k, \dots, n$ . Determinar en la columna  $k$ , el mayor valor del cociente  $a(j, k)/s(j)$ . Si el cociente es menor que una tolerancia prefijada, el sistema es singular o está mal condicionado, el procedimiento termina.

**Paso 4:** Si  $k$  distinto de  $j$ , se intercambian las filas de cara al proceso de eliminación.

**Paso 5:** Para  $i = k + 1, \dots, n$  repetir los pasos 6-8.

**Paso 6:** Calcular el coeficiente para pivotar  $m = a(i, k)/a(k, k)$ .

**Paso 7:** Para  $j = k + 1, \dots, n$ ,  $a(i, j) = a(i, j) - m * a(k, j)$ .

**Paso 8:**  $b(i) = b(i) - m * b(k)$ .

**Paso 9:** Si  $a(n, n) = 0$ , no existe solución única. El procedimiento termina.

**Paso 10:** De  $i = n - 1, \dots, 1$  realizar el procedimiento de sustitución hacia atrás,  $x(n) = b(n)/a(n, n)$  repitiendo los pasos 11 y 12.

**Paso 11:** De  $j = i + 1, n$ ,  $b(i) = b(i) - a(i, j) * x(j)$ .

**Paso 12:**  $x(i) = b(i)/a(i, i)$ . Obtención de la solución  $x$ .

■

### 2.2.1.4. Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan es una variación del método de Gauss. La principal diferencia es que en este método cada vez que se realiza el paso de eliminación, se hace con todas las ecuaciones, no sólo con las de debajo de la fila pivote. Además, ésta también se normaliza. El resultado es una matriz unidad, en vez de una matriz triangular superior.

De esta manera, la solución del sistema queda directamente almacenada en el vector  $\mathbf{b}$  transformado. Todo lo relativo a mejoras computacionales es análogo al método de Gauss. La principal deficiencia de este método con respecto al de Gauss es que requiere aproximadamente un 50 % más de operaciones, por lo que se prefiere el de Gauss como método de eliminación.

Los dos métodos que se han visto hasta ahora están encuadrados dentro los llamados métodos de eliminación. A continuación, se describen una serie de técnicas que se llaman de descomposición.

### 2.2.1.5. Factorización LU

La descomposición LU es un método que se ayuda de las técnicas de eliminación para transformar la matriz  $\mathbf{A}$  en el producto de dos matrices triangulares. Esto es especialmente útil para la resolución de sistemas con diferentes vectores  $\mathbf{b}$ , ya que la descomposición de  $\mathbf{A}$  sirve para evaluar de forma eficiente por sustitución hacia delante y hacia atrás todos los sistemas de ecuaciones.

La descomposición LU está muy relacionada con el método de Gauss, ya que en éste último el objetivo era transformar el sistema en uno triangular superior, que es uno de los objetivos de la descomposición LU. Por tanto, sólo queda saber de donde se obtiene la matriz triangular inferior.

Paradójicamente, durante el proceso de eliminación de Gauss se obtiene la matriz  $\mathbf{L}$ , pero pasa desapercibida y no se utiliza. Si se observa detalladamente el proceso de pivoteo, se multiplica la fila pivote por un factor, y posteriormente ésta se resta a la fila que se desea transformar. Ese factor, una vez usado, no se vuelve a emplear. Pues bien, reorganizando convenientemente esos factores, se obtiene la matriz  $\mathbf{L}$ .

Volviendo al método de eliminación de Gauss, para  $k = 1, \dots, n$ , se construye la siguiente matriz:

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -l_{k+1,k} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -l_{k+2,k} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -l_{n,k} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

esta matriz sólo difiere de la matriz unidad en la  $k$ -ésima columna. Se puede comprobar que la matriz  $\mathbf{M}^{(k)}$  cumple que:

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{b}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)} \quad (2.19)$$

es decir, cada sistema  $\mathbf{A}^{(k+1)} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k+1)}$  puede obtenerse del precedente  $\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$  multiplicando éste por  $\mathbf{M}^{(k)}$ .

En el ejemplo anterior, se tiene:

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{M}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

**Teorema 2.1 (Factorización LU).** Dado el sistema 2.8, supóngase que se puede llevar a cabo la eliminación de Gauss que se ha descrito en la sección anterior. Si  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{c}$  es el sistema triangular superior resultante de eliminar las incógnitas y  $\mathbf{L}$  es la matriz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

entonces  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{Lc}$ .

**Demostración.** Según lo que se ha visto antes

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^n = \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{M}^{n-2}\mathbf{A}^{n-2} = \cdots = \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{M}^{n-2} \cdots \mathbf{M}^1\mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}^n = \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{b}^{n-1} = \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{M}^{n-2}\mathbf{b}^{n-2} = \cdots = \mathbf{M}^{n-1}\mathbf{M}^{n-2} \cdots \mathbf{M}^1\mathbf{b}$$

entonces basta con probar que:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{M}^{n-1}\mathbf{M}^{n-2} \cdots \mathbf{M}^1]^{-1} = [\mathbf{M}^1]^{-1} \cdots [\mathbf{M}^{n-2}]^{-1}[\mathbf{M}^{n-1}]^{-1}.$$

Se puede comprobar fácilmente que

$$[\mathbf{M}^k]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{k+1,k} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{k+2,k} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{n,k} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

con lo que queda demostrado el teorema. ■

Supóngase que  $\mathbf{A}$  es una matriz no singular que puede escribirse como  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$  donde  $\mathbf{L}$  es una matriz triangular inferior y  $\mathbf{U}$  es una matriz triangular superior. Si se utiliza esta factorización es muy sencillo resolver el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . El sistema anterior se puede escribir como  $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$  y considerando  $\mathbf{c} = \mathbf{Ux}$ , primero resolvemos  $\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$  para hallar  $\mathbf{c}$  y luego se resuelve  $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$  para obtener la solución  $\mathbf{x}$ . Con la factorización  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$  se ha pasado de tener que resolver un sistema, a tener que resolver dos, pero con la ventaja de que ambos tienen una matriz de coeficientes triangular. El sistema cuya matriz de coeficientes es triangular superior se resuelve por sustitución hacia atrás, mientras que el sistema cuya matriz de coeficientes es triangular inferior se resuelve por sustitución hacia adelante.

En el ejemplo anterior se obtienen las matrices:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

que si se operan con MATLAB, se obtiene:

```
>> A=[1 1 1;2 3 1;1 5 -1]

A =

     1     1     1
     2     3     1
     1     5    -1

>> L=[1 0 0;2 1 0;1 4 1];U=[1 1 1; 0 1 -1; 0 0 2];
>> L*U

ans =

     1     1     1
     2     3     1
     1     5    -1
```

A continuación se muestra cómo calcular la factorización  $\mathbf{LU}$  de una matriz con MATLAB. El comando “[L,U]=lu(A)” de MATLAB calcula la descomposición  $\mathbf{LU}$  de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  siguiendo el método de Gauss con estrategia de pivote parcial, por lo cual, aunque  $\mathbf{U}$  es triangular superior,  $\mathbf{L}$  en la mayoría de los casos no es triangular inferior

```
>> [L,U]=lu(A)

L =

     0.5000    -0.1429     1.0000
     1.0000         0         0
     0.5000     1.0000         0

U =

     2.0000     3.0000     1.0000
         0     3.5000    -1.5000
         0         0     0.2857

>> L*U

ans =
```

```

1     1     1
2     3     1
1     5    -1

```

Sin embargo, introduciendo la orden  $[L,U,P]=lu(A)$ , es posible conocer los intercambios de filas, debidos al pivoteo parcial que ha sufrido la matriz. En este caso  $L$  sí es triangular inferior con unos en la diagonal y  $P$  es la matriz de permutación que nos da los intercambios de las filas.

```

>> [L,U,P]=lu(A)

L =

    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
    0.5000   -0.1429    1.0000

U =

    2.0000    3.0000    1.0000
         0    3.5000   -1.5000
         0         0    0.2857

P =

     0     1     0
     0     0     1
     1     0     0

>> L*U

ans =

     2     3     1
     1     5    -1
     1     1     1

```

El algoritmo de descomposición LU requiere menos operaciones que el método de Gauss porque no trabaja con el vector  $\mathbf{b}$ ,  $\frac{n^3}{3} + o(n)$ . La fase de sustitución sí que requiere mayor esfuerzo, ya que hay que hacer sustitución hacia adelante y hacia atrás. Por tanto, en el cómputo global el número de operaciones es el mismo que el de Gauss  $\frac{n^3}{3} + o(n^2)$ .

### 2.2.1.6. Inversa de una Matriz

Una de las ventajas de la descomposición LU, es que se puede hacer el cálculo de la inversa de una forma muy sencilla. Para hallar la inversa  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$  de  $\mathbf{A}$ , basta con tener en cuenta que la igualdad  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ , nos dice que la  $j$ -ésima columna  $b_j$  de  $\mathbf{B}$  es la solución del sistema

$Ab_j = e_j$ , donde  $e_j$  es la  $j$ -ésima columna de la matriz identidad  $I$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Lo que se hace es realizar la descomposición LU de la matriz  $\mathbf{A}$ , y resolver  $n$  sistemas (por sustitución hacia delante y hacia atrás) con la misma matriz.

El coste de resolver  $n$  sistemas, teniendo en cuenta que se factoriza una vez y se llama  $n$  veces a cada rutina de sustitución, supone un total de  $(4n^3 - n)/3$  operaciones.

Si se tiene que realizar una operación  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$  y se halla  $\mathbf{A}^{-1}$  por eliminación gaussiana y luego se multiplica la inversa por  $\mathbf{y}$ , se requieren  $(4n^3 - n)/3 + n^2$  operaciones. Sin embargo, si  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$  es la solución del sistema cuya matriz de coeficientes es  $\mathbf{A}$  y cuyo término independiente es  $\mathbf{y}$ , usando eliminación gaussiana sólo necesitamos  $(n^3 - n)/3 + n^2$  operaciones. Por lo tanto, no interesa hallar la inversa explícitamente.

La interpretación física de la inversa es muy clarificadora. La mayoría de los sistemas lineales usados en ingeniería se derivan de las leyes de conservación, y la expresión matemática de esas leyes es un balance para asegurar la conservación de una determinada propiedad (masa, fuerza, energía, ...). Así por ejemplo, en una estructura, existe el balance de fuerzas en cada nodo. Un ejemplo de balance de masa puede ser la masa que hay en cada reactor de un proceso químico. Si se escribe una ecuación simple de balance para cada una de las partes que componen el sistema, se obtiene un conjunto de ecuaciones que definen el comportamiento de la propiedad para todo el sistema. Estas ecuaciones además están interrelacionadas ya que los componentes interactúan entre ellos. Por tanto el vector  $\mathbf{x}$  incógnita representa el valor de la propiedad tratada en cada parte del sistema. Y el vector  $\mathbf{b}$  contiene los elementos del balance independientes del sistema, es decir los estímulos externos.

### 2.2.1.7. Determinante de una Matriz

Una vez que se ha calculado la descomposición LU de la matriz  $\mathbf{A}$ , y teniendo en cuenta que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal, se puede concluir que  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{U}) = u_{11} \dots u_{nn}$ .

### 2.2.1.8. Eliminación y Cálculo de LU con Pivotaje Parcial

Considérese el sistema de ecuaciones lineales a resolver:

$$\begin{aligned} (e1) \quad 2x_1 &+ x_2 + 2x_3 = 1 \\ (e2) \quad -2x_1 &- 2x_2 - 10x_3 = 2 \\ (e3) \quad 4x_1 &- 2x_2 + 2x_3 = 20. \end{aligned} \quad (2.25)$$

De los tres elementos de la primera columna el de mayor valor absoluto aparece en la ecuación (e3). Se intercambian las ecuaciones (e1) y (e3), y se construye la matriz de permutación  $P^1$ :

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Esta última matriz se obtiene de intercambiar las filas de la matriz identidad en el mismo orden.

El sistema equivalente que se obtiene es:

$$\begin{aligned} (e1) \quad 4x_1 &- 2x_2 + 2x_3 = 20 \\ (e2) \quad -2x_1 &- 2x_2 - 10x_3 = 2 \\ (e3) \quad 2x_1 &+ x_2 + 2x_3 = 1. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A continuación comienza el proceso de eliminación. En primer lugar, se elimina  $x_1$  de las ecuaciones (e2) y (e3). Para ello, se suma a la ecuación (e2) la ecuación (e1) multiplicada por  $1/2$  y a la ecuación (e3) se le resta la ecuación (e1) multiplicada por  $1/2$ . De esta manera se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rcl} \text{(e1)} & 4x_1 & - 2x_2 + 2x_3 = 20 \\ \text{(e2)} & & - 3x_2 - 9x_3 = 12 \\ \text{(e3)} & & 2x_2 + x_3 = -9. \end{array} \quad (2.28)$$

De los dos elementos de la segunda columna el de mayor valor absoluto aparece en la ecuación (e2), por lo tanto no es necesario realizar una permutación. En este caso la matriz de permutación queda como:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

El siguiente paso es eliminar  $x_2$  de la ecuación (e3). Para ello, se suma a la ecuación (e3) la ecuación (e2) multiplicada por  $2/3$ . Así, se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rcl} \text{(e1)} & 4x_1 & - 2x_2 + 2x_3 = 20 \\ \text{(e2)} & & - 3x_2 - 9x_3 = 12 \\ \text{(e3)} & & 5x_3 = -1. \end{array} \quad (2.30)$$

Una vez concluida la eliminación de incógnitas, se obtiene un sistema de ecuaciones triangular superior, que se resuelve por sustitución hacia atrás, es decir, de la ecuación (e3) se obtiene  $x_3 = 1/5 = 0,2$ , sustituyendo este valor en (e2) se obtiene  $x_2 = \frac{12+9/5}{-3} = -4,6$  y finalmente sustituyendo este valor en (e1) se obtiene  $x_1 = \frac{20-21/5+2\frac{12+9/5}{-3}}{4} = 2,6$ .

Las matrices triangular inferior  $\mathbf{L}$ , triangular superior  $\mathbf{U}$  y la matriz producto de las matrices permutación  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^1 \mathbf{P}^2 \dots \mathbf{P}^n$ , quedan de la siguiente manera:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \mathbf{P} = \mathbf{P}^1 \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Nótese que resolver un sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  siguiendo el método de eliminación con pivotaje parcial es equivalente a resolver el sistema  $\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$ , siendo  $\mathbf{P}$  la matriz de permutación producto de las matrices permutación necesarias para intercambiar filas de la matriz. Con el algoritmo con pivotaje parcial se genera una factorización  $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ . Para resolver el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , se puede resolver el sistema equivalente  $\mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$ , mediante dos sustituciones, una hacia adelante y otra hacia atrás, tal y como se hizo en la sección anterior.

La solución del sistema anterior con MATLAB es:

```
>> A=[2 1 2; -2 -2 -10;4 -2 2]; b=[1;2 ;20];
>> A\b

ans =

    2.6000
   -4.6000
    0.2000
```

```
>> [L,U]=lu(A)
```

```
L =
```

```
    0.5000   -0.6667    1.0000
   -0.5000    1.0000         0
    1.0000         0         0
```

```
U =
```

```
    4    -2     2
    0    -3    -9
    0     0    -5
```

```
>> y=L\b;
```

```
>> x=U\y
```

```
x =
```

```
    2.6000
   -4.6000
    0.2000
```

```
>> [L,U,P]=lu(A)
```

```
L =
```

```
    1.0000         0         0
   -0.5000    1.0000         0
    0.5000   -0.6667    1.0000
```

```
U =
```

```
    4    -2     2
    0    -3    -9
    0     0    -5
```

```
P =
```

```
    0     0     1
    0     1     0
    1     0     0
```

```
>> y=L\P*b;
```

```
>> x=U\y
```

```
x =
    2.6000
   -4.6000
    0.2000
```

### 2.2.1.9. Problemas con la Factorización LU

Los mismos problemas que se planteaban en el método de eliminación de Gauss surgen en la descomposición LU, y la forma de resolverlos es exactamente la misma.

Hay dos tipos de descomposición LU, la de *Doolittle*, en la que la matriz  $L$  tiene los unos sobre la diagonal (la que se ha visto en este libro). Y la de *Crout*, en la que es la matriz  $U$  la que tiene los unos sobre la diagonal. Aunque hay algunas diferencias entre las dos aproximaciones, su comportamiento numérico es similar.

El pseudocódigo de la descomposición LU, es muy similar a la descomposición de Gauss, pero tiene 4 características que vale la pena mencionar:

1. Los factores de la fase de eliminación se guardan en la parte inferior de la matriz.
2. Se mantiene el pivoteo pero sin intercambio de filas, disponemos de un vector con el orden de pivoteo.
3. Las ecuaciones no están escaladas pero se usan valores escalados para determinar la fila pivote.
4. Se controla el término de la diagonal principal para comprobar si la matriz es singular o está mal condicionada.

#### Algoritmo 2.2 (Descomposición LU).

**Entrada:** Matriz de coeficientes  $a(n, n)$ , y vector de términos independientes  $b(n)$

**Paso 1:** Se almacenan en un vector  $s(n)$  los valores máximos de cada fila (ecuación), y en  $o(n)$  el orden inicial de las ecuaciones.

**Paso 2:** Para  $k = 1, \dots, n - 1$ , se realizan los pasos 3-7. (Eliminación)

**Paso 3:** Para  $j = k, \dots, n$ . Determinar en la columna  $k$ , el mayor valor del cociente  $a(o(j), k)/s(o(j))$ . Si el cociente es menor que una tolerancia prefijada el sistema es singular o mal condicionado, el procedimiento concluye.

**Paso 4:** Si  $k$  distinto de  $j$ , intercambio los elementos del vector  $o$ .

**Paso 5:** Para  $i = k + 1, \dots, n$  hacer los pasos 6-7

**Paso 6:** Calcular el coeficiente para pivotar  $m = a(o(i), k)/a(o(k), k)$ , que se almacena en  $a(o(i), k)$ .

**Paso 7:** Para  $j = k + 1, \dots, n$   $a(o(i), j) = a(o(i), j) - m * a(o(k), j)$

**Paso 8:** Si  $a(n, n) = 0$ , no existe solución única. El procedimiento concluye.

**Paso 10:** Se obtiene la matriz  $P$ , y se cambia la  $A = P * A$ . Lo mismo con  $b = P * b$ .

**Paso 11:** De  $i = 2, \dots, n$  sustitución hacia adelante.  $d(1) = b(1)$

**Paso 12:** De  $j = 1, i - 1$   $b(i) = b(i) - a(i, j) * b(j)$

**Paso 13:** De  $i = n - 1, \dots, 1$  sustitución hacia atrás.  $x(n) = b(n)/a(n, n)$

**Paso 14:** De  $j = i + 1, n$   $b(i) = b(i) - a(i, j) * x(j)$

**Paso 15:**  $x(i) = b(i)/a(i, i)$ . Obtención de la solución del sistema,  $x$ .

■

### 2.2.1.10. Condicionamiento de una Matriz

Sea  $\|\bullet\|$  una norma matricial y  $\mathbf{A}$  una matriz invertible. El número

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

se denomina condicionamiento (o número de condición) de la matriz  $\mathbf{A}$ . El número de condición de una matriz se calcula mediante MATLAB con la función “`cond(A)`”. A continuación se muestra un ejemplo en MATLAB de una matriz mal condicionada y su número de condición:

```
>> help hilb

HILB   Hilbert matrix.
        HILB(N) is the N by N matrix with elements 1/(i+j-1),
        which is a famous example of a badly conditioned matrix.
        See INVHILB for the exact inverse.

This is also a good example of efficient MATLAB programming
style where conventional FOR or DO loops are replaced by
vectorized statements. This approach is faster, but uses
more storage.

>> H=hilb(2)

ans =

    1.0000    0.5000
    0.5000    0.3333
>> cond(H)

ans =

    19.2815
```

Hay una serie de consideraciones importantes respecto al número de condición:

- Siempre se verifica que el condicionamiento de una matriz es siempre un número mayor o igual que 1. Se puede demostrar que

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}.$$

Que implica que el error relativo en la norma del vector calculado  $\mathbf{x}$  puede ser tan grande como el error relativo de la norma de los coeficientes de  $\mathbf{A}$  multiplicada por el número de

condición. Por tanto cuanto mayor sea el número condición mayores son los errores en la solución calculada y el sistema puede llegar a estar mal condicionado.

- Si el número de condición es mucho mayor que uno, la matriz está mal condicionada y la solución del sistema puede no ser fiable; si por el contrario está próximo a uno, se dice que la matriz está bien condicionada y los posibles errores relativos en la solución están acotados por los errores relativos cometidos en los datos del sistema (matriz y término independiente). Por ejemplo, si un sistema se resuelve con una precisión de  $10^{-16}$ , y el número de condición es de  $10^{15}$ , la solución tiene un error relativo de  $10^{-16} \times 10^{15} = 10^{-1}$ , que puede no ser suficiente.
- Cuando se trata de resolver un sistema lineal  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  en el que  $\mathbf{A}$  una matriz con un número de condición elevado, se utiliza un preconditionador para corregir el problema. Existen muchas técnicas para resolver este tipo de problemas.
- MATLAB a medida que resuelve el sistema calcula, mediante el comando `rcond(A)` una aproximación del inverso del número de condición de la matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$ , con lo que se dispone de un aviso para tener en cuenta que si `rcond(A)` es pequeño, hay posibilidad de un gran error en la solución si se ha cometido un pequeño error en los datos del sistema:

```
>> A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]; b=[1 0 0]';
>> x=A\b
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.541976e-018.

x =

    1.0e+015 *
    -4.5036
     9.0072
    -4.5036

>> A*x

ans =

     0
    -4
     0
```

En la resolución del sistema anterior aparece un mensaje de error que informando de que la matriz de coeficientes puede ser casi singular (estar mal condicionada). De hecho, la solución que se ha obtenido no es solución del sistema, basta con observar que  $\mathbf{Ax} \neq \mathbf{b}$ .

Nótese, sin embargo, que esto no impide que MATLAB obtenga la inversa de la matriz:

```
>> A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]; b=[1 0 0]';
>> invA=inv(A)
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
```

```

Results may be inaccurate. RCOND = 1.541976e-018.

invA =

1.0e+016 *

-0.4504    0.9007   -0.4504
 0.9007   -1.8014    0.9007
-0.4504    0.9007   -0.4504

>> invA*A

ans =

 0    -4    0
 0     8    0
 4     0    0

```

Se puede comprobar fácilmente que nuestro sistema es incompatible. Es pues lógico calcular  $\text{cond}(\mathbf{A})$  antes de resolver un sistema.

En el caso del sistema anterior, se puede calcular el rango de la matriz y de la ampliada, de esta forma veremos que es un sistema incompatible

```

>> rank(A)

ans =

 2

>> rank([A b])

ans =

 3

```

### 2.2.1.11. Descomposición de Cholesky

Considérese ahora un sistema lineal  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  donde la matriz  $\mathbf{A}$  es simétrica y definida positiva, situación que se da en muchas ocasiones en los problemas de ingeniería. En este caso se puede demostrar que existe una matriz triangular inferior  $\mathbf{L}$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

donde  $l_{ij} = l_{ji}$ .

**Demostración.**

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

donde se puede demostrar fácilmente que  $u_{ii} > 0, \forall i = 1, \dots, 3$ , puesto que la matriz es definida positiva. Si intercalamos la matriz diagonal e invertible

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}}, \sqrt{u_{33}})$$

en la factorización  $\mathbf{LU}$ , como

$$\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}(1/\sqrt{u_{11}}, 1/\sqrt{u_{22}}, 1/\sqrt{u_{33}})$$

se obtiene  $\mathbf{A} = \mathbf{LU} = (\mathbf{LD})(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U})$ . Si se considera  $\mathbf{B} = \mathbf{LD}$  y  $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$ , se verifica  $\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \mathbf{BC}$ . Por ser  $\mathbf{A}$  simétrica,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ; por tanto

$$\mathbf{BC} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{BC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T.$$

Como

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}^T) = \prod_{i=1}^3 \sqrt{u_{ii}} > 0,$$

tanto  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{B}^T$  son invertibles. A partir del resultado anterior se puede demostrar fácilmente que  $\mathbf{A} = \mathbf{BC} = \mathbf{BB}^T$  donde  $\mathbf{B}$  es triangular inferior. ■

Aunque la demostración anterior nos da un camino para calcular la descomposición de Cholesky de una matriz simétrica y definida positiva, la forma de obtener la matriz  $\mathbf{L}$  es la siguiente:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2}; \quad (2.34)$$

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} l_{kj}) / l_{ii}, j = i + 1, i + 2, \dots, n.$$

El número de operaciones que se realiza con el método de Cholesky es muy inferior al de Gauss (del orden de la mitad).

A continuación aplicaremos el método de Cholesky para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

cuya matriz de coeficientes del sistema es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

que es simétrica y definida positiva. A continuación, se calcula su factorización de Cholesky:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

En el primer paso  $i = 1$ , se obtiene:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1;$$

$$l_{1j} = (a_{1j})/l_{11}, j = 1, 2, 3 \Rightarrow l_{12} = -1, l_{13} = 1.$$

En el segundo paso  $i = 2$ :

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{12}^2} = 1;$$

$$l_{23} = \frac{a_{23} - l_{12}l_{13}}{l_{22}} = 0;$$

y por último, en el tercer paso  $i = 3$ , se obtiene:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{13}^2 - l_{23}^2} = 2.$$

Por lo tanto la matriz  $\mathbf{L}$  es:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Una vez que se ha descompuesto la matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}$ , resolvemos el sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , en dos pasos, primero resolvemos  $\mathbf{L}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}$  por sustitución hacia adelante y luego resolvemos  $\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  por sustitución hacia atrás.

Ahora resolvemos el problema anterior con MATLAB, para lo cual se utiliza la función `chol(A)`:

```
>> A=[1 -1 1;-1 2 -1; 1 -1 5]
```

```
A =
```

```
    1    -1     1
   -1     2    -1
    1    -1     5
```

```
>> L=chol(A)
```

```
ans =
```

```
    1    -1     1
    0     1     0
    0     0     2
```

```
>> transpose(L)*L
```

```
ans =
```

```
    1    -1     1
   -1     2    -1
    1    -1     5
```

```
>> y=transpose(L)\b;
```

```
>> x=L\y
```

```

x =

    5.7500
    1.0000
   -0.7500

>> A=[2 -1 0; -1 2 0;-1 -1 -1];% matriz no definida positiva
>> chol(A)
?? Error using ==> chol Matrix must be positive definite.

```

Respecto a la descomposición de Cholesky, hay dos consideraciones importantes:

- Si  $\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}$  es la factorización de Cholesky de una matriz  $\mathbf{A}$  simétrica y definida positiva, entonces

$$\det(\mathbf{A}) = l_{11}^2 l_{22}^2 \dots l_{nn}^2.$$

- Si se desean resolver varios sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}$ , de nuevo la estrategia es, una vez calculada la matriz  $\mathbf{L}$ , resolver los sistemas triangulares  $\mathbf{L}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}$  y  $\mathbf{L} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

### Algoritmo 2.3 (Descomposición de Cholesky).

**Entrada:** Matriz de coeficientes  $a(n, n)$ , simétrica y definida positiva .

**Paso 1:** Se genera la primera fila de la matriz triangular superior solución  $L$ .  $L(1, 1) = \sqrt{a(1, 1)}$ , para  $k = 2, \dots, n$ ,  $L(1, k) = a(1, k)/L(1, 1)$ .

**Paso 2:** Para  $i = 1, \dots, n - 1$  hacer los pasos 3-4.

**Paso 3:** Para  $k = 1, \dots, i - 1$ . Se acumula el siguiente sumatorio  $L(i, i) = a(i, i) - L(k, i)^2$ . Si el valor de  $L(i, i) < 0$ , la matriz no es definida positiva, el procedimiento concluye. Si no,  $L(i, i) = \sqrt{L(i, i)}$ .

**Paso 4:** Para  $j = i + 1, \dots, n$ , y para  $k = 1, \dots, i - 1$ , se acumula en  $L(i, j) = a(i, j) - L(k, i) * L(k, j)$ , y después del ciclo  $k$ , se divide  $L(i, j) = L(i, j)/L(i, i)$ .

**Paso 5:** Se calcula  $L(n, n)$  mediante el paso 3 con  $i = n$ .

**Salida:** Una matriz triangular superior  $\mathbf{L}$ , que si la multiplicamos de la siguiente manera  $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$  se obtiene  $\mathbf{A}$ .

■

La descomposición de Cholesky, sólo se puede aplicar para matrices simétricas y definidas positivas. Si se cumple, no se produce el caso de obtener una raíz negativa durante el proceso de descomposición.

Otra ventaja de las matrices definidas positivas es que no requieren el pivoteo para evitar divisiones por cero. Por lo que se puede implementar el algoritmo sin la complicación del pivoteo.

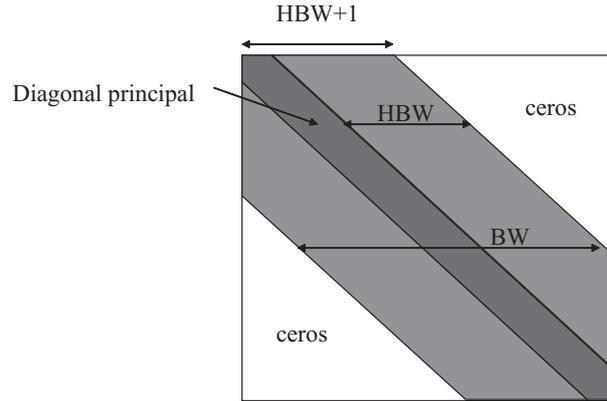


Figura 2.3: Ejemplo de sistema en banda.

### 2.2.1.12. Casos Particulares de Sistemas

Existen adaptaciones de los algoritmos anteriores para trabajar con matrices banda. BW y HBW designan el ancho de banda y el semiancho de banda. Como caso particular de los anteriores están los sistemas triangulares cuyo ancho de banda es 3. Para la resolución de un sistema tridiagonal se utiliza el algoritmo de *Thomas* que es una adaptación de la descomposición LU para este caso.

### 2.2.1.13. Algoritmo de Ortogonalización

En esta sección se analiza cómo resolver el sistema de ecuaciones (2.8) usando conjuntos ortogonales. Con este propósito se incorpora una nueva variable artificial  $x_{n+1}$  y se analiza el sistema de ecuaciones equivalente siguiente:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - a_{i,n+1}x_{n+1} &= 0; \quad i = 1, \dots, n \\ x_{n+1} &= 1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde ahora  $\mathbf{x}$  tiene  $n + 1$  componentes. Se trata de calcular el espacio ortogonal a las filas de la matriz en 2.39.

#### Algoritmo 2.4 (Algoritmo de orthogonalización).

- **Entrada:** Un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n + 1$  incógnitas en la forma 2.39.
- **Salida:** La solución general del sistema de ecuaciones o un mensaje indicando que no existe solución.

**Paso 1 :** Hacer  $\mathbf{W} = \mathbf{I}_{n+1}$ , donde  $\mathbf{I}_{n+1}$  es la matriz identidad de dimensión  $n + 1$ .

**Paso 2 :** Hacer  $i = 1$  y  $\ell = 0$ .

**Paso 3 :** Calcular los productos escalares  $t_i^j = \mathbf{a}_i^T \bullet \mathbf{w}_j; j = 1, \dots, n + 1$ , de la fila  $i$ -ésima de  $\mathbf{A}$  por las columnas de  $\mathbf{W}$ .

**Paso 4 :** Para  $j = \ell + 1$  hasta  $n$  localizar la columna pivote  $r_\ell$  como la primera columna no ortogonal a la fila  $i$ -ésima, es decir,  $t_i^{r_\ell} \neq 0$ . Si no existe tal columna, ir al Paso 7 si  $t_i^{n+1} = 0$ ; si no, escribir “el sistema de ecuaciones es incompatible” y salir.

Tabla 2.1: Iteraciones para resolver el sistema 2.40.

Iteración 1					Iteración 2					Iteración 3				
	<b>w<sub>1</sub></b>	<b>v<sub>1</sub></b>	<b>v<sub>2</sub></b>	<b>v<sub>3</sub></b>		<b>w<sub>1</sub></b>	<b>w<sub>2</sub></b>	<b>v<sub>1</sub></b>	<b>v<sub>2</sub></b>		<b>w<sub>1</sub></b>	<b>w<sub>2</sub></b>	<b>w<sub>3</sub></b>	<b>v<sub>1</sub></b>
1	<b>1</b>	0	0	0	2	1	<b>-1</b>	-1	1	1	3	-1	<b>-2</b>	-2
1	<b>0</b>	1	0	0	3	0	<b>1</b>	0	0	5	-2	1	<b>1</b>	3
1	<b>0</b>	0	1	0	1	0	<b>0</b>	1	0	-1	0	0	<b>1</b>	0
-1	<b>0</b>	0	0	1	-5	0	<b>0</b>	0	1	2	0	0	<b>0</b>	1
	<b>1</b>	1	1	-1		2	<b>1</b>	-1	-3		-7	4	<b>2</b>	15

Tabla Final			
<b>w<sub>1</sub></b>	<b>w<sub>2</sub></b>	<b>w<sub>3</sub></b>	<b>w<sub>4</sub></b>
-4	3	-1	13
3/2	-1	1/2	-9/2
7/2	-2	1/2	-15/2
0	0	0	1

**Paso 5 :** Hacer  $\ell = \ell + 1$  y dividir la columna  $r_\ell$ -ésima por  $t_i^{r_\ell}$ . Si  $r_\ell \neq \ell$ , intercambiar las columnas  $\ell$  y  $r_\ell$ , y los productos escalares asociados.

**Paso 6 :** Para  $j = 1$  hasta  $n+1$  y  $j \neq r_\ell$  si  $t_i^j \neq 0$  hacer  $w_{kj} = w_{kj} - t_i^j * w_{k\ell}$ , para  $k = 1, \dots, n+1$ .

**Paso 7 :** Si  $i = m$  ir al Paso 8. En caso contrario, incrementar  $i$  en una unidad e ir al Paso 3.

**Paso 8 :** Devolver  $\hat{\mathbf{w}}_{n+1} + \mathcal{L}\{\hat{\mathbf{w}}_{\ell+1}, \dots, \hat{\mathbf{w}}_n\}$  como la solución general del sistema, donde  $\hat{\mathbf{w}}_j$  es la columna  $j$ -ésima de  $\mathbf{W}$  sin el último elemento. ■

A continuación, se va a aplicar el algoritmo de ortogonalización para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= -2, \end{aligned} \tag{2.40}$$

que introduciendo una variable auxiliar  $x_4$ , se transforma en el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1. \end{aligned} \tag{2.41}$$

En la tabla 2.1 se muestran las iteraciones del algoritmo de ortogonalización. Se parte de la matriz identidad y en cada iteración se va transformando hasta llegar a la solución final. En la primera columna se muestran las filas de la matriz  $\mathbf{A}$ , en la última fila de cada tabla se muestran los productos escalares, las columnas pivote están en negrita y en el interior de la tabla se muestra cómo se va transformando la matriz  $\mathbf{W}$ .

Este método tiene las siguientes características:

- Tiene la misma complejidad que el método de Gauss.
- Se pueden utilizar técnicas de pivotaje parcial para evitar errores de redondeo.
- Es muy versátil y permite de forma relativamente sencilla actualizar soluciones cuando se incorpora una nueva ecuación al sistema o se cambia una ecuación ya existente.

### 2.2.2. Métodos Iterativos para la Resolución de Sistemas Lineales

En esta sección se introducen los métodos iterativos para la resolución de sistemas lineales. Estos métodos proporcionan la solución de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  como límite de una sucesión de vectores, es decir, la solución se obtiene de forma aproximada.

El uso de estos métodos es apropiado en situaciones en las que los métodos directos no ofrecen buenas soluciones:

1. Cuando la matriz del sistema tiene un tamaño muy grande  $m \gg 100$ . En esta situación el error de redondeo es grande y los resultados obtenidos con los métodos directos pueden diferir bastante de los reales.
2. Muchas aplicaciones requieren trabajar con matrices de un gran tamaño ( $n \approx 100000$ ) y vacías o huecas, es decir, matrices en las que la mayoría de sus elementos son nulos:
  - a) Si los elementos no nulos están distribuidos alrededor de la diagonal principal, se pueden aplicar métodos directos. La factorización LU y la de Cholesky preservan la estructura de matriz banda.
  - b) Cuando lo anterior no ocurre se dice que la matriz es dispersa. Al aplicar Gauss se consiguen anular los elementos de una columna por debajo de la diagonal principal, pero se convierten en elementos no nulos algunos que previamente lo eran. Con lo que la matriz que inicialmente era vacía se va llenando y en cada paso crece el número de elementos que hay que anular.
  - c) Existen técnicas sofisticadas que adaptan los métodos directos, introducidos en las secciones anteriores, al caso particular de matrices dispersas.

Con los métodos iterativos no aparecen estos problemas puesto que se basan en la resolución de sistemas diagonales o triangulares.

#### 2.2.2.1. Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

Supóngase el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Si se despejan las incógnitas  $x_1, x_2$  y  $x_3$  se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}, \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}, \\ x_3 &= \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Y suponiendo que  $\mathbf{x}^{(k)}$  es una aproximación de la solución del sistema (2.43), es decir, de

$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ , un modo natural de generar una nueva aproximación  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ , es calcular

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}}{a_{11}}, \\x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}}{a_{22}}, \\x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}}{a_{33}},\end{aligned}\tag{2.44}$$

de esta forma se define la iteración de Jacobi para  $n = 3$ . En general, para un sistema  $n \times n$ , la iteración de Jacobi se define de forma genérica de la siguiente manera:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}}.\tag{2.45}$$

Analizando la ecuación 2.45, se puede observar que en cada iteración no se utiliza la información más reciente para calcular  $x_i^{(k+1)}$ . Por ejemplo, en el cálculo de  $x_2^{(k+1)}$  se utiliza  $x_1^{(k)}$  en vez de  $x_1^{(k+1)}$ .

Si modificamos la ecuación 2.45 de forma que en cada iteración se utilice la información más reciente, se obtiene la iteración de Gauss-Seidel:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}}.\tag{2.46}$$

En general, el método de Gauss-Seidel es más rápido que el método de Jacobi.

Las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel se pueden expresar en forma matricial empleando matrices triangulares. Sean

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{2.47}$$

y  $\mathbf{D} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33})$ . La iteración de Jacobi tiene la forma  $\mathbf{M}_J \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}_J \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{M}_J = \mathbf{D}$  y  $\mathbf{N}_J = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ . La iteración de Gauss-Seidel se define como  $\mathbf{M}_G \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}_G \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$  donde  $\mathbf{M}_G = (\mathbf{D} + \mathbf{L})$  y  $\mathbf{N}_G = -\mathbf{U}$

**Comentario 2.1** *Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel pertenecen a un conjunto de métodos iterativos que tienen la forma*

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

donde la matriz del sistema se puede escribir como  $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ , siendo  $\mathbf{M}$  una matriz fácil de invertir (diagonal o triangular inferior).

La convergencia del modelo anterior depende del valor del radio espectral de la matriz  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ , que se define como el máximo de los valores absolutos de sus valores propios. ■

**Teorema 2.2 (Convergencia).** *Sean el vector  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  y la matriz no singular  $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si  $\mathbf{M}$  es no singular y el radio espectral de  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$  es menor que uno, entonces el valor  $\mathbf{x}^{(k)}$  definido como  $\mathbf{M}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$  converge a la solución  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ , para cualquier valor inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ .*

**Comentario 2.2** Respecto a la convergencia cabe destacar que:

- En una iteración de Jacobi, una condición que garantiza que el radio espectral es menor que uno es que la matriz  $\mathbf{A}$  sea estrictamente diagonal dominante, que por suerte en ingeniería, es el caso de sistema más habitual. Matemáticamente implica que:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1; j \neq n}^n |a_{ij}|.$$

En general, cuanto más dominante es la diagonal mayor velocidad de convergencia se tiene.

- Si la matriz  $\mathbf{A}$  es simétrica y definida positiva, entonces la iteración de Gauss-Seidel converge para cualquier valor inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

En la literatura, existen muchos trabajos que tratan estos temas. ■

**Comentario 2.3** Otro aspecto importante en estos métodos iterativos es el test de parada de las iteraciones.

- El test más sencillo que se puede emplear es detener el proceso cuando la diferencia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que la tolerancia admisible  $\epsilon$

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \epsilon \|\mathbf{x}^{(k+1)}\|.$$

Este test tiene el inconveniente de que puede cumplirse sin que el vector  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  esté próximo a la solución  $\mathbf{x}$ .

- Otra condición de parada de las iteraciones que es más adecuada, consiste en estudiar el vector residuo

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}).$$

Es razonable pensar que si  $\mathbf{x}^{(k)} \approx \mathbf{x}$  entonces  $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} \approx \mathbf{b}$  y recíprocamente. Por tanto, se pueden detener las iteraciones cuando se cumpla la siguiente condición:

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|} < \epsilon.$$

■

### 2.2.2.2. Método de Relajación

El método de Gauss-Seidel converge de forma lenta si el radio espectral de la matriz  $\mathbf{M}_G^{-1}\mathbf{N}_G$  es próximo a uno. Una manera de acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel es usando la relajación. La idea es tomar como siguiente aproximación a la solución, no el que resultaría directamente de aplicar el método, sino una media ponderada entre éste y el valor anteriormente hallado

$$x_i^{\text{nuevo}} = \lambda x_i^{\text{nuevo}} + (1 - \lambda)x_i^{\text{anterior}}.$$

Con lo que la aproximación de la solución en la iteración  $k + 1$  queda de la siguiente manera:

$$x_i^{(k+1)} = \lambda \frac{\left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}} + (1 - \lambda)x_i^{(k)}, \quad (2.48)$$

donde  $\lambda$  es un factor entre 0 y 2. Si  $\lambda$  es igual a uno el resultado no se modifica. Si es menor que 1, el resultado es un promedio del resultado antiguo y el nuevo (subrelajación), se emplea para que un sistema no convergente converja, u amortigüe sus oscilaciones. Si  $\lambda$  es mayor que 1, se da una ponderación extra al nuevo valor (sobrerrelajación) con lo que los sistemas convergentes aceleran su convergencia.

### Algoritmo 2.5 (Método de Gauss-Seidel).

**Entrada:** Matriz de coeficientes  $a(n,n)$ , y vector de términos independientes  $b(n)$ . Número máximo de iteraciones ( $niter$ ), error relativo máximo ( $es$ ), parámetro para la relajación ( $lambda$ ). Como solución inicial se toma  $x = (0, \dots, 0)^T$ .

**Paso 1:** Se normalizan todas la ecuaciones dividiendo sus elementos por el elemento que está en la diagonal principal. Para  $i = 1, \dots, n$   $dummy = a(i,i)$ ,  $b(i) = b(i)/dummy$ , para  $j = 1, \dots, n$ .  $a(i,j) = a(i,j)/dummy$ ,

**Paso 2:** Mientras  $iter$  sea menor  $niter$  y  $sentinel = 0$  hacer los pasos 3-6.

**Paso 3:**  $sentinel = 1$ .

**Paso 4:** Para  $i = 1, \dots, n$ .  $old = x(i)$ ,  $x(i) = b(i)$ , de  $j = 1, \dots, n$ , si  $i$  distinto de  $j$ ,  $x(i) = x(i) - a(i,j) * x(j)$ . Salir del ciclo  $j$  y calcular la siguiente aproximación de la solución,  $x(i) = x(i) * lambda + (1 - lambda) * old$ .

**Paso 5:** Si  $sentinel = 1$ , y  $x(i)$  es distinto de cero:

- $ea = abs((x(i) - old)/x(i))$ , si  $ea > es$  entonces  $sentinel = 0$ .

**Paso 6:**  $iter = iter + 1$ .

**Salida:** El vector  $x$  con la solución del sistema. ■

A continuación se muestra el código MATLAB con la implementación del Algoritmo 2.5:

```
function
[x,iter]=Gseidel(a,b,imax,es,lambda)

% GSEIDEL es una funcion que resuelve el sistema Ax=b
% por el metodo de Gauss-Seidel. A es la matriz de coeficientes
% del sistema. B es el vector de términos independientes.
% IMAX es el numero maximo de iteraciones permitido, ES es el
% error relativo maximo, y LAMBDA es el factor de relajacion.

if nargin<3,imax=100;end if nargin<4,es=0.0001;end if
nargin<5,lambda=1;end

[m,n]=size(a);

if m>n,
    error('la matriz ha de ser cuadrada');
er=1;
elseif m<n,
    error('la matriz ha de ser cuadrada');
er=1;
else
    er=0;
```

```

end

if not(er),
    x=zeros(n,1);
    for i=1:n,
        dummy=a(i,i);
        b(i)=b(i)/dummy;
        a(i,:)=a(i,+)/dummy;

    end
    iter=0;
    sentinel=0;
    while iter<imax & sentinel==0,
        sentinel=1;
        for i=1:n,
            old=x(i);
            x(i)=b(i);
            for j=1:n,
                if i~=j,
                    x(i)=x(i)-a(i,j)*x(j);
                end
            end
            x(i)=lambda*x(i)+(1-lambda)*old;
            if sentinel==1 & x(i)~=0,
                ea=abs((x(i)-old)/x(i));
                if ea>es,
                    sentinel=0;
                end
            end
        end
        iter=iter+1;
    end
end
end

```

El empleo de la función implementada es sencillo. A continuación se muestra un ejemplo del uso del algoritmo implementado en MATLAB:

```

>> A=[2 -2 0; 2 3 -1; -1 0 2];b=[1;1;2];
>> A\b

ans =

    0.7778
    0.2778
    1.3889

>> Gseidel(A,b,100,0.001,0.5)

ans =

    0.7767
    0.2775
    1.3875

```

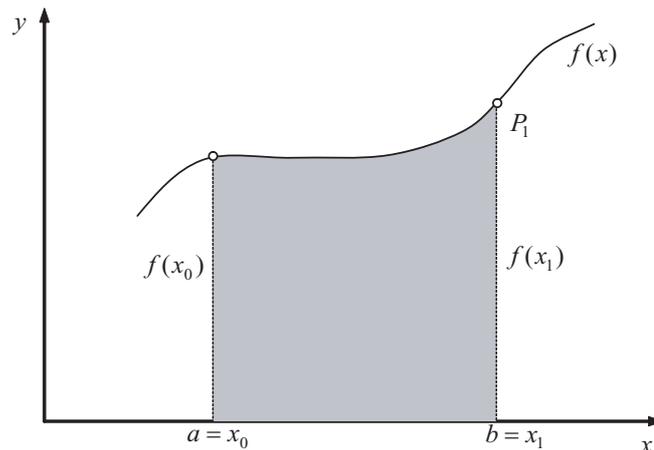


Figura 2.4: Interpretación gráfica de la cuadratura de una función en un intervalo cerrado.

### 2.3. Integración Numérica

En esta sección se estudian métodos para el cálculo aproximado de integrales de la forma:

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx, \quad (2.49)$$

siendo  $f(x)$  una función integrable en el intervalo acotado  $[a, b]$ . Históricamente, el cálculo de integrales (que inicialmente se asoció a áreas) se conoce en matemáticas como *cuadratura*, reservándose la palabra integración para la resolución de ecuaciones diferenciales. Así, por ejemplo, el problema de la cuadratura del círculo trataba de construir mediante una regla y un compás un cuadrado cuyo área coincidiese con la del círculo (este planteamiento difiere ampliamente de la idea vulgar de considerar el problema de la cuadratura del círculo como el buscar razonamientos sofisticados que demuestren que los círculos son cuadrados). De modo similar, el problema de calcular (2.49) se concebía como hallar un cuadrado cuya área coincidiese con el cuadrilátero curvilíneo delimitado por el eje de abscisas, las rectas  $x = a$  y  $x = b$  y la función  $f(x)$  (véase la Figura 2.4).

¿Por qué utilizar la cuadratura numérica en vez de calcular la integral analítica exacta? Existen diversas razones:

1. En muchas ocasiones no se dispone de la expresión analítica de la función  $f$  a integrar, sino sólo de una tabla de valores para determinados valores de la variable independiente  $x$ , o de una subrutina que permite el cálculo de la función  $f$  en cualquier punto  $x$ .
2. Incluso cuando se conoce la expresión analítica de la función a integrar  $f$ , y ésta sea una función elemental, es probable que su primitiva no lo sea, es decir, no se puede calcular la integral analítica.
3. En otras ocasiones la integral analítica es posible, pero muy complicada, y puede requerir de una “idea feliz” para su resolución, *e.g.*, un cambio de variables.

4. Aunque la primitiva sea elemental y obtenible sin necesidad de ideas felices, ésta puede ser tediosa de encontrar, e incluso requerir técnicas numéricas más complejas de las que se necesitan para hallar (2.49).

La integración numérica (también conocida como cuadratura) tiene gran utilidad por el hecho de que la integración analítica(exacta) en algunas situaciones no puede ser obtenida o su obtención es demasiado laboriosa.

### 2.3.1. Reglas de Cuadratura

La mayoría de los métodos numéricos aproximan la integral (2.49) utilizando una combinación lineal del tipo:

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (2.50)$$

de forma que una vez fijado el número de términos  $n$ , los pesos  $w_i$ , y los nodos o abscisas  $x_i$  queda definida la *regla de cuadratura*. Normalmente las abscisas en las que se evalúa la función a integrar suelen hallarse en el intervalo de integración  $[a, b]$  pero no es imprescindible. Eso sí, en caso de que esto ocurra, hay que asegurarse de que la función a integrar está definida en los puntos fuera del intervalo de integración.

Algunos de los métodos numéricos para el cálculo de cuadraturas numéricas son:

**Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes:** Se basan en la estrategia de reemplazar la función inicial a integrar  $f(x)$  por una aproximación polinómica cuya integración es más sencilla. En este capítulo sólo se hace referencia a las fórmulas de Newton-Cotes de intervalo cerrado, es decir, aquellas en las que los límites de integración no se extienden más allá del rango de los datos. Las de intervalo abierto se reservan para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias e integrales impropias. Conforme el grado del polinomio seleccionado aumenta, la precisión de la aproximación es mejor, así, se distinguen por ejemplo:

1. **Regla trapezoidal:** El polinomio aproximante es una recta.
2. **Regla de Simpson 1/3:** Sustituimos la función original por un polinomio de grado 2 (una parábola).
3. **Regla de Simpson 3/8:** El polinomio aproximante coincide con el polinomio de Lagrange de orden 3.
4. **Regla de Boole:** El polinomio aproximante es de orden 4.
5. **Fórmulas de orden superior:** Reemplazando por un polinomio de grado  $n$  se podría obtener la regla de orden  $n$ .

Es importante recalcar que todas estas fórmulas se basan en la evaluación ponderada de la función en abscisas igualmente espaciadas.

**Integración de Romberg:** Esta técnica está especialmente diseñada para alcanzar la eficiencia en las integrales numéricas de funciones. Está basada en la *extrapolación de Richardson*, método que permite generar una estimación numérica más exacta a partir de dos estimaciones numéricas menos exactas. En concreto, está basada en aproximaciones obtenidas a partir de la *regla trapezoidal*.

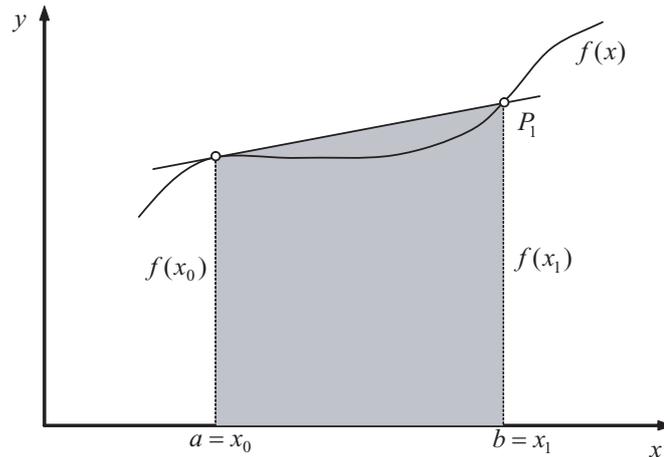


Figura 2.5: Aproximación trapezoidal.

**Cuadratura de Gauss:** Otro de los métodos más difundidos para el cálculo de cuadraturas numéricas es el de la cuadratura *Gaussiana*. A diferencia de las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes, cuyas abscisas estaban igualmente espaciadas, este método selecciona abscisas concretas basándose en las propiedades de unos polinomios ortogonales que aumentan el grado de la aproximación. En función del tipo de polinomio ortogonal empleado tenemos diversos métodos:

1. **Cuadratura de Gauss-Legendre:** Se basa en los polinomios de Legendre.
2. **Cuadratura de Gauss-Laguerre:** Basada en los polinomios de Laguerre.
3. **Cuadratura de Gauss-Chebyshev:** Se basa en los polinomios de Chebyshev.
4. **Cuadratura de Gauss-Hermite:** Emplea los polinomios de Hermite.

A continuación se describen alguno de los métodos más empleados en la práctica.

### 2.3.2. Regla Trapezoidal Simple

El primero de los métodos que se va a estudiar es el de la regla trapezoidal, que consiste en la sustitución de la función original por un polinomio de grado 1 (una recta), tal y como se muestra en la Figura 2.5.

Para obtener regla del Trapecio para aproximar la integral de  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  basta con sustituir  $f(x)$  por el polinomio de Lagrange de grado 1:

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}f(x_1),$$

donde  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$ , y  $h = b - a$  es el tamaño de paso. De forma que la expresión (2.50) queda de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}f(x_1) \right] dx. \quad (2.51)$$

Tabla 2.2: Abscisas y pesos de la regla trapezoidal simple.

Abscisas ( $x_i$ )	Pesos ( $w_i$ )
$x_0$	$h/2$
$x_1$	$h/2$

Integrando

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\simeq \left[ \frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= \frac{x_1-x_0}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \end{aligned}$$

y como  $h = x_1 - x_0$ , se obtiene la **Regla Trapezoidal simple**:

$$\mathcal{I}_1 = \int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]. \quad (2.52)$$

La razón por la que se llama regla trapezoidal es que si  $f(x)$  es una función con valores positivos, entonces  $\int_a^b f(x) dx$  se aproxima al área del trapecio mostrado en la Figura 2.5.

El error cometido en la aproximación mediante la regla del trapecio se obtiene fácilmente integrando el término de grado 2 del polinomio de Taylor despreciado en la aproximación:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\epsilon)}{2} (x-x_0)(x-x_1) dx \\ &= \frac{f''(\epsilon)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) dx \\ &= \frac{f''(\epsilon)}{2} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_0)x^2}{2} + x_1x_0x \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= -f''(\epsilon) \frac{(x_1-x_0)^3}{12}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde  $\epsilon \in [a, b]$ .

Nótese que esta fórmula integra de forma exacta polinomios de grado menor o igual que uno (rectas).

### 2.3.3. Regla Trapezoidal Compuesta

La fórmula anterior tiene el inconveniente de que sólo puede emplearse de forma razonable (error suficientemente pequeño) sobre intervalos muy pequeños. Para poder aplicarse a intervalos más grandes de forma satisfactoria se puede dividir el intervalo de integración inicial  $[a, b]$  en subintervalos más pequeños sobre los que posteriormente se aplica la regla trapezoidal simple.

Dado un intervalo de integración  $[a, b]$  y sean  $a = x_0, x_i; i = 1, 2, \dots, n-1$  y  $b = x_n$  las ordenadas de los  $n+1$  puntos correspondientes a la subdivisión del intervalo de integración en  $n$  tramos, tal y como se muestra en la Figura 2.6. La integral (2.50) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}_1^c = \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx, \quad (2.54)$$

y si se aplica la regla trapezoidal simple a cada una de las sub-integrales se llega a:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\simeq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_i^0) + f(x_{i-1}^0)] h = \\
 &= h [f(x_0)/2 + f(x_1) + \dots + f(x_i) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)/2] = \\
 &= h \left( f(x_0)/2 + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)/2 \right) \\
 &= hF_0,
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

donde  $h = (b - a)/n$ , y las coordenadas de los  $n + 1$  puntos son  $x_i = a + i * h$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$ .

El error de la fórmula trapezoidal compuesta se obtiene como suma de los errores individuales de cada uno de los subintervalos:

$$\mathcal{E}_1^c = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\epsilon_i) = -\frac{(x_n - x_0)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\epsilon_i). \tag{2.56}$$

donde  $\epsilon_i$  es un punto desconocido dentro del intervalo  $i$ -ésimo.

Este resultado se puede simplificar si tenemos en cuenta que el valor medio de la derivada en el intervalo inicial  $[a, b]$  es:

$$\bar{f}'' \approx \frac{\sum_{i=1}^n f''(\epsilon_i)}{n} \tag{2.57}$$

por lo que sustituyendo esta expresión en la fórmula (2.56) se obtiene:

$$\mathcal{E}_1^c = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}'' . \tag{2.58}$$

Nótese que en este caso si disminuimos el tamaño de paso a la mitad (aumentamos el número de subintervalos  $n$  al doble) el error de truncamiento se reduce a la cuarta parte.

### 2.3.4. Regla Trapezoidal Compuesta Mejorada

Uno de los principales inconvenientes de la fórmula trapezoidal compuesta es que dado un problema cualquiera, es complicado saber de antemano el número de subdivisiones adecuado para obtener resultados razonablemente precisos. Obviamente, partiendo de la fórmula (2.55) y teniendo en cuenta el error (2.58) está claro que para mejorar la aproximación basta con disminuir el tamaño de paso  $h$ .

El objetivo del algoritmo compuesto mejorado propuesto en esta sección es la de aprovechar en el cálculo de la nueva aproximación las evaluaciones de la función de la aproximación inicial. Para que esto sea posible, se considera que el número de subintervalos de una aproximación a otra se duplica.

Partiendo de un número de subdivisiones inicial  $n$  y considerando (2.55). Podemos expresar la integral buscada, mediante la fórmula trapezoidal compuesta, de la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_1^{c,0} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_i^0) + f(x_{i-1}^0)] \Delta x_i^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_i^0) + f(x_{i-1}^0)] h = \\
 &= h [f(x_0^0)/2 + f(x_1^0) + \dots + f(x_i^0) + \dots + f(x_{n-1}^0) + f(x_n^0)/2] = \\
 &= hF_0
 \end{aligned}$$

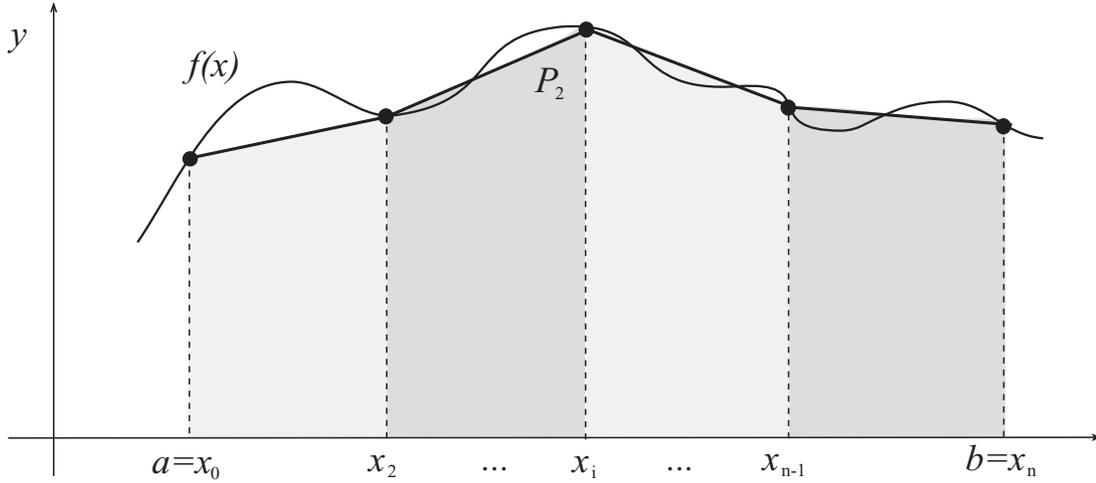


Figura 2.6: Descomposición del intervalo  $[a, b]$  en subintervalos para la aplicación de la regla trapezoidal compuesta.

siendo  $h = (b - a)/n$ , y las coordenadas de los  $n + 1$  puntos son  $x_i^0 = a + i * h$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$ . Nótese que el superíndice 0 en este caso hace referencia a la primera subdivisión.

En el siguiente paso vamos a dividir los subintervalos iniciales en dos, con lo que aumentaremos en  $n$  el número de puntos, el punto medio de cada subintervalo. Así, la nueva integral se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^{c,1} &\simeq \frac{h}{2} [f(x_0^0)/2 + f(x_1^0) + f(x_2^0) + \dots + f(x_{n-1}^0) + f(x_n^0)/2] = \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0^0)/2 + f(x_1^0) + \dots + f(x_n^0)/2] + \frac{h}{2} [f(x_1^1) + f(x_2^1) + \dots + f(x_{n-1}^1)] = \\ &= \frac{hF_0}{2} + \frac{h}{2} [f(x_1^1) + f(x_2^1) + \dots + f(x_{n-1}^1)] = \frac{h}{2} [F_0 + F_1] \end{aligned}$$

siendo

$$F_1 = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^1) \text{ y } x_i^1 = a + h/2 + i * h; i = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

El error cometido en la primera aproximación se puede obtener tanto de forma exacta como aproximada usando las siguientes expresiones:

$$\mathcal{E}_1^{c,1} = -\frac{(b-a)^3}{12(n/2^1)^2} \bar{f}''', \quad \varepsilon_1^{c,1} \approx -\frac{|\mathcal{I}_1^{c,1} - \mathcal{I}_1^{c,0}|}{|\mathcal{I}_1^{c,1}|} \quad (2.59)$$

donde el error aproximado  $\varepsilon_1^{c,1}$  se calcula como diferencia relativa entre las dos primeras aproximaciones.

Este proceso se puede repetir tantas veces como se quiera sin más que dividir cada subintervalo de la etapa  $i$ -ésima en dos. De esta forma en la etapa  $j$ -ésima se obtiene:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \mathcal{I}_1^{c,j} = \frac{h}{2^j} (F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_j) = \frac{h}{2^j} \sum_{k=0}^j F_k \quad (2.60)$$

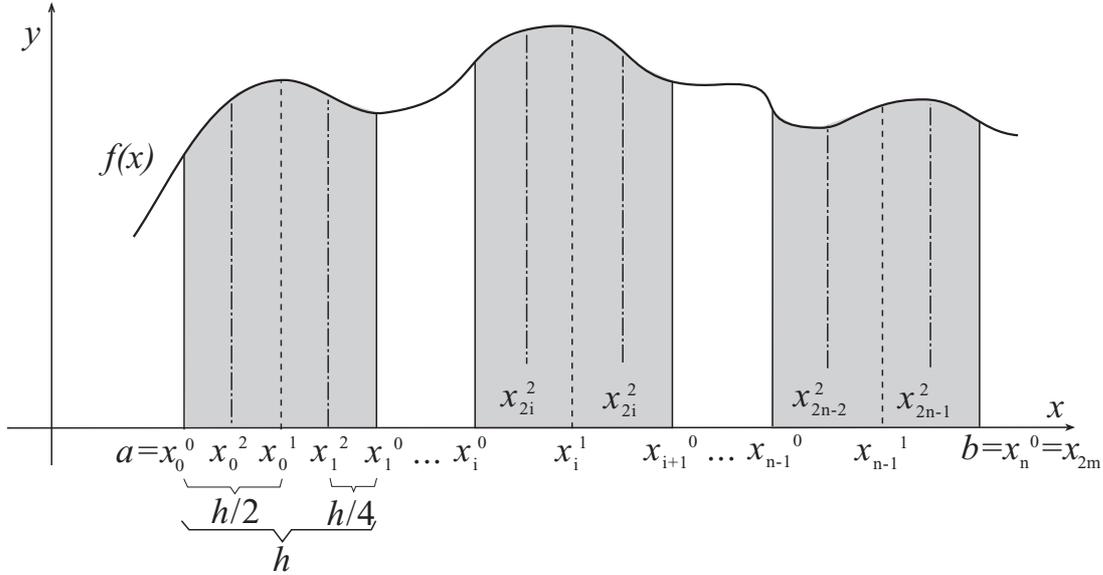


Figura 2.7: Subdivisión sucesiva del intervalo de integración para la aplicación del algoritmo trapezoidal compuesto mejorado.

en la que cada uno de los términos  $F_k$  se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \frac{f(x_0^0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^0) + \frac{f(x_n^0)}{2}; & x_i^0 &= a + i * h \\
 F_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^1); & x_i^1 &= a + \frac{h}{2} + i * h \\
 F_2 &= \sum_{i=0}^{2n-1} f(x_i^2); & x_i^2 &= a + \frac{h}{4} + i * \frac{h}{2} \\
 F_3 &= \sum_{i=0}^{4n-1} f(x_i^3); & x_i^3 &= a + \frac{h}{8} + i * \frac{h}{4} \\
 &\vdots & &\vdots \\
 F_j &= \sum_{i=0}^{2^{(j-1)}n-1} f(x_i^j); & x_i^j &= a + \frac{h}{2^j} + i * \frac{h}{2^{j-1}}.
 \end{aligned}$$

El error en la etapa  $j$ -ésima queda como:

$$\mathcal{E}_1^{c,j} = -\frac{(b-a)^3}{12(n/2^j)^2} \bar{f}''', \quad \epsilon_1^{c,j} \approx -\frac{|\mathcal{I}_1^{c,j} - \mathcal{I}_1^{c,j-1}|}{|\mathcal{I}_1^{c,j}|} \quad (2.61)$$

donde el error aproximado  $\epsilon_1^{c,j}$  se calcula como diferencia relativa entre las aproximaciones  $j$  y la  $j-1$ .

El método propuesto puede implementarse usando el siguiente algoritmo:

**Algoritmo 2.6 (Algoritmo trapezoidal compuesto mejorado).**

- **Entrada:** Función a integrar  $f(x)$ , intervalo de integración  $[a, b]$ , número de subintervalos iniciales  $n$  y precisión deseada  $\epsilon$ .

- **Salida:** Resultado aproximado de la integral.

**Paso 1:** Se establece el valor de  $h = (b - a)/n$ .

**Paso 2:** Se fija el valor inicial de la variable auxiliar  $AuxI = (f(a) + f(b))/2$ .

**Paso 3:** De  $i = 1$  hasta  $n - 1$ :

- $x = a + i * h$ .
- $AuxI = AuxI + f(x)$ .

**Paso 4:**  $I = AuxI * h$ .

**Paso 5:** Se define  $I_1 = I + 2 * \epsilon$  y  $j = 2$ .

**Paso 6:** Mientras  $|I_1 - I| \geq \epsilon$  repetir los Pasos 7, 8, 9 y 10:

- **Paso 7:**  $I_1 = I$ .
- **Paso 8:** De  $i = 0$  hasta  $(j/2) * n - 1$ :
  - $x = a + h/j + i * 2 * h/j$ .
  - $AuxI = AuxI + f(x)$ .
- **Paso 9:** Calcular  $I = AuxI * h/j$ .
- **Paso 10:** Actualizar el valor de  $j$  como  $j = j * 2$ .

**Paso 11:** Devolver  $I$ , y parar.

■

A continuación se muestra el código del algoritmo implementado en una función de MATLAB:

```
function [I,cnt]=btrapz(funfcn,a,b,n,epsilon,trace)
% BTRAPZ Evaluacion numerica de una integral con un metodo de orden reducido
% I = BTRAPZ('F',A,B) aproxima la integral de F(X) desde A hasta B
% dentro de un error relativo de 1e-5 usando un procedimiento iterativo
% mediante la regla Trapezoidal. 'F' es un string con el nombre de la
% funcion. La funcion F debe devolver un vector de valores de salida
% si se le da un vector de datos de entrada
% I = BTRAPZ('F',A,B,EPSILON) integra con un error maximo de EPSILON
% I = BTRAPZ('F',A,B,N,EPSILON,TRACE) integra con un error maximo de EPSILON
% comenzando con n subdivisiones del intervalo [A,B], para un valor de TRACE
% distinto de cero dibuja los puntos evaluados con un diagrama de puntos.
% [I,cnt] = BTRAPZ(F,a,b,epsilon) tambien devuelve el numero de evaluaciones
% de funciones
% Roberto Minguez Solana
% Copyright (c) 2006 por la Universidad de Castilla-La Mancha

if nargin < 4, n=1; epsilon =1.e-5; trace = 0; end
if nargin < 5, epsilon =1.e-5; trace = 0; end
if nargin < 6,trace = 0; end
if isempty(epsilon), epsilon=1.e-5; end
if isempty(trace), trace = 0; end
% Paso 1
h = (b-a)/n;
% Paso 3
```

```

x = linspace(a,b,n+1);
y = feval(funfcn,x);
if trace
    hold on
    plot(x,y,'.')
end
AuxI=0;
for i=1:1:n+1,
    AuxI=AuxI+y(i);
end
AuxI=AuxI-y(1)/2-y(n+1)/2;
cnt=n+1;
% Paso 4
I=AuxI*h;
% Paso 5
I1=I+epsilon*2;j=2;
% Paso 6
while abs(I - I1)>epsilon,
    cnt=cnt+j*n/2;
% Paso 7
    I1=I;
% Paso 8
    x=linspace(a+h/j,b-h/j,j*n/2);
    y = feval(funfcn,x);
    for i=1:1:j*n/2
        AuxI=AuxI+y(i);
    end
% Paso 9
    I=AuxI*h/j;
% Paso 10
    j=j*2;
% Dibujo
    if trace
        hold on
        plot(x,y,'.')
    end
end
end

```

Una de las ventajas del algoritmo trapezoidal compuesto mejorado es la eficiencia en el cálculo de las evaluaciones de la función, ya que aprovecha la información de la integral calculada con un ancho de intervalo para evaluar la siguiente, y permite prescindir de la selección de un número de subintervalos inicial. Además, debido a su estructura es fácil de incorporar en la integración de Romberg ayudándose de la extrapolación de Richardson.

### 2.3.5. Regla de Simpson 1/3 Simple

Uno de los métodos para mejorar la aproximación de la cuadratura con respecto a la regla trapezoidal consiste en emplear polinomios de grado mayor. Si se sustituye la función original  $f(x)$  por el polinomio de Lagrange de grado 2:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2),$$

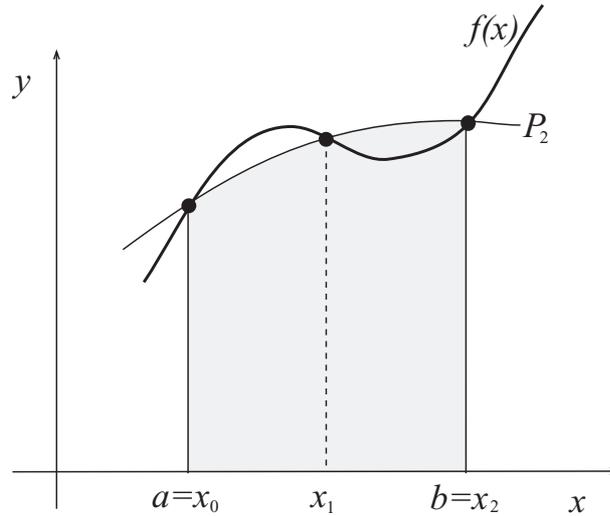


Figura 2.8: Aproximación mediante el polinomio de Lagrange de grado 2. Regla de Simpson 1/3.

donde  $x_0 = a$ ,  $x_2 = b$  y  $x_1 = a + h$ , donde  $h = (b - a)/2$  (véase la Figura 2.8) es el tamaño de paso. De esta forma, la expresión (2.50) queda de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx, \quad (2.62)$$

e integrando y operando<sup>1</sup>, se obtiene la **Regla de Simpson simple**:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \simeq \mathcal{I}_2 = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \quad (2.63)$$

El error cometido en la aproximación mediante la regla de Simpson 1/3 se obtiene partiendo del desarrollo en serie de Taylor de la función a integrar  $f(x)$  en el entorno del punto medio del intervalo  $x_1$ :

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\epsilon_1)}{4!}(x-x_1)^4. \quad (2.64)$$

Integrando el desarrollo en serie en el intervalo  $[x_0, x_2]$  obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \left[ f(x_1)(x-x_1) + f'(x_1)(x-x_1)^2/2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 + \frac{f^{(4)}(\epsilon_1)}{120}(x-x_1)^5 \right]_{x_0}^{x_2}. \quad (2.65)$$

Considerando que  $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$  y sustituyendo en la expresión (2.65) se llega a:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\epsilon_1)}{60}h^5. \quad (2.66)$$

<sup>1</sup>Para la integración se recomienda sustituir toda la expresión en función de  $x_0$  y de  $h$  teniendo en cuenta que  $x_1 = x_0 + h$  y  $x_2 = x_0 + 2h$ . Esto simplifica considerablemente los cálculos.

La derivada segunda de la función en el punto  $x_1$  calculada por diferencias finitas centrales es igual a:

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\epsilon_2). \quad (2.67)$$

Sustituyendo esta expresión de la derivada segunda en la ecuación (2.65) y teniendo en cuenta que  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$  se obtiene:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\epsilon), \quad (2.68)$$

donde la primera parte de la expresión es la **regla de Simpson** (2.63) y la segunda parte es el error cometido en la aproximación:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\epsilon) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\epsilon), \quad (2.69)$$

donde  $\epsilon \in [a, b]$ .

Nótese que el error es proporcional a la derivada cuarta, por tanto, la regla de Simpson 1/3 integra de forma exacta polinomios de grado menor o igual a 3 (derivada cuarta nula). Es, por tanto, más precisa de lo que cabría esperar.

### 2.3.6. Regla de Simpson 1/3 Compuesta

Análogamente a lo que se hizo en la sección 2.3.4 con la regla trapezoidal, para reducir el error en la aproximación se puede dividir el intervalo inicial de integración en subintervalos (véase la figura 2.9) sobre los que se aplica posteriormente la regla simple.

La integral (2.50) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}_2^c = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx, \quad (2.70)$$

y si se aplica la regla Simpson 1/3 simple a cada una de las sub-integrales llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^c &= \frac{1}{3}h[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] = \\ &= \frac{1}{3}h \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=0}^{n/2-2} f(x_{2i+2}) + f(x_n) \right]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Partiendo de un número de subdivisiones inicial  $n$ , considerando (2.71) y teniendo en cuenta que el intervalo de integración es  $[a, b]$ , y que  $a = x_0^0, x_i^0; i = 1, \dots, n-1$  y  $b = x_n^0 = x_{2m}$  son las ordenadas de los  $n+1$  puntos correspondientes a la primera subdivisión del intervalo de integración en  $n$  tramos (ha de ser un número par). Podemos expresar la integral buscada, mediante la fórmula de Simpson compuesta, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^{c,0} &= \frac{1}{3}h[f(x_0^0) + 4f(x_1^0) + 2f(x_2^0) + \dots + 2f(x_{n-2}^0) + 4f(x_{n-1}^0) + f(x_n^0)] = \\ &= \frac{1}{3}h \left[ f(x_0^0) + 4 \sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1}^0) + 2 \sum_{i=0}^{n/2-2} f(x_{2i+2}^0) + f(x_n^0) \right] = \\ &= \frac{h}{3}[f(x_0^0) + 4F_0^1 + 2F_0^2 + f(x_n^0)] \end{aligned}$$

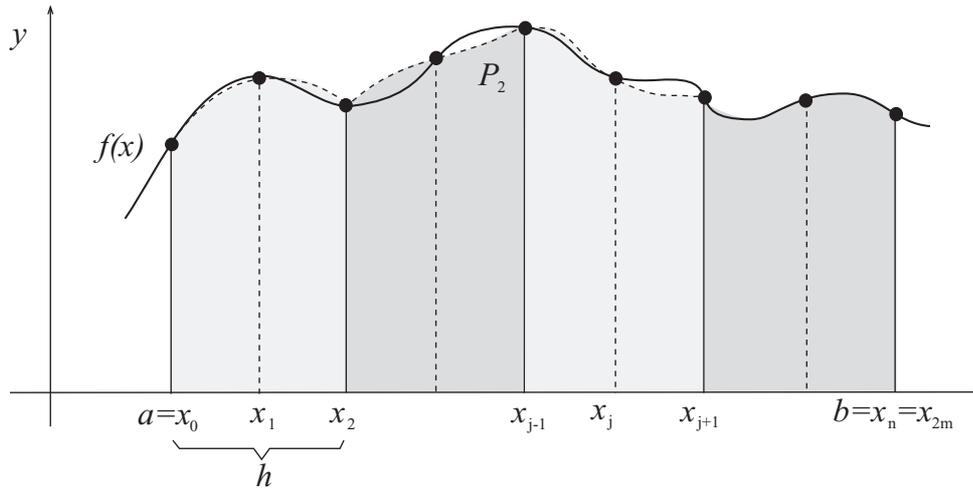


Figura 2.9: Descomposición del intervalo  $[a, b]$  en subintervalos para la aplicación de la regla de Simpson 1/3 compuesta.

siendo  $h = (b - a)/n$ , y las coordenadas de los  $n + 1$  puntos:

$$\begin{aligned} x_{2i+1}^0 &= a + (2i + 1) * h; & i = 0, 1, 2, \dots, n/2 - 1 \\ x_{2i+2}^0 &= a + (2i + 2) * h; & i = 0, 1, 2, \dots, n/2 - 2. \end{aligned}$$

El error de la fórmula de Simpson 1/3 compuesta se obtiene como suma de los errores individuales de cada uno de los subintervalos:

$$\mathcal{E}_2^c = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\epsilon_i), \quad (2.72)$$

donde  $\epsilon_i$  es un punto desconocido dentro del intervalo  $i$ -ésimo.

Este resultado se puede simplificar si tenemos en cuenta que el valor medio de la derivada en el intervalo inicial  $[a, b]$  es:

$$\bar{f}^{(4)} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\epsilon_i)}{n/2}, \quad (2.73)$$

por lo que sustituyendo esta expresión en la fórmula (2.72) y considerando que  $h = (b - a)/n$  se obtiene:

$$\mathcal{E}_2^c = -\frac{(b - a)^5}{180n^4} \bar{f}^{(4)}. \quad (2.74)$$

Nótese que en este caso si disminuimos el tamaño de paso a la mitad (aumentamos el número de subintervalos  $n$  al doble) el error de truncamiento se reduce a la dieciseisava parte. Por tanto da resultados mucho más precisos que la regla trapezoidal compuesta pero está limitada a datos igualmente espaciados y con un número par de intervalos.

### 2.3.7. Regla de Simpson 1/3 Compuesta Mejorada

Dado que también es complicado saber de antemano el número de intervalos necesarios para alcanzar una solución con un determinado grado de precisión, en esta sección se propone un

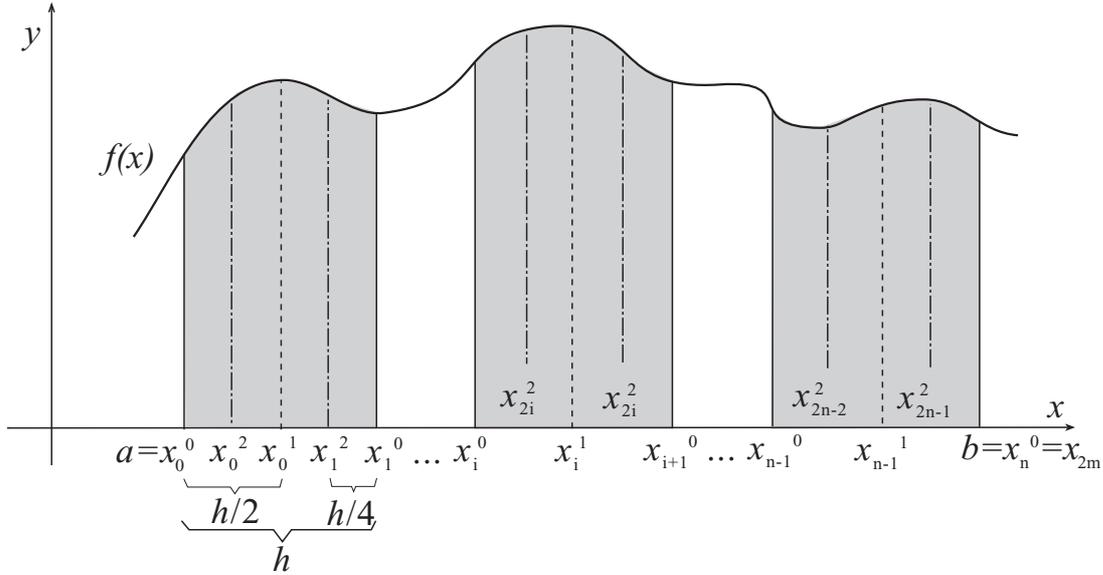


Figura 2.10: Subdivisión sucesiva del intervalo de integración para la aplicación del algoritmo de simpson compuesto mejorado.

método de refinamiento iterativo. El objetivo del algoritmo compuesto mejorado propuesto en esta sección es la de aprovechar en el cálculo de la nueva aproximación las evaluaciones de la función de la aproximación anterior. Para que esto sea posible, se considera que el número de subintervalos de una aproximación a otra se duplica.

En el siguiente paso vamos a dividir los subintervalos iniciales en dos, con lo que aumentaremos en  $n$  (cada subintervalo tiene un punto medio) el número de puntos. Así, la nueva integral es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_2^{c,1} &= \frac{h}{2 * 3} [f(x_0^0) + 4f(x_0^1) + 2f(x_0^2) + 4f(x_1^1) + 2f(x_1^2) + \dots + \\
 &\quad + 2f(x_{n-2}^0) + 4f(x_{n-2}^1) + 2f(x_{n-1}^0) + 4f(x_{n-1}^1) + f(x_n^0)] = \\
 &= \frac{h}{2 * 3} [f(x_0^0) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^1) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^0) + f(x_n^0)] = \\
 &= \frac{h}{2 * 3} [f(x_0^0) + 4F_1 + 2(F_0^1 + F_0^2) + f(x_n^0)],
 \end{aligned}$$

donde

$$F_1 = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^1) \text{ y } x_i^1 = a + h/2 + i * h; i = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

El error cometido en la primera aproximación se puede obtener tanto de forma exacta como aproximada usando las siguientes expresiones:

$$\mathcal{E}_2^{c,1} = -\frac{(b-a)^5}{180(n/2^1)^4} \bar{f}^{(4)}, \quad \varepsilon_2^{c,1} \approx -\frac{|\mathcal{I}_2^{c,1} - \mathcal{I}_2^{c,0}|}{|\mathcal{I}_2^{c,1}|} \quad (2.75)$$

donde el error aproximado  $\varepsilon_2^{c,1}$  se calcula como la diferencia relativa entre las dos primeras aproximaciones.

Este proceso se puede repetir tantas veces como se quiera sin más que dividir cada subintervalo de la etapa  $i$ -ésima en dos. De esta forma, en la etapa  $j$ -ésima se llega a la siguiente expresión:

$$\mathcal{I}_2^{c,j} = \begin{cases} \frac{h}{3} (f(x_0^0) + 4F_0^1 + 2F_0^2 + f(x_n^0)) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h}{3 * 2^j} \left( f(x_0^0) + 4F_j + 2 \sum_{k=0}^{j-1} F_k + f(x_n^0) \right) & \text{si } j \neq 0, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} F_0 &= F_0^1 + F_0^2, \\ F_0^1 &= \sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1}^0); \quad x_{2i+1}^0 = a + (2i + 1) * h, \\ F_0^2 &= \sum_{i=0}^{n/2-2} f(x_{2i+2}^0); \quad x_{2i+1}^0 = a + (2i + 1) * h, \\ F_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^1); \quad x_i^1 = a + \frac{h}{2} + i * h, \\ F_2 &= \sum_{i=0}^{4n-1} f(x_i^2); \quad x_i^2 = a + \frac{h}{4} + i * \frac{h}{2}, \\ &\vdots \\ F_j &= \sum_{i=0}^{2^{(j-1)}n-1} f(x_i^j); \quad x_i^j = a + \frac{h}{2^j} + i * \frac{h}{2^{j-1}}. \end{aligned}$$

El error en la etapa  $j$ -ésima puede obtenerse como:

$$\mathcal{E}_2^{c,j} = -\frac{(b-a)^5}{180(n/2^j)^4} \bar{f}^{(4)}, \quad \varepsilon_2^{c,j} \approx -\frac{|\mathcal{I}_2^{c,j} - \mathcal{I}_2^{c,j-1}|}{|\mathcal{I}_2^{c,j}|}, \quad (2.76)$$

donde el error aproximado  $\varepsilon_2^{c,j}$  se calcula como la diferencia relativa entre la aproximación  $j$  y la  $j-1$ .

El método propuesto puede implementarse usando el siguiente algoritmo:

**Algoritmo 2.7 (Algoritmo de Simpson compuesto mejorado).**

- **Entrada:** Función a integrar  $f(x)$ , intervalo de integración inicial  $[a, b]$ , número de subintervalos iniciales  $n$  (2 por defecto) y precisión deseada  $\epsilon$ .
- **Salida:** Resultado aproximado de la integral.

**Paso 1:** Se establece el valor del intervalo inicial de integración con  $n = 1$ ,  $h = (b - a)/n$ .

**Paso 2:** Se fijan los valores iniciales de las variables auxiliares:  $Ainit = (f(a) + f(b))$ ,  $AuxI = 0$ ,  $AuxI1 = 0$ , y  $AuxI2 = 0$ .

**Paso 3:** De  $i = 0$  hasta  $n/2 - 1$  repetir:

- $x1 = a + h * (2i + 1)$ .
- $x2 = a + h * (2i + 2)$ .

- $AuxI1 = AuxI1 + f(x1)$ .
- $AuxI2 = AuxI2 + f(x2)$ .

**Paso 4:**  $I = h/3(Ainit + 4AuxI1 + 2AuxI2)$ ,  $AuxTot = AuxI1 + AuxI2$ .

**Paso 5:** Se define  $I_1 = I + 2 * \epsilon$  y  $j = 2$ .

**Paso 6:** Mientras  $|I1 - I| \geq \epsilon$ , repetir los Pasos 7, 8, 9, 10 y 11:

- **Paso 7:**  $I1 = I$ .
- **Paso 8:** De  $i = 0$  hasta  $(j/2) * n - 1$ :
  - $x = a + h/j + i * 2 * h/j$ .
  - $AuxI = AuxI + f(x)$ .
- **Paso 9:** Se calcula la nueva aproximación de la integral  $I = \frac{h}{3*j}(Ainit + 4 * AuxI + 2 * AuxTot)$ .
- **Paso 10:** Actualizar el valor de  $j$  como  $j = j * 2$ .
- **Paso 11:** Calcular  $AuxTot = AuxTot + AuxI$  y  $AuxI = 0$ .

**Paso 12:** Devolver el valor de la integral I, y parar.

■

A continuación se muestra el código del algoritmo implementado en una función de MATLAB:

```
function [I,cnt]=bsimp(funfcn,a,b,n,epsilon,trace)

% BSIMP Evaluacion numerica de una integral con un metodo de orden reducido
% I = BSIMP('F',A,B) aproxima la integral de F(X) desde A hasta B
% dentro de un error relativo de 1e-5 usando un procedimiento iterativo
% mediante la regla de Simpson. 'F' es un string con el nombre de la
% funcion. La funcion F debe devolver un vector de valores de salida
% si se le da un vector de datos de entrada
% I = BTRBSIMPAPZ('F',A,B,EPSILON) integra con un error maximo de EPSILON
% I = BSIMP('F',A,B,N,EPSILON,TRACE) integra con un error maximo de EPSILON
% comenzando con n subdivisiones del intervalo [A,B], para un valor de TRACE
% distinto de cero dibuja los puntos evaluados con un diagrama de puntos.
% [I,cnt] = BSIMP(F,a,b,epsilon) tambien devuelve el numero de evaluaciones
% de funciones
% Roberto Minguéz Solana
% Copyright (c) 2006 por la Universidad de Castilla-La Mancha

if nargin < 4, n=2; epsilon =1.e-3; trace = 0;end
if nargin < 5, epsilon =1.e-3; trace = 0; end
if nargin < 6,trace = 0; end
if isempty(epsilon), epsilon=1.e-3; end
if isempty(trace), trace = 0; end
if rem(n,2)~= 0
    warning('The number of initial subintervals must be pair');
end
% Paso 1
h = (b-a)/n;
% Paso 3
x = linspace(a,b,n+1);
```

```

y = feval(funfcn,x);
if trace
    hold on
    plot(x,y,'.')
    drawnow
end
AuxI=0;
Ainit=y(1)+y(n+1);
AuxI1=0;
AuxI2=0;
for i=1:1:n/2,
    AuxI1=AuxI1+y(2*i);
end
for i=1:1:n/2-1,
    AuxI2=AuxI2+y(2*i+1);
end
cnt=n+1;
% Paso 4
I=(Ainit+4*AuxI1+2*AuxI2)*h/3;
AuxTot=AuxI1+AuxI2;
% Paso 5
I1=I+epsilon*2; j=2;
% Paso 6
while abs(I - I1)>epsilon,
    cnt=cnt+j*n/2;
% PasoStep 7
    I1=I;
% Paso 8
    x=linspace(a+h/j,b-h/j,j*n/2);
    y = feval(funfcn,x);
    for i=1:1:j*n/2
        AuxI=AuxI+y(i);
    end
% Paso 9
    I=(Ainit+4*AuxI+2*AuxTot)*h/(3*j);
% Paso 10
    j=j*2;
% Paso 11
    AuxTot=AuxTot+AuxI;
    AuxI=0;
% Dibujo
    if trace
        hold on
        plot(x,y,'.')
        drawnow
    end
end
end

```

### 2.3.8. Aplicación de las Reglas de Integración Compuestas

A continuación, se van a aplicar los algoritmos propuestos en el cálculo de la integral de dos funciones concretas.

Tabla 2.3: Resultados del ejemplo computacional 2.9.

Rutina	Resultado	n° de evaluaciones	$\Delta h$	Error relativo	Error absoluto
btrapz	1,06880000	3	0,4	34,85	0,571733
	1,630550000	17	0,05	0,6085	0,009983
	1,63803437	33	0,025	0,1523	0,00249863
	1,64037709	129	0,00625	0,0095	0,000156
	1,64052357	513	0,0015625	0,00057	$9,43 * 10^{-6}$
bsimp	1,62346667	5	0,2	1,04029	0,0170663
	1,63946667	9	0,1	0,065	0,00106633
	1,64046667	17	0,05	0,0040432	0,00006633
	1,64052917	33	0,025	0,0002336	$3,83 * 10^{-6}$

**Ejemplo computacional 2.9 (Integración de un polinomio).** Dada la ecuación

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5,$$

integrarla numéricamente en el intervalo  $[0; 0,8]$ . Para ello se utiliza tanto la rutina **btrapz** como la **bsimp** con diferentes niveles de precisión  $\epsilon$ . El resultado exacto de la integral es  $V_{exacto} = 1,640533$ .

En la Tabla 2.3 se muestran los resultados obtenidos con las dos rutinas y distintos niveles de precisión. Mientras que en las figuras 2.11(a), 2.11(b), 2.11(c) y 2.11(d) se pueden observar los puntos de evaluación que utiliza cada rutina para un nivel de precisión prefijado. ■

**Ejemplo computacional 2.10 (Integración de una ecuación trascendental).** Dada la ecuación

$$f(x) = \frac{100}{x^2} * \sin(10/x),$$

integrarla numéricamente en el intervalo  $[1, 3]$ . Para ello se utiliza tanto la rutina **btrapz** como la **bsimp** con diferentes niveles de precisión  $\epsilon$ . El resultado exacto de la integral es  $V_{exacto} = -1,4260247$ .

En la tabla 2.4 se muestran los resultados obtenidos con las dos rutinas y distintos niveles de precisión. Mientras que en las figuras 2.12(a), 2.12(b), 2.12(c) y 2.12(d) se pueden observar los puntos de evaluación que utiliza cada rutina para un nivel de precisión prefijado. ■

### 2.3.9. Regla de Simpson 3/8 Simple

Si en lugar de emplear un polinomio de grado 2 se utiliza una interpolación polinomial de tercer orden (cuatro puntos dato), al integrar se obtiene la **Regla de Simpson 3/8** simple:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \simeq \mathcal{I}_3 = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)], \quad (2.77)$$

donde  $h = (b - a)/3$ .

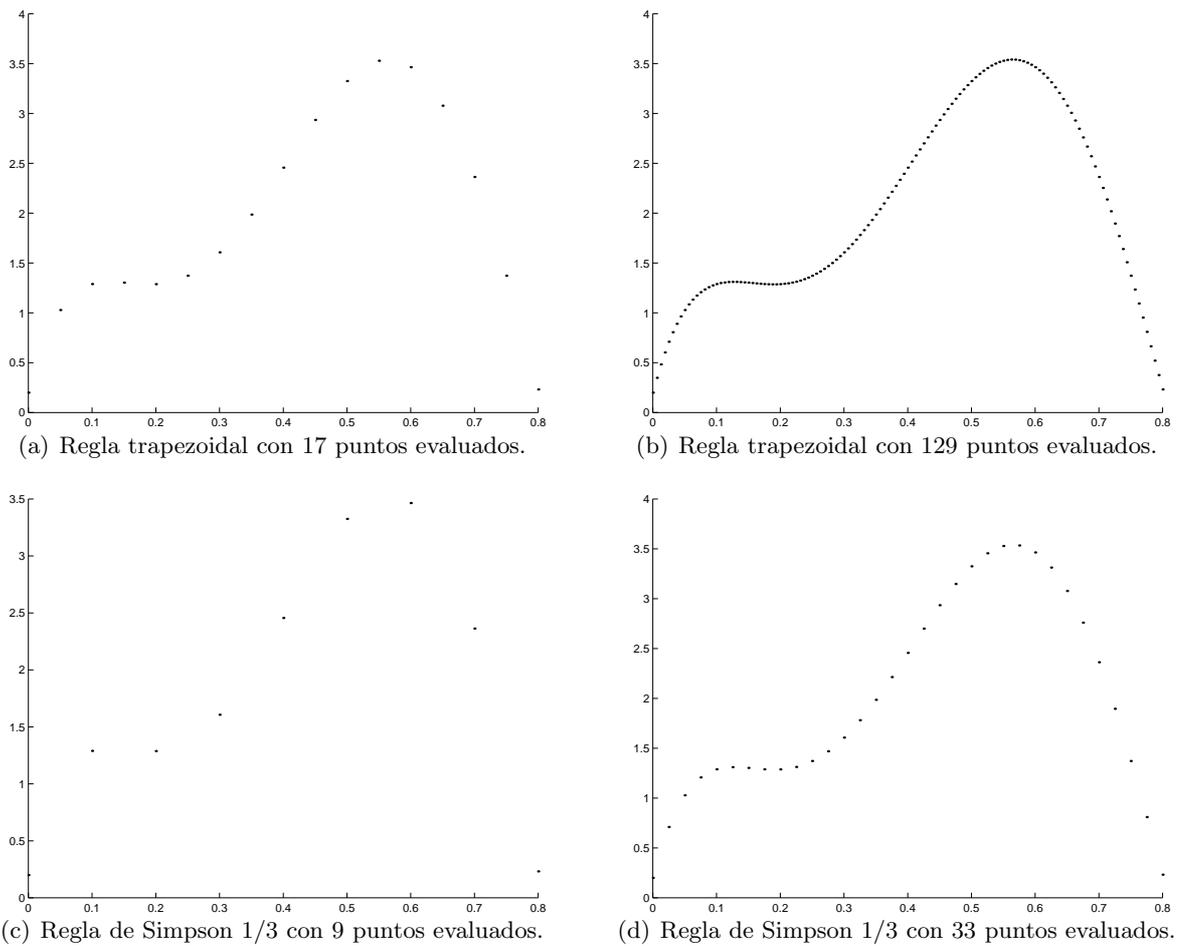


Figura 2.11: Integración numérica del ejemplo 2.9 mediante el método compuesto mejorado.

Tabla 2.4: Resultados del ejemplo computacional 2.10.

Rutina	Resultado	nº de evaluaciones	$\Delta h$	Error relativo (%)	Error absoluto
btrap	-1,73265585	33	0,0625	21,5025	0,30663115
	-1,44504379	129	0,015625	1,33371	0,01901909
	-1,42721287	513	0,003906	0,0833204	0,00118817
	-1,42632178	1025	0,001953	0,020778	0,0002963
	-1,42604332	4097	0,000488	0,00130573	0,00001862
bsimp	-1,29944044	17	0,125	8,8767228	0,1265842
	-1,42540492	65	0,03125	0,04346208	0,0006197
	-1,42540492	65	0,03125	0,04346208	0,0006197
	-1,425985	129	0,015625	0,002783963	0,0000396
	-1,42602232	257	0,0078125	0,00016689753	$2,38 * 10^{-6}$

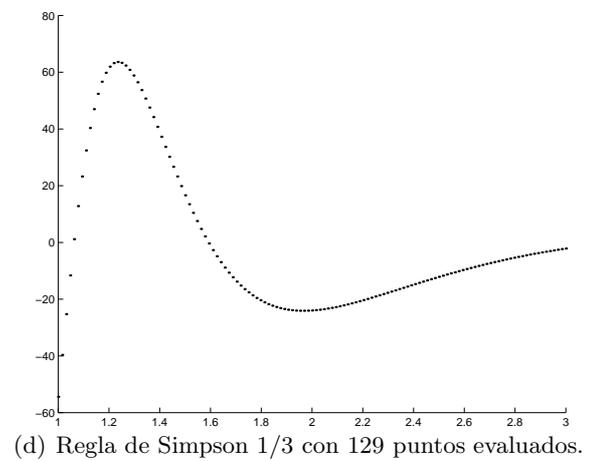
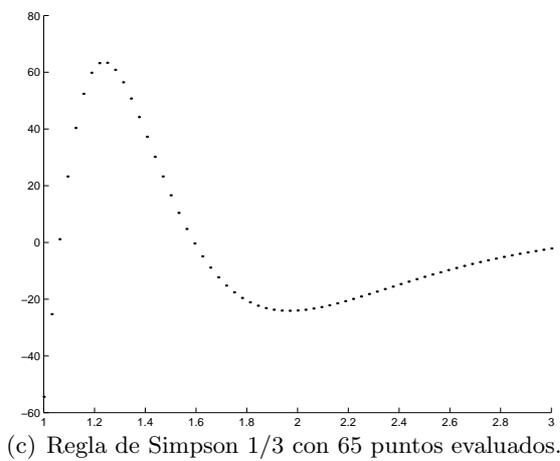
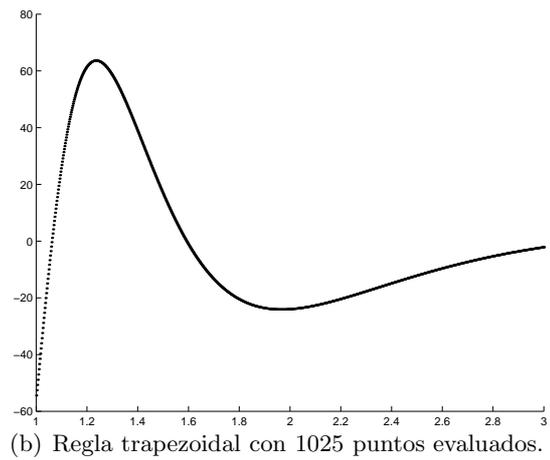
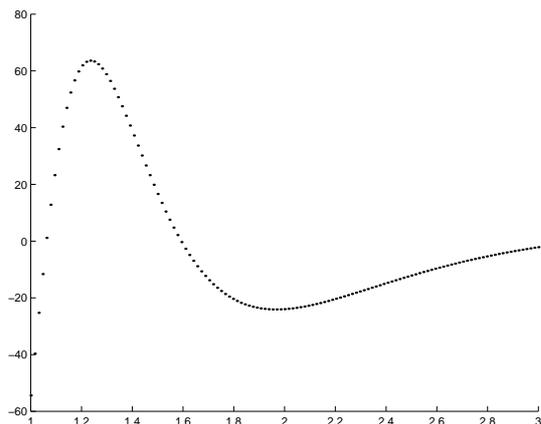


Figura 2.12: Integración numérica del ejemplo 2.10 mediante el método compuesto mejorado.

El error cometido en la aproximación mediante la regla de Simpson 3/8 es:

$$\mathcal{E}_3 = -\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\epsilon) = -\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\epsilon), \quad (2.78)$$

donde  $\epsilon \in [a, b]$ .

Nótese que el error es proporcional a la derivada cuarta, por tanto, la regla de Simpson 3/8 integra de forma exacta polinomios de grado menor o igual a 3 (derivada cuarta nula). En este caso como el denominador del error es mayor que el denominador del error de la fórmula de Simpson 1/3 (2.69), se puede concluir que esta fórmula es más precisa pero tienen en mismo orden de aproximación.

Desde el punto de vista computacional es importante recalcar las siguientes normas de buena práctica con respecto a las fórmulas de Simpson:

1. Se pueden emplear para datos de forma tabulada siempre y cuando éstos estén igualmente espaciados.
2. Un programa general debe de ser capaz de integrar cualquier función conocida de forma que seleccione automáticamente las abscisas en las que evaluar la función.
3. Ha de tenerse en cuenta la paridad de los segmentos que se utilizan, de tal forma que si son pares se emplea la fórmula de Simpson 1/3, y si son impares se emplea Simpson 1/3 con todos los segmentos excepto con los tres primeros o los tres últimos, a los que se aplica la regla Simpson 3/8.

### 2.3.10. Fórmulas de Newton-Cotes

Todos los métodos que se han visto hasta ahora se basan en la selección e integración de un polinomio que sustituye a la función a integrar, con estos métodos se obtienen las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes, que de forma genérica se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^1 f(z)dz \approx \mathcal{I}_{n-1} = \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=1}^n l_i^{(n-1)}(z) f(z_i) \right) dz, \quad (2.79)$$

donde el integrando de la expresión (2.79) es el polinomio interpolador de Lagrange de grado  $(n-1)$  y la función  $l_i^{(n-1)}(z)$  es la función interpoladora de Lagrange de grado  $(n-1)$  asociada al punto o nodo  $i$ -ésimo cuya expresión genérica es:

$$l_i^{(n-1)}(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(z - z_j)}{(z_i - z_j)}. \quad (2.80)$$

De acuerdo con la ecuación (2.80) se puede comprobar fácilmente que  $l_i^{(n-1)}(z_i) = 1$  y  $l_i^{(n-1)}(z_j) = 0$ . En la Figura 2.13 se muestra la interpretación gráfica de las funciones interpoladoras de Lagrange (funciones de forma) de grado 1, así como el polinomio interpolador.

Manipulando algebraicamente la expresión (2.79) se llega a la siguiente expresión:

$$\int_{-1}^1 f(z)dz \approx \mathcal{I}_{n-1} = \sum_{i=1}^n \left( f(z_i) \int_{-1}^1 l_i^{(n-1)}(z) dz \right), \quad (2.81)$$

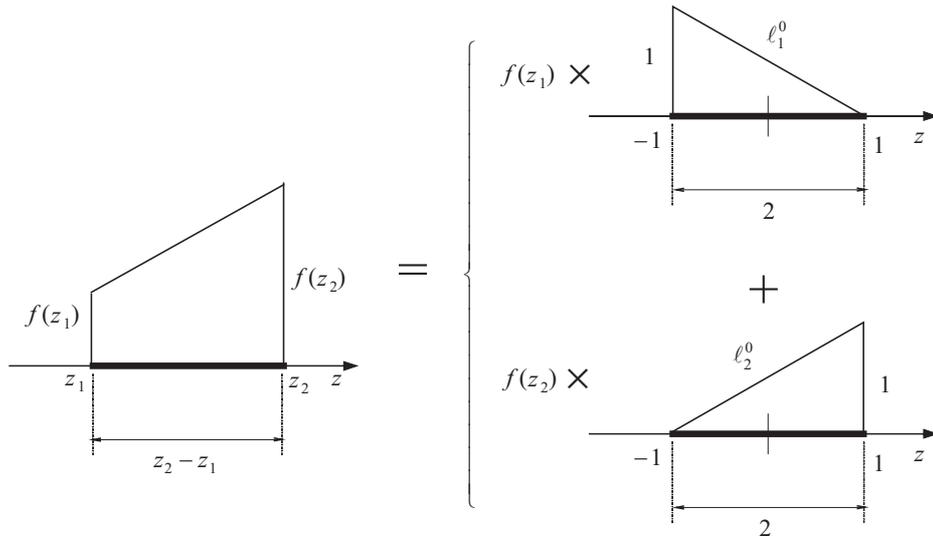


Figura 2.13: Funciones interpoladoras de Lagrange  $l_1^0(z)$  y  $l_2^0(z)$  de grado 1 (lineales).

que teniendo en cuenta la expresión (2.80) puede integrarse para dar lugar a una expresión del tipo:

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx \mathcal{I}_{n-1} = \sum_{i=1}^n w_i f(z_i), \quad (2.82)$$

que se conoce como *fórmula de cuadratura de Newton-Cotes* de  $n$  puntos y que de forma genérica proporciona la integración exacta de polinomios de grado  $(n-1)$ . En la Tabla 2.5 se muestran los pesos  $w_i$  y las abscisas  $z_i$  de las fórmulas de Newton-Cotes con hasta seis puntos de integración. Si se desea obtener más puntos basta tener en cuenta dos cosas:

1. Las abscisas en el método de Newton-Cotes están equiespaciadas, por tanto dado el número de puntos  $n$  de la fórmula a determinar, las abscisas se calculan como:

$$z_i = -1 + \frac{2}{n-1}(i-1); \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Los pesos vienen dados por la expresión (véase la ecuación (2.81)):

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i^{(n-1)}(z) dz. \quad (2.83)$$

En muchas ocasiones los límites de las integrales que tenemos que efectuar no están normalizados, es decir, no están entre  $-1$  y  $1$ . En esas situaciones hay que proceder a hacer una transformación o un cambio de variable, tal y como se muestra en la Figura 2.14. Supóngase que a la siguiente integral unidimensional:

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx, \quad (2.84)$$

se le aplica el siguiente cambio de variable:

$$x(z) = \frac{x_b + x_a}{2} + \frac{x_b - x_a}{2} z \quad (2.85)$$

Tabla 2.5: Abscisas y pesos respectivos para las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes.

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx \mathcal{I}_{n-1} = \sum_{i=1}^n w_i f(z_i)$$

Abscisas ( $z_i$ )		Pesos ( $w_i$ )	Error ( $\mathcal{E}_{n-1}$ )
	$n = 2$		$-(1/12)h^3 f''(\epsilon)$
$\pm 1$	Trapezoidal	1	
	$n = 3$		$-(1/90)h^5 f^{(IV)}(\epsilon)$
0	Simpson 1/3	4/3	
$\pm 1$		1/3	
	$n = 4$		$-(3/80)h^5 f^{(IV)}(\epsilon)$
$\pm 1/3$	Simpson 3/8	3/4	
$\pm 1$		1/4	
	$n = 5$		$-(8/945)h^7 f^{(VI)}(\epsilon)$
0	Boole	4/15	
$\pm 1/2$		32/45	
$\pm 1$		7/45	
	$n = 6$		$-(275/12096)h^7 f^{(VI)}(\epsilon)$
$\pm 1/5$		25/72	
$\pm 3/5$		25/48	
$\pm 1$		19/144	

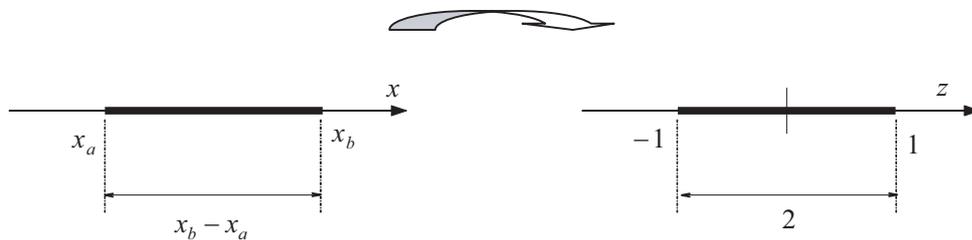


Figura 2.14: Normalización de un elemento unidimensional.

donde su diferencial ( $dx$ ) es igual a:

$$dx = \frac{x_b - x_a}{2} dz. \quad (2.86)$$

Sustituyendo en la integral (2.84) se llega a la expresión:

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_b + x_a}{2} + \frac{x_b - x_a}{2} z\right) \frac{x_b - x_a}{2} dz, \quad (2.87)$$

en la que al aplicar la fórmula de Newton-Cotes (2.82) se obtiene la fórmula de *Newton-Cotes* genérica aplicable a cualquier intervalo  $[x_a, x_b]$ :

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \approx \mathcal{I}_{n-1} = \frac{x_b - x_a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{x_b + x_a}{2} + \frac{x_b - x_a}{2} z_i\right). \quad (2.88)$$

El método de integración mediante la fórmula de cuadratura de Newton-Cotes puede implementarse usando el siguiente algoritmo:

**Algoritmo 2.8 (Algoritmo de Newton-Cotes).**

- **Entrada:** Función a integrar  $f(x)$ , intervalo de integración inicial  $[x_a, x_b]$ , y número de puntos a emplear  $n$ . También se dispone de los puntos y pesos de integración almacenados en los vectores  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{z}$  para distinto número de puntos.
- **Salida:** Resultado aproximado de la integral.

**Paso 1:** Se calculan  $x_r = \frac{x_b - x_a}{2}$  y  $x_m = \frac{x_b + x_a}{2}$ .

**Paso 2:** Conocido el número de puntos  $n$  y teniendo en cuenta que las abscisas de las fórmulas de Newton-Cotes son simétricas respecto del origen, el primer elemento de los vectores  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{z}$  se corresponde con el peso y el valor de abscisa 0. Si la fórmula tiene un número de puntos par (es decir que no contiene el 0 como abscisa) entonces el peso  $w_1$  correspondiente al  $z_1$  es nulo. Así se almacena en  $s$  el valor:

$$s = w_1 f(x_m).$$

**Paso 3:** De  $i = 2$  hasta la longitud de  $\mathbf{w}$  ó  $\mathbf{z}$ :

- Calcular  $d_x = x_r z_i$ .
- Se le suma a  $s$  el valor:

$$s = s + w_i (f(x_m + d_x) + f(x_m - d_x)),$$

de esta forma se calculan los puntos simétricos respecto del origen.

**Paso 4:** Se normaliza el valor de  $s$  multiplicándolo por  $x_r$ .

**Paso 5:** Devolver  $s$ , y parar. ■

A continuación se muestra el código del algoritmo implementado en una función de MATLAB:

```

function s = NewtonCotes(funfcn,a,b,n)
% Evaluacion numerica de una integral usando las formulas
% de cuadratura de Newton-Cotes
% s = NewtonCotes(funfcn,a,b) aproxima la integral de F(X) desde A a B
% usando la regla de Simpson 1/3
% 'F' es un string que contienen el nombre de la funcion a integrar
% La funcio F debe devolver un vector si los datos de entrada son un vector
% s = NewtonCotes(funfcn,a,b,n) integra usando N puntos (2<=N<=6)
%

if nargin < 4, n=3; end
if nargin < 3,
    error('Faltan argumentos, compruebe la función y los límites de integración');
end
% Se fijan los valores de los pesos y abscisas
if n==2,
    w = [0 1];
    z = [0 1];
elseif n==3,
    w = [4/3 1/3];
    z = [0 1];
elseif n==4,
    w = [0 3/4 1/4];
    z = [0 1/3 1];
elseif n==5,
    w = [4/15 32/45 7/45];
    z = [0 0.5 1];
elseif n==6,
    w = [0 25/72 25/48 19/144];
    z = [0 1/5 3/5 1];
else
    error('n ha de estar entre 2 y 6 puntos');
end
% Paso 1
xm=0.5*(b+a);
xr=0.5*(b-a);
% Paso 2
s=w(1)*feval(funfcn,xm);
% Paso 3
for i=2:length(w),
    dx = xr*z(i);
    s = s+w(i)*(feval(funfcn,xm+dx)+feval(funfcn,xm-dx));
end
% Paso 4
s=s.*xr;

```

**Ejemplo computacional 2.11 (Integración empleando Newton-Cotes).** Dada la función

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x - 1,$$

se desea calcular su integral en el intervalo  $[0, 3]$  empleando los siguientes métodos:

1. Integral exacta.

2. Mediante la fórmula de Newton-Cotes de 3 puntos. ¿Qué puedes decir acerca del resultado? ¿Mejoraría si empleáramos la de 4 puntos?
3. Mediante la fórmula de Newton-Cotes de 5 puntos. Comenta el resultado.

**Solución:**

1. El resultado de la integral exacta se obtiene de la siguiente manera:

$$\int_0^3 (x^5 - 3x^4 - 5x - 1)dx = \left[ -x - \frac{5x^2}{2} - \frac{3x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right]_0^3 = -\frac{249}{5} = -49,8.$$

2. Si se emplea la fórmula de 3 puntos (Simpson 1/3) mediante la fórmula (2.88) y con la información de la tabla 2.5:

$$\int_0^3 (x^5 - 3x^4 - 5x - 1)dx = \frac{3-0}{2} \left( \frac{1}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(1,5) + \frac{1}{3}f(3) \right) = -40,6875.$$

En este caso el resultado no es exacto porque tal y como se vió en la sección 2.3.5 el error de la fórmula de Simpson es proporcional a la derivada cuarta, y la función del ejercicio es de orden 5. Efectivamente, si empleamos la fórmula de 5 puntos el resultado se aproximaría más al resultado correcto pero seguiría sin ser exacto, ya que el error también es proporcional a la derivada cuarta (véase la Tabla 2.5).

Nótese que para emplear la función implementada en MATLAB bastaría teclear en la línea de comandos:

```
NewtonCotes('funcion',0,3,3)
```

donde **funcion** es un fichero función en el que se implementa la ecuación  $f(x)$ .

3. Si se emplea la fórmula de 5 puntos mediante la fórmula (2.88) y con la información de la Tabla 2.5:

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{3-0}{2} \left( \frac{12}{45}f(1,5) + \frac{32}{45}(f(0,75) + f(2,25)) + \frac{7}{45}(f(0) + f(3)) \right) = -49,8,$$

que como se puede comprobar coincide con el resultado exacto. Este resultado era predecible, ya que el error de la fórmula de 5 puntos es del orden de la derivada sexta (véase la Tabla 2.5) y la función que se trata de integrar tiene grado 5.

Para emplear la función implementada en MATLAB bastaría teclear en la línea de comandos:

```
NewtonCotes('funcion',0,3,5)
```

donde **funcion** es un fichero función en el que se implementa la ecuación  $f(x)$ .



### 2.3.11. Fórmulas de Cuadratura Gaussiana. Polinomios Ortogonales.

Las fórmulas de integración que se han tratado hasta ahora aproximan las integrales mediante la suma de la función evaluada en un conjunto de abscisas igualmente espaciadas, multiplicadas por unos pesos. La idea de la *cuadratura gaussiana* es la de tener más libertad para elegir no sólo los pesos, sino también las abscisas en las que evaluamos, que no necesariamente han de estar equiespaciadas. Así, se dispone del doble de grados de libertad a nuestra disposición, y de esta forma se pueden obtener fórmulas de cuadratura cuyo orden de aproximación es, esencialmente, el doble de las fórmulas de Newton-Cotes con el mismo número de evaluaciones de funciones.

La fórmula genérica de cuadratura gaussiana es de la forma:

$$\int_{x_a}^{x_b} W(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (2.89)$$

donde la función  $W(x)$  es una función de peso que puede ser empleada para eliminar singularidades en la integración. Todas estas fórmulas están basadas en el empleo de polinomios ortogonales en intervalos definidos y con respecto a una función de peso concreta, que cumplen las siguientes relaciones:

$$\int_{x_a}^{x_b} W(x)g_n(x)g_m(x)dx = 0 \text{ si } m \neq n, \quad (2.90)$$

$$\int_{x_a}^{x_b} W(x)[g_n(x)]^2dx = c(n) \neq 0, \quad (2.91)$$

donde  $g_n$  y  $g_m$  son dos funciones obtenidas de forma recurrente y  $c(n)$  es un valor que generalmente depende de  $n$ .

Así, algunas de las fórmulas de cuadratura Gaussiana disponibles son:

#### Gauss-Legendre:

$$W(x) = 1; \quad -1 \leq x \leq 1.$$

#### Gauss-Chebyshev:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad -1 \leq x \leq 1.$$

#### Gauss-Laguerre:

$$W(x) = x^\alpha e^{-x}; \quad 0 \leq x < \infty.$$

#### Gauss-Hermite:

$$W(x) = e^{-x^2}; \quad -\infty < x < \infty.$$

#### Gauss-Jacobi:

$$W(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta; \quad -1 \leq x \leq 1.$$

A continuación se describen cada una de ellas de forma más detallada.

### 2.3.12. Fórmula de Cuadratura de Gauss-Legendre

La fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre es la más empleada en la integración en el método de los elementos finitos. Se basa en los polinomios de Legendre, que son ortogonales

en el intervalo  $[-1, 1]$  con respecto a la función de peso  $W(x) = 1$ . Los primeros polinomios de Legendre son:

$$\begin{aligned} g_0(z) &= 1 \\ g_1(z) &= z \\ g_2(z) &= (3z^2 - 1)/2 \\ g_3(z) &= (5z^3 - 3z)/2 \\ g_4(z) &= (35z^4 - 30z^2 + 3)/8, \end{aligned} \tag{2.92}$$

donde el subíndice se corresponde con el orden del polinomio, mientras que la fórmula general de recurrencia viene dada por la expresión:

$$g_n(z) = \frac{2n-1}{n} z g_{n-1}(z) - \frac{n-1}{n} g_{n-2}(z). \tag{2.93}$$

Tanto los pesos como las abscisas se pueden calcular sistemáticamente, de hecho las abscisas son las raíces de los polinomios de Legendre. La siguiente rutina de MATLAB permite obtener los puntos y pesos de la cuadratura de Gauss-Legendre para cualquier valor de  $n$  (número de puntos).

```
function [z,w] = gauleg (n)

% Rutina para la obtención de las N abscisas Z y de
% los N pesos W de la fórmula de cuadratura de
% Gauss-Legendre con N puntos. Dada la simetria de
% las raíces sólo se calculan la mitad

EPS = 3.0e-11;
m = floor((n+1)/2);
z = zeros(m,1);
w = zeros(m,1);
xm = 0;
xl = 1;
% Recorrido por cada una de las raíces
for i=1:m,
% Aproximación de la raíz i-ésima
auxz = cos(pi*(i-0.25)/(n+0.5));
auxz1 = auxz+2*EPS;
% Refinamiento de la raíz por el método de Newton
while abs(auxz-auxz1)>EPS,
    p1 = 1.0;
    p2 = 0.0;
    for j=1:n,
        p3 = p2;
        p2 = p1;
        p1 = ((2.0*j-1.0)*auxz*p2-(j-1.0)*p3)/j;
    end
% p1 es el polinomio de Legendre deseado. Ahora se computa
% pp, su derivada, por una relación standard en la que
% interviene p2, el polinomio de un orden menor
pp = n*(auxz*p1-p2)/(auxz*auxz-1.0);
auxz1 = auxz;
auxz = auxz1-p1/pp;
end
z(i) = xm+xl*auxz;
```

```
w(i) = 2.0*x1/((1.0-auxz*auxz)*pp*pp);
end
```

Así, la fórmula de integración de Gauss-Legendre de  $n$  puntos viene dada por la expresión:

$$\int_{-1}^1 f(z)dz = \mathcal{I}_n \approx \sum_{i=1}^n w_i f(z_i), \quad (2.94)$$

donde  $z_i$  y  $w_i$  son las abscisas y los pesos de la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre. La rutina **gauleg** los calcula automáticamente, en cualquier caso algunos de los mismos se muestran en la Tabla 2.6.

El error de la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre vienen dado por la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_n = \frac{2^{2n+1}[n!]^4}{(2n+1)[2n!]^3} f^{(2n)}(\epsilon) \text{ donde } \epsilon \in [-1, 1]. \quad (2.95)$$

**Comentario 2.4** *Mediante la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre se pueden integrar de forma exacta polinomios de grado  $(2n - 1)$  con  $n$  puntos, con lo cual se confirma que son mucho más precisas que las de Newton-Cotes.* ■

Si se desea integrar en un intervalo genérico de la forma:

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx, \quad (2.96)$$

se le aplica el mismo cambio de variable que en (2.85) con lo que se obtiene la fórmula de Gauss-Legendre genérica aplicable a cualquier intervalo  $[x_a, x_b]$ :

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx \approx \mathcal{I}_n = \frac{x_b - x_a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{x_b + x_a}{2} + \frac{x_b - x_a}{2} z_i\right). \quad (2.97)$$

El método de integración mediante la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre puede implementarse usando el siguiente algoritmo:

**Algoritmo 2.9 (Algoritmo de Gauss-Legendre).**

- **Entrada:** Función a integrar  $f(x)$ , intervalo de integración inicial  $[x_a, x_b]$ , número de puntos a emplear  $n$ .

**Paso 1:** Se calculan  $x_r = \frac{x_b - x_a}{2}$  y  $x_m = \frac{x_b + x_a}{2}$ .

**Paso 2:** Conocido el número de puntos  $n$  se obtienen los vectores  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{z}$  mediante la función **gauleg**. Si la fórmula tiene un número de puntos par (es decir que no contiene el 0 como abscisa) entonces el peso  $w_1$  correspondiente al  $z_1$  es nulo. Inicializo la variable  $s = 0$ .

**Paso 3:** De  $i = 1$  hasta la longitud de  $\mathbf{w}$  ó  $\mathbf{z}$ :

- Calcular  $d_x = x_r z_i$ .
- Se suma a  $s$  el valor:

$$s = s + w_i (f(x_m + d_x) + f(x_m - d_x)),$$

Tabla 2.6: Abscisas y pesos respectivos para las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre.

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \approx \mathcal{I}_n = \sum_{i=1}^n w_i f(z_i)$$

Abscisas ( $z_i$ )			Pesos ( $w_i$ )		
$n = 1$					
0,00000	00000	00000	2,00000	00000	00000
$n = 2$					
±0,57735	02691	89626	1,00000	00000	00000
$n = 3$					
0,00000	00000	00000	0,88888	88888	88889
±0,77459	66692	41483	0,55555	55555	55553
$n = 4$					
±0,33998	10435	84856	0,65214	51548	61630
±0,86113	63115	94053	0,34785	48451	37448
$n = 5$					
0,00000	00000	00000	0,56888	88888	88889
±0,53846	93101	05683	0,47862	86704	86297
±0,90617	98459	38664	0,23692	68850	56182
$n = 6$					
±0,23861	91860	83197	0,46791	39345	72689
±0,66120	93864	66264	0,36076	15730	13980
±0,93246	95142	03152	0,17132	44923	79162
$n = 7$					
0,00000	00000	00000	0,41795	91836	73469
±0,40584	51513	77397	0,38183	00505	05069
±0,74153	11855	99394	0,27970	53914	37510
±0,94910	79123	42758	0,12948	49661	68862
$n = 8$					
±0,18343	46424	95650	0,36268	37833	78362
±0,52553	24099	16329	0,31370	66458	77676
±0,79666	64774	13627	0,22238	10344	53374
±0,96028	98564	97536	0,10122	85362	90370
$n = 9$					
0,00000	00000	00000	0,33023	93550	01260
±0,32425	34234	03809	0,31234	70770	40002
±0,61337	14327	00590	0,26061	06964	02485
±0,83603	11073	26636	0,18064	81606	94858
±0,96816	02395	07626	0,08127	43883	61569

si  $i$  es menor que la longitud de  $w$  ó  $z$ , y

$$s = s + w_1 f(x_m)$$

si  $i$  es igual a la longitud de  $w$  ó  $z$ .

Así se almacena en  $s$  el valor:

$$s = s + w_1 f(x_m).$$

**Paso 4:** Se normaliza el valor de  $s$  multiplicándolo por  $x_r$ .

**Paso 5:** Devolver  $s$ , y parar. ■

A continuación se muestra el código del algoritmo implementado en una función de MATLAB:

```
function s = GaussLeg(funfcn,a,b,n)
%
% GaussLeg Evaluacion numerica de una integral usando las formulas
% de cuadratura de Gauss-Legendre
% s = GaussLeg(funfcn,a,b,n) aproxima la integral de F(X) desde A a B
% usando la formula de cuadratura de Gauss-Legendre de N puntos
% 'F' es un string que contienen el nombre de la funcion a integrar
% La funcion F debe devolver un vector si los datos de entrada son un vector
%
if nargin < 4, error('Faltan argumentos'); end
% En primer lugar se obtienen los pesos y las abscisas
[z,w] = gauleg (n);
if mod(n,2)==0,
    z=[z ; 0];
    w=[w ; 0];
end
% Paso 1
xm=0.5*(b+a);
xr=0.5*(b-a);
% Paso 2
s=zeros(size(a));
for i=1:length(w),
    dx = xr*z(i);
% Paso 3
    if i<length(w),
        s = s+w(i)*(feval(funfcn,xm+dx)+feval(funfcn,xm-dx));
    else
        s= s+w(i)*feval(funfcn,xm);
    end
end
% Paso 4
s=s.*xr;
```

**Ejemplo computacional 2.12 (Integración de Gauss-Legendre en un intervalo normalizado).** Obtener numéricamente utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre la siguiente integral:

$$\int_{-1}^1 f(z) dz, \tag{2.98}$$

para los siguientes casos:

1. La función  $f$  es una constante igual a 5.
2. La función  $f$  es del tipo  $f(z) = z + 1$  es una función lineal.
3. La función  $f$  varía cuarticamente con respecto a  $z$  siendo del tipo  $f(z) = z^4 + z + 1$ .

**Solución:**

1. Para este primer caso ( $f(z) = 5$ ) la integral exacta viene dada por:

$$\int_{-1}^1 5dz = 5[z]_{-1}^1 = 10. \quad (2.99)$$

Para la solución numérica se considera en principio un único punto de integración, la integral queda por tanto como:

$$\int_{-1}^1 5dz = \sum_{i=1}^1 w_i f(z_i) = 2 \times 5 = 10. \quad (2.100)$$

Nótese que para una función constante, un único punto ya nos proporciona la solución exacta. Recuérdese que con  $n = 1$  puntos, podemos integrar de forma exacta polinomios de grado  $2n - 1 = 1$ , es decir, funciones lineales.

Para emplear la función implementada en MATLAB basta con teclear en la línea de comandos:

```
>> GaussLeg(@(x) 5, -1, 1, 1)
```

```
ans =
```

```
10
```

donde “@(x)5” es una forma alternativa de incluir la función  $f(x) = 5$  sin emplear un fichero función (\*.m).

2. La integral exacta queda de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^1 (z + 1)dz = \left[ \frac{z^2}{2} + z \right]_{-1}^1 = 2. \quad (2.101)$$

Para la solución numérica consideremos inicialmente un único punto de integración:

$$\int_{-1}^1 (z + 1)dz = \sum_{i=1}^1 w_i f(z_i) = (0 + 1) \times 2 = 2, \quad (2.102)$$

con lo cual se verifica que con una función lineal un único punto de integración basta para calcular la integral exacta.

El mismo resultado se obtendría si se emplea la función de MATLAB:

```
>> GaussLeg(@(x) x+1,-1,1,1)

ans =

     2
```

3. La integral exacta del tercer caso queda de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^1 (z^4 + z + 1) dz = \left[ \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{2}z^2 + z \right]_{-1}^1 = \frac{12}{5} = 2,4. \quad (2.103)$$

Si se emplean dos puntos de integración, teniendo en cuenta la información de la Tabla 2.6 resulta:

$$\int_{-1}^1 (z^4 + z + 1) dz = \sum_{i=1}^2 w_i f(z_i) \quad (2.104)$$

$$= w_1 f(z_1) + w_2 f(z_2) \quad (2.105)$$

$$= 2,222222222222222 \quad (2.106)$$

que como se puede observar no es igual a la solución exacta. Desde MATLAB se obtiene:

```
>> GaussLeg(@(x) x.^4+x+1,-1,1,2)

ans =

 2.222222222222222
```

Si se consideran 3 puntos (véase la Tabla 2.6) resulta:

$$\int_{-1}^1 (z^4 + z + 1) dz = \sum_{i=1}^3 w_i f(z_i) \quad (2.107)$$

$$= w_1 f(z_1) + w_2 f(z_2) + w_3 f(z_3) \quad (2.108)$$

$$= 2,399999999999999 \quad (2.109)$$

que es prácticamente igual a la solución exacta. Desde MATLAB se obtiene:

```
>> GaussLeg(@(x) x.^4+x+1,-1,1,3)

ans =

 2.399999999999999
```

Así, con tres puntos de integración se pueden integrar hasta polinomios de grado 4. ■

**Ejemplo computacional 2.13 (Integración por Gauss-Legendre en un intervalo genérico).** Obtener numéricamente el valor de la siguiente integral:

$$\int_2^7 (1 + 2x) dx. \quad (2.110)$$

**Solución:**

El valor exacto de la integral se puede calcular como:

$$\int_2^7 (1 + 2x) dx = [x + x^2]_2^7 = 56 - 6 = 50. \quad (2.111)$$

A continuación se calcula la integral numéricamente con dos puntos de Gauss y considerando la expresión (2.97), teniendo en cuenta que  $x_a = 2$ , y  $x_b = 7$ :

$$\int_2^7 f(x) dx \approx \frac{7-2}{2} \sum_{i=1}^2 w_i f\left(\frac{7+2}{2} + \frac{7-2}{2} z_i\right), \quad (2.112)$$

y empleando los valores de la Tabla 2.6 da un resultado de 50, igual al valor exacto. Mediante la función en MATLAB se obtiene:

```
>> GaussLeg(@(x) 2*x+1,2,7,2)
```

```
ans =
```

```
50.000000000000001
```

**2.3.13. Integrales Multidimensionales**

Hasta ahora todos los métodos de integración estudiados hacían referencia a una única variable (*integración unidimensional*). Si se desea integrar una función que depende de varias variables, en ese caso nos enfrentamos a un problema de integración *multidimensional*, que generalmente son problemas complicados de resolver.

En primer lugar el número de evaluaciones de la función que se requieren para una integral  $n$ -dimensional aumenta con la potencia  $n$ -ésima del número de evaluaciones necesarias para las unidimensionales.

En ciertas ocasiones es posible reducir analíticamente las dimensiones del problema, así por ejemplo, en el caso de *integrales iterativas* de una función de una única variable puede reducirse a una integral unidimensional mediante la fórmula:

$$\begin{aligned} & \int_0^x \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_3} dt_3 \int_0^2 f(t_1) dt_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Otro punto importante con respecto a estas integrales son los límites de integración. De forma genérica este es un problema muy complejo, ya que se tiene:

$$\int_{x_1^{lo}}^{x_1^{up}} dx_1 \int_{x_2^{lo}(x_1)}^{x_2^{up}(x_1)} dx_2 \cdots \int_{x_n^{lo}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}^{x_n^{up}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.114)$$

Así por ejemplo la integral bidimensional de la función  $f(x, y)$  considerando que el dominio de integración es un círculo de radio 1 centrado en el origen cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 1$  es igual a:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy f(x, y). \quad (2.115)$$

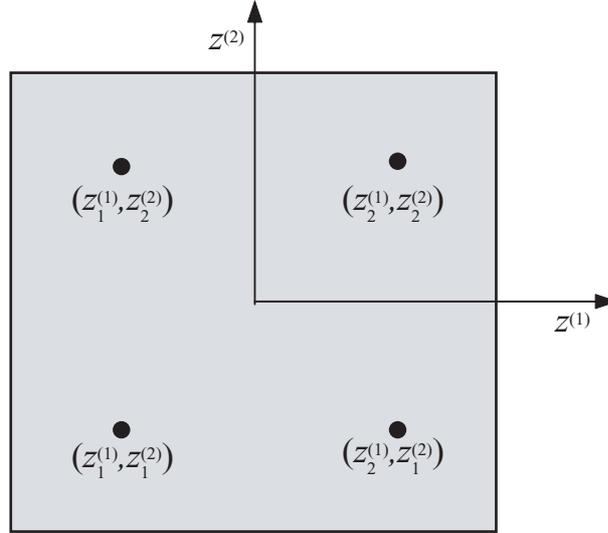


Figura 2.15: Puntos de integración para 4 puntos en 2 dimensiones.

Si los límites son sencillos, supongamos un cuadrilátero  $n$ -dimensional normalizado, es decir, que sus límites son siempre  $[-1, 1]$ , entonces la integral (2.114) se puede transformar en integrales unidimensionales repetidas, o fórmulas de cuadratura Gaussiana multidimensionales de la forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 f(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 dz_2, \dots, dz_n \approx \sum_{i=1}^{n_1} w_i \left[ \sum_{j=1}^{n_2} w_j \left( \cdots \left\{ \sum_{k=1}^{n_n} w_k f(z_i, z_j, \dots, z_k) \right\} \cdots \right) \right] \quad (2.116)$$

donde  $w_i, w_j, \dots, w_k$  son los pesos de los puntos de Gauss  $z_i, z_j, \dots, z_k$  asociados a cada dimensión, y donde  $n_1, n_2, \dots, n_n$  son el número de puntos de Gauss empleados en cada dimensión, respectivamente.

Los puntos en los que se evalúa la función, para el caso bidimensional, se muestran en la Figura 2.15.

En caso de que los intervalos de integración no estén normalizados pero sean conocidos, la expresión (2.114) aproximada mediante la fórmula de cuadratura mostrada en la ecuación (2.97) queda de la siguiente manera:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2, \dots, dx_n \approx \sum_{k=1}^{n_n} w_k f \left( \frac{b_1 + a_1}{2} + \frac{b_1 - a_1}{2} z_i, \frac{b_2 + a_2}{2} + \frac{b_2 - a_2}{2} z_j, \dots, \frac{b_n + a_n}{2} + \frac{b_n - a_n}{2} z_k \right) \left[ \prod_{l=1}^n \frac{b_l - a_l}{2} \sum_{i=1}^{n_1} w_i \left[ \sum_{j=1}^{n_2} w_j \left( \cdots \left\{ \sum_{k=1}^{n_n} w_k f \left( \frac{b_1 + a_1}{2} + \frac{b_1 - a_1}{2} z_i, \frac{b_2 + a_2}{2} + \frac{b_2 - a_2}{2} z_j, \dots, \frac{b_n + a_n}{2} + \frac{b_n - a_n}{2} z_k \right) \right\} \cdots \right) \right] \right]$$

(2.117)

donde  $a_i, b_i$ ;  $i = 1, \dots, n$  son los límites inferior y superior de integración correspondientes a cada una de las variables en las que se integra.

Si se particulariza para el caso de integrales en dos dimensiones la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre (2.117) queda como:

$$\frac{b_1 - a_1}{2} \frac{b_2 - a_2}{2} \sum_{i=1}^{n_1} w_i \left[ \sum_{j=1}^{n_2} w_j f \left( \frac{b_1 + a_1}{2} + \frac{b_1 - a_1}{2} z_i, \frac{b_2 + a_2}{2} + \frac{b_2 - a_2}{2} z_j \right) \right]. \quad (2.118)$$

Esta fórmula se puede implementar en el MATLAB mediante la siguiente función:

```
function s = GaussLeg2D(funfcn,a,b,n)
%
% GaussLeg2D Evaluacion numerica de una integral usando las formulas
% de cuadratura de Gauss-Legendre en dos dimensiones
% s = GaussLeg(funfcn,a,b,n) aproxima la integral de F(X,Y) desde A a B
% usando la formula de cuadratura de Gauss-Legendre de N puntos
% 'F' es un string que contienen el nombre de la funcion a integrar
% La funcion F debe devolver un vector si los datos de entrada son un vector
% A es un vector con dos dimensiones que contiene los limites inferiores
% de integracion de las dos variables, analogamente B contiene los
% limites superiores
%
if nargin < 4, error('Faltan argumentos'); end
% En primer lugar se obtienen los pesos y las abscisas
[z,w] = gauleg (n);
if mod(n,2)==0,
    z=[z ; -z];
    w=[w ; w];
else
    z=[z ; -z(1:floor(n/2))];
    w=[w ; w(1:floor(n/2))];
end
% Paso 1
xm=zeros(2,1);
xr=zeros(2,1);
dx=zeros(2,1);
xm=0.5*(b+a);
xr=0.5*(b-a);
% Paso 2
s=0;
for i=1:n,
    dx(1) = xr(1)*z(i);
    for j=1:n,
        dx(2) = xr(2)*z(j);
% Paso 3
        s = s+w(i)*w(j)*feval(funfcn,xm(1)+dx(1),xm(2)+dx(2));
    end
end
% Paso 4
s=s*prod(xr);
```

**Ejemplo computacional 2.14 (Integral en 2-D mediante Gauss-Legendre).** Obtener numéricamente el valor de la integral de la función  $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$  en el intervalo  $2 \leq x \leq 3$ ,  $1 \leq y \leq 3$ .

**Solución:**

El valor exacto de la integral se puede calcular como:

$$\int_2^3 dx \int_1^3 dy (2 + x^2 + y^2) dx = \left[ \left[ \frac{x^3 y}{3} + \frac{1}{3} x y (6 + y^2) \right]_1^3 \right]_2^3 = \frac{76}{3} = 25,3333. \quad (2.119)$$

A continuación se calcula la integral numéricamente con un punto de Gauss en cada variable, considerando la expresión (2.118) y teniendo en cuenta que  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$ , y  $b_1 = b_2 = 3$ , con lo cual se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_1^3 \int_2^3 (2 + x^2 + y^2) dx dy \approx \frac{3-2}{2} \frac{3-1}{2} \sum_{i=1}^1 w_i \left[ \sum_{j=1}^1 w_j f \left( \frac{3+2}{2} + \frac{3-2}{2} z_i, \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2} z_j \right) \right] = 24,5, \quad (2.120)$$

que no coincide con el resultado exacto. Mediante la función en MATLAB se obtiene:

```
>> GaussLeg2D(@(x,y) 2+x.^2+y.^2, [2;1], [3;3], 1)
ans =
24.500000000000000
```

Si aumentamos el número de puntos a 2, se llega al siguiente valor de la integral:

```
>> GaussLeg2D(@(x,y) 2+x.^2+y.^2, [2;1], [3;3], 2)
ans =
25.33333333333335
```

Que en este caso concreto coincide con el resultado exacto. ■

Nótese que el paso a integración en tres dimensiones es muy sencillo. A continuación se muestra la función implementada en MATLAB que permite integrar en tres dimensiones:

```
function s = GaussLeg3D(funfcn,a,b,n)
%
% GaussLeg3D Evaluacion numerica de una integral usando las formulas
% de cuadratura de Gauss-Legendre en dos dimensiones
% s = GaussLeg(funfcn,a,b,n) aproxima la integral de F(X,Y) desde A a B
% usando la formula de cuadratura de Gauss-Legendre de N puntos
% 'F' es un string que contienen el nombre de la funcion a integrar
% La funcion F debe devolver un vector si los datos de entrada son un vector
% A es un vector con tres dimensiones que contiene los limites inferiores
% de integracion de las tres variables, analogamente B contiene los
% limites superiores
%
```

```

if nargin < 4, error('Faltan argumentos'); end
% En primer lugar se obtienen los pesos y las abscisas
[z,w] = gauleg (n);
if mod(n,2)==0,
    z=[z ; -z];
    w=[w ; w];
else
    z=[z ; -z(1:floor(n/2))];
    w=[w ; w(1:floor(n/2))];
end
% Paso 1
xm=zeros(3,1);
xr=zeros(3,1);
dx=zeros(3,1);
xm=0.5*(b+a);
xr=0.5*(b-a);
% Paso 2
s=0;
for i=1:n,
    dx(1) = xr(1)*z(i);
    for j=1:n,
        dx(2) = xr(2)*z(j);
        for k=1:n,
            dx(3) = xr(3)*z(k);
% Paso 3
            s = s+w(i)*w(j)*w(k)*feval(funfcn,xm(1)+dx(1),xm(2)+dx(2),xm(3)+dx(3));
        end
    end
end
% Paso 4
s=s*prod(xr);

```

Por ejemplo, si se desea integrar la función  $f(x, y, z) = x^3 + 2 * y^2 - z^3/2$  en el intervalo  $[-1, 2]$ ,  $[0, 1]$ , y  $[1, 3]$ , respectivamente, basta con teclear desde línea de comandos:

```

>> GaussLeg3D(@(x,y,z) x.^3+2*y.^2-z.^3/2, [-1 0 1], [2 1 3], 2)

ans =

-18.5000

```

Nótese que MATLAB tiene una rutina para integrar en tres dimensiones:

```

>> triplequad(@(x,y,z) x.^3+2*y.^2-z.^3/2, -1, 2, 0, 1, 1, 3)

ans =

-18.5000

```

Como se puede apreciar, el resultado por ambos métodos coincide con el exacto.

---

## Capítulo 3

# Funciones de Forma

---

### 3.1. Introducción

El Método de los Elementos Finitos (MEF) para resolver ecuaciones en derivadas parciales transforma un problema continuo en un conjunto de ecuaciones discretas. Para ello, divide el dominio original en subdominios (elementos finitos) en los que las ecuaciones de gobierno siguen cumpliéndose, y traslada el problema asociado a cada subregión, a los nodos de la discretización. De esta manera el problema pasa de ser continuo a ser un problema discreto y nodal.

Para poder realizar este proceso, primeramente se han de adoptar unas funciones que aproximen la función solución del problema en el subdominio (elemento finito), y gracias a esas funciones de aproximación, usualmente conocidas como funciones de “forma”, se puede representar toda la solución en cada subdominio únicamente empleando los valores solución en los nodos. Posteriormente, una vez conocidos los valores de los desplazamientos, velocidades, o cualquier otra magnitud en los nodos, a través de las funciones de forma se puede conocer su valor en cualquier punto dentro del subdominio.

**Comentario 3.1** *Se puede decir que la solución numérica de una ecuación diferencial en derivadas parciales en un dominio continuo se aproxima mejor a la solución exacta (analítica) cuanto mejor se aproxime la función de forma seleccionada a la función incógnita.* ■

Dado que el empleo de las funciones de forma (aproximación a la función incógnita) es clave para la comprensión del método de los elementos finitos, en este capítulo se estudian en detalle. Nótese que las *funciones de forma* sirven tanto para la discretización del espacio (dominio) (véase la Figura 3.1), como para la aproximación de la función incógnita dentro del subdominio (elemento finito).

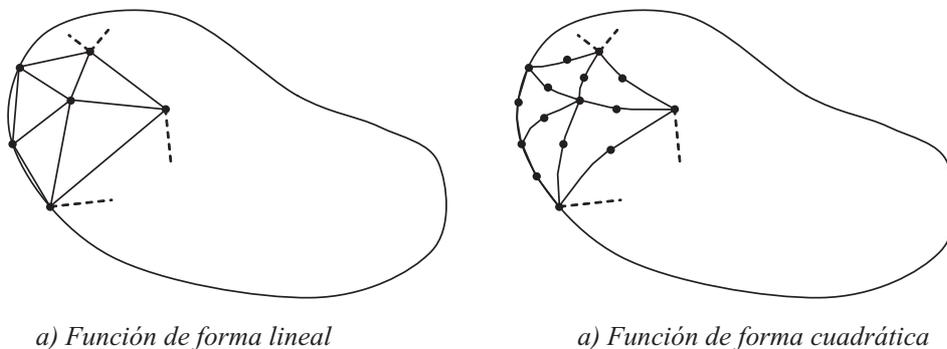


Figura 3.1: Aproximación de la geometría mediante una discretización en elementos.

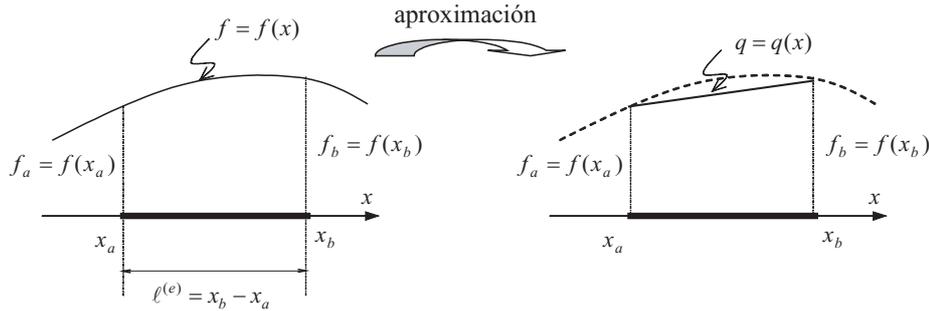


Figura 3.2: Aproximación de una función por un polinomio lineal.

### 3.1.1. Aproximación de una Función

Las funciones de forma desempeñan un papel clave en el Método de los Elementos Finitos (MEF) ya que permiten:

1. Trasladar el comportamiento a lo largo del elemento a los nodos.
2. Aproximar los valores de la función en todo el subdominio una vez conocidos los valores nodales.

Por estos dos motivos se van a emplear como funciones de forma de aproximación los *polinomios de Lagrange*. Para ello, supóngase una función genérica  $f = f(x)$ , tal y como se muestra en la Figura 3.2. Ésta puede aproximarse en el intervalo  $(x_a, x_b)$  mediante un polinomio lineal, cuya expresión puede definirse de la siguiente manera:

$$f(x) \approx q(x) = \frac{x_b - x}{l^{(e)}} f_a + \frac{x - x_a}{l^{(e)}} f_b \quad (3.1)$$

$$= N_1(x) f_a + N_2(x) f_b, \quad (3.2)$$

donde  $f_a, f_b$  son valores conocidos de la función  $f(x)$  en los puntos  $x_a$  y  $x_b$ , respectivamente, y  $N_1$  y  $N_2$  son las denominadas funciones de forma.

**Comentario 3.2** Para aproximar una función se pueden utilizar, además de polinomios que son los empleados en este libro, otro tipo de funciones, tales como las trigonométricas. ■

Las funciones de forma, están vinculadas a cada nodo del elemento y han de cumplir dos condiciones:

1. El valor de la función de forma asociada a un nodo concreto es uno en ese nodo y cero en los demás, tal y como se muestra en la Figura 3.3, es decir:

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.3)$$

2. La suma de las funciones de forma para un elemento es igual a 1 en todo el dominio (véase la Figura 3.3), es decir:

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1. \quad (3.4)$$

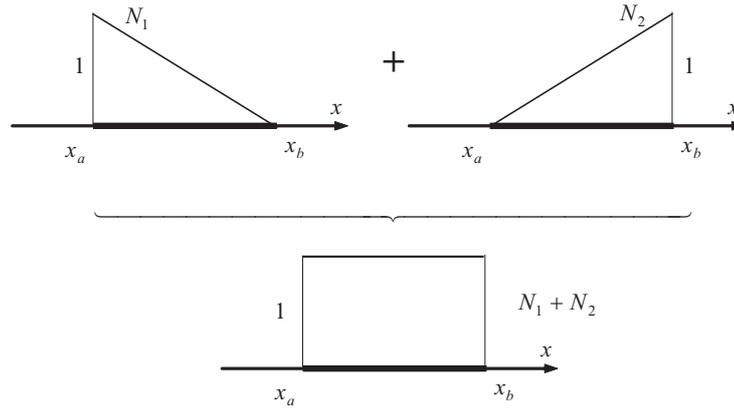


Figura 3.3: Condiciones que han de cumplir las funciones de forma. Caso lineal.

### 3.1.2. Aproximación de la Geometría

Al igual que las funciones de forma se emplean para aproximar una función cualquiera, también se pueden emplear para aproximar la geometría. Así por ejemplo, para un elemento unidimensional, si se adoptan unas funciones de forma lineales, la aproximación es exacta y viene dada por la siguiente expresión:

$$x = \frac{x_b - x}{l^{(e)}} x_a + \frac{x - x_a}{l^{(e)}} x_b \quad (3.5)$$

$$= N_1(x)x_a + N_2(x)x_b. \quad (3.6)$$

### 3.1.3. Normalización del Espacio

Para el empleo posterior de las funciones de forma dentro del método de los elementos finitos, es de gran interés práctico que el intervalo en el que se aproximan las funciones esté normalizado. De esa manera la integración numérica en el dominio del elemento puede obtenerse fácilmente incluso cuando las funciones a integrar son complicadas. Hay que tener en cuenta que con la geometría normalizada siempre se emplean los mismos puntos de integración y los mismos pesos. Dado que el intervalo en el espacio normalizado puede ser cualquiera, en este libro se adopta el intervalo  $[-1, 1]$  como intervalo de referencia.

Para llevar a cabo la normalización considérese un segmento de recta delimitado por el intervalo  $[x_a, x_b]$ , y el segmento normalizado, tal y como se muestra en la Figura 3.4. Aplicando semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{l^{(e)}}{2} = \frac{x - \frac{(x_a+x_b)}{2}}{\xi}. \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta que  $l^{(e)} = x_b - x_a$  y reestructurando la expresión anterior se obtiene:

$$x(\xi) = \frac{x_b + x_a}{2} + \frac{x_b - x_a}{2} \xi \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \xi) x_a + \frac{1}{2} (1 + \xi) x_b \quad (3.9)$$

$$= N_1(\xi)x_a + N_2(\xi)x_b, \quad (3.10)$$

expresión en la que las funciones de forma son función de la coordenada natural  $\xi$ .

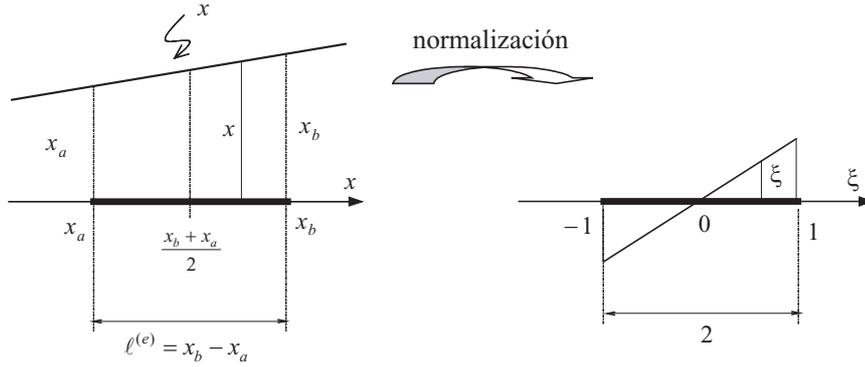


Figura 3.4: Normalización del espacio para las funciones de forma.

El razonamiento anterior se puede generalizar para las funciones de forma de  $n$  puntos. Para ello, se emplea el Polinomio de Lagrange de grado  $(n - 1)$  en coordenadas naturales, que viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 N_i^{(n-1)}(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_n)} \\
 &= \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left( \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

A continuación se exponen y describen las funciones de forma para elementos unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales en coordenadas naturales más empleadas desde el punto de vista práctico. Es importante recalcar que estas funciones de forma se emplean para aproximar tanto las funciones incógnita como la geometría del elemento. A este respecto es importante el siguiente comentario.

**Comentario 3.3** *Para un mismo problema se pueden adoptar funciones de forma diferentes para la geometría y para la función incógnita, aunque lo más habitual es utilizar las mismas. En estos casos los elementos de la discretización se denominan Elementos Isoparamétricos.* ■

## 3.2. Funciones de Forma de Elementos Unidimensionales

### 3.2.1. Elemento Lineal

Para el elemento lineal se tiene que  $n = 2$ , y por tanto la función de aproximación es un polinomio lineal de grado  $(n - 1) = 1$ , tal y como se muestra en la Figura 3.5. Utilizando el polinomio de Lagrange se obtiene que:

- Para  $i = 1$  con la condición de  $i \neq j$ :

$$N_1^{(1)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)} = \frac{(\xi - 1)}{[(-1) - 1]} = \frac{1}{2}(1 - \xi). \tag{3.12}$$

- Para  $i = 2$  con la condición de  $i \neq j$ :

$$N_2^{(1)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} = \frac{[\xi - (-1)]}{[1 - (-1)]} = \frac{1}{2}(1 + \xi). \tag{3.13}$$

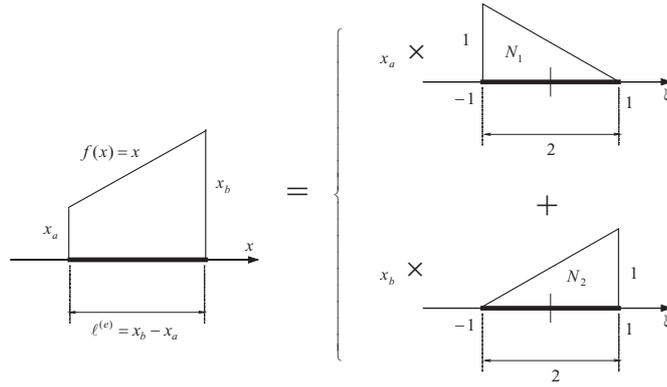


Figura 3.5: Funciones de forma del elemento lineal empleando dos puntos o nodos.

Nótese que son las mismas funciones obtenidas en la expresión (3.10).

Se puede verificar que las funciones de forma satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} N_1^{(1)}(\xi = -1) = 1 & ; & N_1^{(1)}(\xi = 1) = 0 \\ N_2^{(1)}(\xi = -1) = 0 & ; & N_2^{(1)}(\xi = 1) = 1, \end{cases} \quad (3.14)$$

y

$$N_1^{(1)}(\xi) + N_2^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) + \frac{1}{2}(1 + \xi) = 1, \quad (3.15)$$

es decir que la función de forma asociada a cada nodo vale 1 en ese nodo y 0 en el otro, y que su suma en toda la longitud del elemento es igual a 1.

### 3.2.2. Elemento Cuadrático

De la misma forma que se obtuvieron las funciones de forma del elemento lineal, se pueden determinar las funciones de forma para el elemento unidimensional cuadrático, que se representan en la Figura 3.6.

En este caso el polinomio de Lagrange cuadrático ( $n - 1 = 2$ ) sigue la expresión:

$$N_i^{(2)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_i - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_i - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_i - \xi_3}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Nótese que para el caso  $i = 1$  el término  $\frac{\xi - \xi_1}{\xi_i - \xi_1}$  no se incluye, para  $i = 2$  no se incluye el  $\frac{\xi - \xi_2}{\xi_i - \xi_2}$  y para  $i = 3$  no se incluye el término  $\frac{\xi - \xi_3}{\xi_i - \xi_3}$ , por lo que las funciones de forma quedan de la siguiente manera:

$$N_1^{(2)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{[(-1) - 0][(-1) - 1]} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (3.17)$$

$$N_2^{(2)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 1)}{[0 - (-1)][0 - 1]} = (1 - \xi^2) \quad (3.18)$$

$$N_3^{(2)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 0)}{[1 - (-1)][1 - 0]} = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi), \quad (3.19)$$

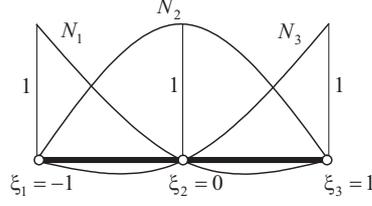


Figura 3.6: Funciones de forma del elemento cuadrático.

que cumplen que su valor es 1 en el nodo correspondiente, y 0 en los demás, y además su suma es 1 en toda la longitud del elemento, es decir:

$$N_1^{(2)}(\xi) + N_2^{(2)}(\xi) + N_3^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) + (1 - \xi^2) + \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) = 1. \quad (3.20)$$

### 3.2.3. Elemento Cúbico

Análogamente para el elemento cúbico unidimensional (véase la Figura 3.7), el polinomio de Lagrange con  $n = 4$  puntos, queda como:

$$N_i^{(3)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_i - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_i - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_i - \xi_3} \frac{\xi - \xi_4}{\xi_i - \xi_4}. \quad (3.21)$$

De forma que las funciones de forma para cada uno de los 4 puntos son:

$$\begin{aligned} N_1^{(3)}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \frac{\xi - \xi_4}{\xi_1 - \xi_4} \\ &= \frac{[\xi + (1/3)] [\xi - (1/3)] [\xi - 1]}{[-1 + (1/3)] [(-1 - (1/3))] [-1 - 1]} \\ &= -\frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ &= \frac{1}{16} (9\xi^2 - 1) (1 - \xi). \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} N_2^{(3)}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \frac{\xi - \xi_4}{\xi_2 - \xi_4} \\ &= \frac{(\xi + 1) [\xi - (1/3)] (\xi - 1)}{[(-1/3) + 1] [(-1/3) - (1/3)] [(-1/3) - 1]} \\ &= \frac{27}{16} (\xi + 1) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ &= \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 - 3\xi). \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} N_3^{(3)}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} \frac{\xi - \xi_4}{\xi_3 - \xi_4} \\ &= \frac{(\xi + 1) [\xi - (-1/3)] (\xi - 1)}{[(1/3) + 1] [(1/3) + (1/3)] [(1/3) - 1]} \\ &= \frac{-27}{16} (\xi + 1) \left( \xi + \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ &= \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 + 3\xi). \end{aligned} \quad (3.24)$$

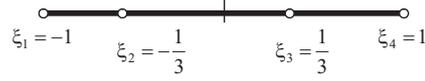


Figura 3.7: Elemento cúbico unidimensional constituido por  $n = 4$  puntos.

$$\begin{aligned}
 N_4^{(3)}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_4 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_4 - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_4 - \xi_3} \\
 &= \frac{(\xi + 1) [\xi + (1/3)] [\xi - (1/3)]}{(1 + 1) [1 + (1/3)] [1 - (1/3)]} \\
 &= \frac{9}{16} (\xi + 1) \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{16} (9\xi^2 - 1) (1 + \xi). \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

### 3.2.4. Elemento Cuártico

Análogamente para el elemento cuártico (véase la Figura 3.8), el polinomio de Lagrange viene dado por la siguiente expresión:

$$N_i^{(4)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_i - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_i - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_i - \xi_3} \frac{\xi - \xi_4}{\xi_i - \xi_4} \frac{\xi - \xi_5}{\xi_i - \xi_5},$$

por lo que las funciones de forma para los  $n = 5$  puntos son:

$$\begin{aligned}
 N_1^{(4)}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \frac{\xi - \xi_4}{\xi_1 - \xi_4} \frac{\xi - \xi_5}{\xi_1 - \xi_5} \\
 &= \frac{1}{6} \xi (4\xi^2 - 1) (\xi - 1). \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2^{(4)}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \frac{\xi - \xi_4}{\xi_2 - \xi_4} \frac{\xi - \xi_5}{\xi_2 - \xi_5} \\
 &= \frac{4}{3} \xi (\xi^2 - 1) (1 - 2\xi). \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_3^{(4)}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} \frac{\xi - \xi_4}{\xi_3 - \xi_4} \frac{\xi - \xi_5}{\xi_3 - \xi_5} \\
 &= (1 - \xi^2) (1 - 4\xi^2). \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_4^{(4)}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_4 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_4 - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_4 - \xi_3} \frac{\xi - \xi_5}{\xi_4 - \xi_5} \\
 &= \frac{4}{3} \xi (1 - \xi^2) (1 + 2\xi). \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_5^{(4)}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_5 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_5 - \xi_2} \frac{\xi - \xi_3}{\xi_5 - \xi_3} \frac{\xi - \xi_4}{\xi_5 - \xi_4} \\
 &= \frac{1}{6} \xi (4\xi^2 - 1) (1 + \xi). \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

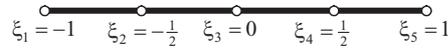


Figura 3.8: Elemento cuártico unidimensional de  $n = 5$  nodos.

Función de forma lineal ( $n = 2$ )	
	$N_1^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$ $N_2^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$
Función de forma cuadrática ( $n = 3$ )	
	$N_1^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$ $N_2^{(2)}(\xi) = (1 - \xi^2)$ $N_3^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$
Función de forma cúbica ( $n = 4$ )	
	$N_1^{(3)}(\xi) = \frac{1}{16}(9\xi^2 - 1)(1 - \xi)$ $N_2^{(3)}(\xi) = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)$ $N_3^{(3)}(\xi) = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)$ $N_4^{(3)}(\xi) = \frac{1}{16}(9\xi^2 - 1)(1 + \xi)$
Función de forma cuártica ( $n = 5$ )	
	$N_1^{(4)}(\xi) = \frac{1}{6}\xi(4\xi^2 - 1)(\xi - 1)$ $N_2^{(4)}(\xi) = \frac{4}{3}\xi(\xi^2 - 1)(1 - 2\xi)$ $N_3^{(4)}(\xi) = (1 - \xi^2)(1 - 4\xi^2)$ $N_4^{(4)}(\xi) = \frac{4}{3}\xi(1 - \xi^2)(1 + 2\xi)$ $N_5^{(4)}(\xi) = \frac{1}{6}\xi(4\xi^2 - 1)(1 + \xi)$

Tabla 3.1: Resumen de las funciones de forma unidimensionales hasta grado 4.

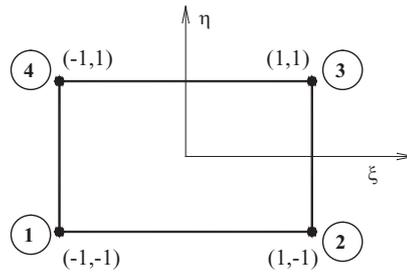


Figura 3.9: Elemento bidimensional de 4 nodos con funciones de forma lineales.

Que cumplen la condición de que valen 1 en el nodo correspondiente, y 0 en los demás. Y además su suma a lo largo de todo el dominio del elemento (su longitud) es igual a 1.

Las expresiones de las funciones de forma de hasta grado 4 en función de las coordenadas naturales se muestran resumidas en la Tabla 3.1.

Nótese que siguiendo el procedimiento anterior se pueden obtener funciones de forma de grado mayor.

### 3.3. Funciones de Forma para Elementos Bidimensionales

Las funciones de forma para el elemento rectangular bidimensional se obtienen mediante el producto de las funciones de forma unidimensionales asociadas cada una de las direcciones  $\xi$  y  $\eta$ , tal y como se muestra en la Figura 3.9. Dado que se utiliza el Polinomio de Lagrange para obtenerlas, los elementos se denominan *Elementos Lagrangeanos*.

#### 3.3.1. Elemento Rectangular Lineal

Si se emplean funciones de forma lineales en cada dirección, se obtienen las funciones de forma del elemento rectangular lineal. Que necesita de cuatro puntos para estar totalmente definido, tal y como se muestran en la Figura 3.9.

Para el nodo 1, la función de forma se obtiene a partir de la función de forma unidimensional según la dirección  $\xi$ , constituida por el polinomio de Lagrange con los nodos 1 y 2 y multiplicada por la función de forma según la dirección  $\eta$ , constituida por el polinomio de Lagrange que pasa por los nodos 1 y 4, es decir:

$$N_1(\xi, \eta) = N_1^{(1)}(\xi)N_1^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (3.31)$$

que se muestra en la Figura 3.10), y donde:

$$N_1^{(1)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)} = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad (3.32)$$

y

$$N_1^{(1)}(\eta) = \frac{(\eta - \eta_2)}{(\eta_1 - \eta_2)} = \frac{1}{2}(1 - \eta). \quad (3.33)$$

Para el nodo 2, se usa la combinación del polinomio de Lagrange según la dirección  $\xi$ , formado por los nodos 1 y 2, y el polinomio según la dirección  $\eta$ , formado por los nodos 2 y 3:

$$N_2(\xi, \eta) = N_2^{(1)}(\xi)N_2^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (3.34)$$

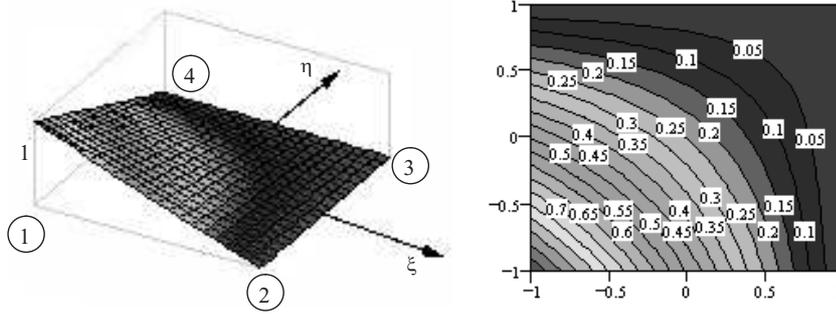


Figura 3.10: Función de forma  $N_1(\xi, \eta)$  del elemento rectangular de 4 nodos.

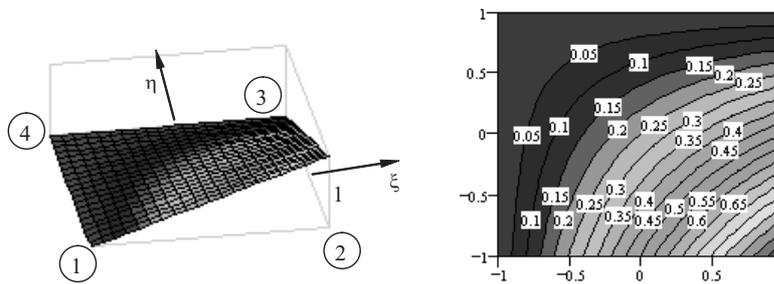


Figura 3.11: Función de forma  $N_2(\xi, \eta)$  del elemento rectangular de 4 nodos.

que se muestra en la Figura 3.11, y donde:

$$N_2^{(1)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi), \tag{3.35}$$

y

$$N_2^{(1)}(\eta) = \frac{(\eta - \eta_3)}{(\eta_2 - \eta_3)} = \frac{1}{2}(1 - \eta). \tag{3.36}$$

Para el nodo 3, se emplea la combinación del polinomio de Lagrange según la dirección  $\xi$ , formada por los nodos 2 y 3, y el polinomio según la dirección  $\eta$ , formado por los nodos 3 y 4, que queda como:

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \tag{3.37}$$

y que se muestran en la Figura 3.12.

Por último, la función de forma en el nodo 4 (véase la Figura 3.13) es igual a:

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \tag{3.38}$$

Nótese que al igual que el caso unidimensional, las funciones de forma valen 1 en su nodo asociado y 0 en los demás, y su suma en todo el dominio del elemento (en el rectángulo) vale 1, es decir:

$$N_1(\xi, \eta) + N_2(\xi, \eta) + N_3(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta) = 1. \tag{3.39}$$

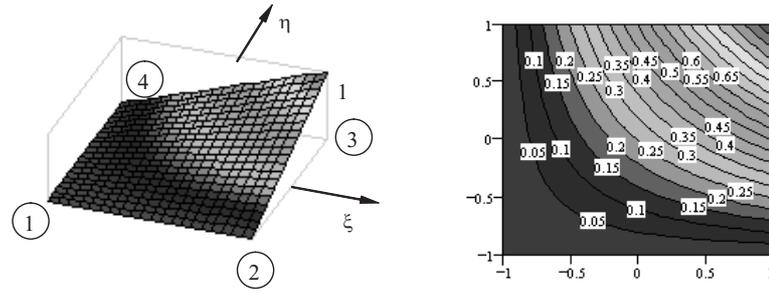


Figura 3.12: Función de forma  $N_3(\xi, \eta)$  del elemento rectangular del nodo 3.

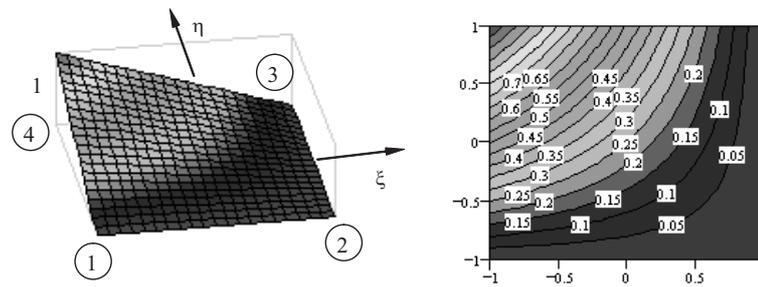


Figura 3.13: Función de forma  $N_4(\xi, \eta)$  del elemento rectangular del nodo 4.

### 3.3.2. Elementos Rectangulares de 9 Nodos

El elemento bidimensional de 9 nodos tiene 3 nodos en cada dirección, como se muestra en la Figura 3.14. Para la obtención de la función de forma del nodo 1, se utiliza el polinomio de grado 2 según la dirección  $\xi$ , formado por los puntos 1, 2, y 3, y multiplicado por el polinomio según la dirección  $\eta$ , que pasa por los puntos (nodos) 1, 8, y 7, es decir:

$$N_1(\xi, \eta) = N_1^{(2)}(\xi)N_1^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1), \quad (3.40)$$

que se muestra en la Figura 3.15, y donde:

$$N_1^{(2)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{\xi}{2}(\xi - 1), \quad (3.41)$$

y

$$N_1^{(2)}(\eta) = \frac{(\eta - \eta_8)(\eta - \eta_7)}{(\eta_1 - \eta_8)(\eta_1 - \eta_7)} = \frac{\eta}{2}(\eta - 1). \quad (3.42)$$

Para la obtención de la función de forma en el nodo 2, se utiliza el polinomio según la dirección  $\xi$  que pasa por los puntos 1, 2, y 3, y multiplicado por el polinomio según la dirección  $\eta$  formado por los nodos 2, 9, y 6 (véase la Figura 3.16):

$$N_2(\xi, \eta) = N_2^{(2)}(\xi)N_2^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(\eta - 1), \quad (3.43)$$

donde:

$$N_2^{(2)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = (1 - \xi^2), \quad (3.44)$$

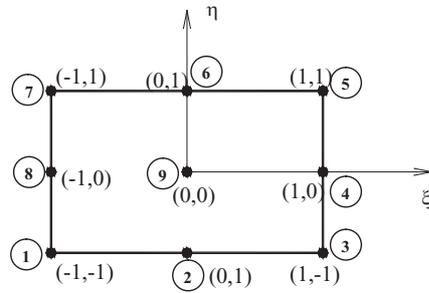


Figura 3.14: Elemento rectangular de 9 nodos.

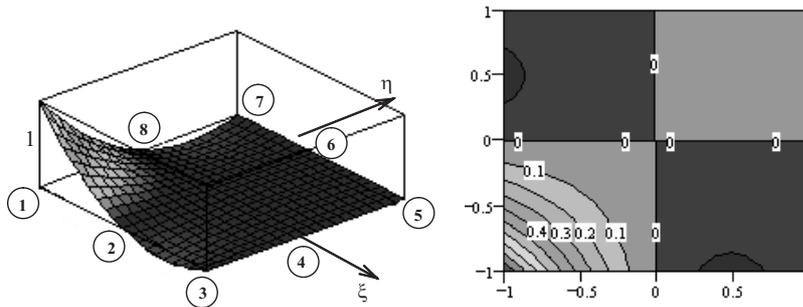


Figura 3.15: Función de forma  $N_1$  del elemento bidimensional de 9 nodos.

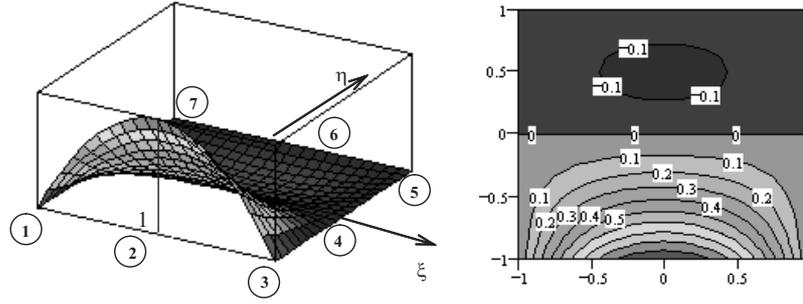


Figura 3.16: Función de forma  $N_2$  del elemento de 9 nodos.

y

$$N_2^{(2)}(\eta) = \frac{(\eta - \eta_9)(\eta - \eta_6)}{(\eta_2 - \eta_9)(\eta_2 - \eta_6)} = \frac{\eta}{2}(1 - \eta). \quad (3.45)$$

Análogamente, se pueden obtener las demás funciones de forma, que quedan de la siguiente manera:

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(\eta - 1) \quad (3.46)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (3.47)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (3.48)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad (3.49)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(1 + \eta) \quad (3.50)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2) \quad (3.51)$$

$$N_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad (3.52)$$

y que al igual que en los casos anteriores cumplen la condición de valer 1 en los nodos asociados y 0 en el resto, y sumar 1 a lo largo de todo el dominio del elemento.

### 3.3.3. Elemento Rectangular de 16 Nodos

El elemento rectangular bidimensional de 16 nodos se muestra en la Figura 3.19. La construcción de sus funciones de forma se hace a partir de la combinación de las funciones de forma unidimensionales cúbicas según las direcciones  $\xi$  y  $\eta$ . Como ejemplo, se calcula la función de forma del nodo 10, y en la que se emplea el polinomio de Lagrange del elemento cúbico unidimensional correspondiente al nodo 1 (véase la Figura 3.20) asociado a la dirección  $\xi$  y que pasa por los puntos 10, 9, 8, y 7, multiplicado por el polinomio de Lagrange del elemento cúbico unidimensional que pasa por los puntos 1, 12, 11, y 10, correspondiente al nodo 4 (véase la Figura 3.20) asociado a la dirección  $\eta$ . La función de forma definitiva queda como:

$$N_{10}(\xi, \eta) = N_1^{(3)}(\xi)N_4^{(3)}(\eta), \quad (3.53)$$

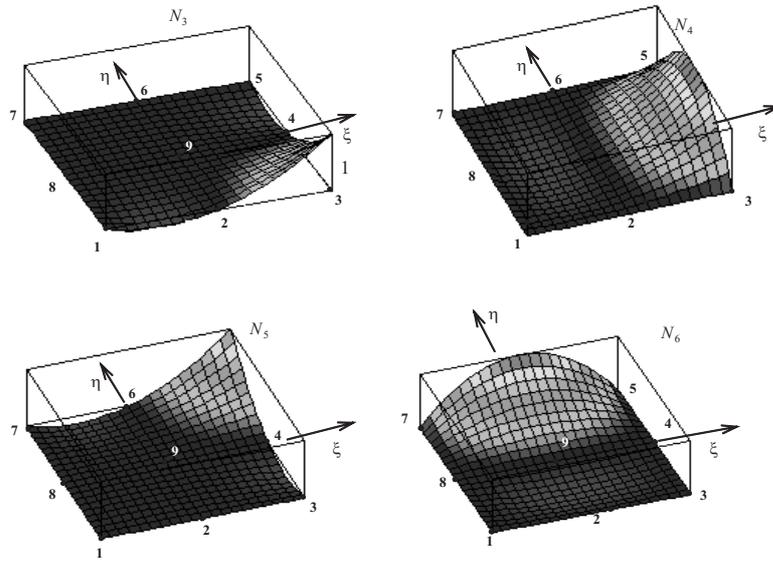


Figura 3.17: Funciones de forma  $N_3$ ,  $N_4$ ,  $N_5$ , y  $N_6$  del elemento rectangular de 9 nodos.

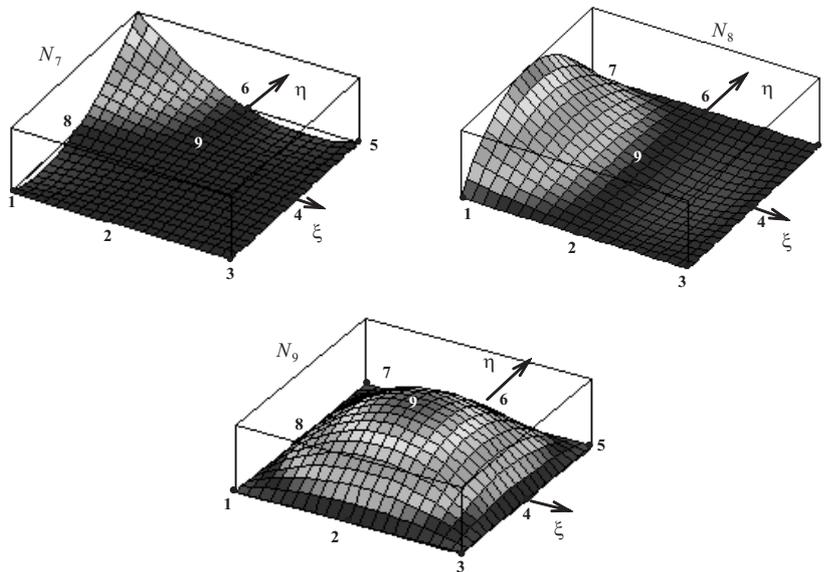


Figura 3.18: Funciones de forma  $N_7$ ,  $N_8$ , y  $N_9$  del elemento rectangular de 9 nodos.

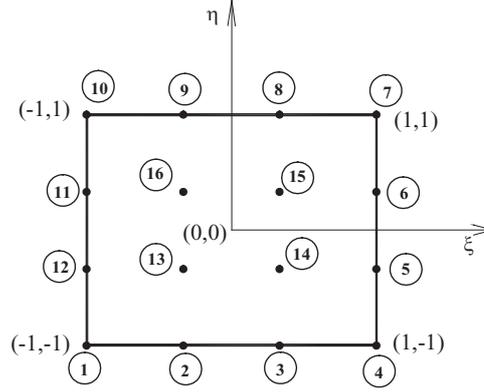


Figura 3.19: Elemento finito rectangular de 16 nodos.

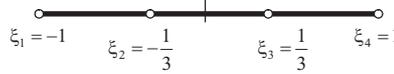


Figura 3.20: Elemento cúbico unidimensional.

donde las funciones  $N_1^{(3)}(\xi)$  y  $N_4^{(3)}(\eta)$  son las obtenidas para el elemento unidimensional de 4 puntos mostrado en la Figura 3.20:

$$\begin{aligned} N_1^{(3)}(\xi) &= \frac{1}{16} (9\xi^2 - 1) (1 - \xi); & N_1^{(3)}(\eta) &= \frac{1}{16} (9\eta^2 - 1) (1 - \eta) \\ N_2^{(3)}(\xi) &= \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 - 3\xi); & N_2^{(3)}(\eta) &= \frac{9}{16} (1 - \eta^2) (1 - 3\eta) \\ N_3^{(3)}(\xi) &= \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 + 3\xi); & N_3^{(3)}(\eta) &= \frac{9}{16} (1 - \eta^2) (1 + 3\eta) \\ N_4^{(3)}(\xi) &= \frac{1}{16} (9\xi^2 - 1) (1 + \xi); & N_4^{(3)}(\eta) &= \frac{1}{16} (9\eta^2 - 1) (1 + \eta). \end{aligned}$$

Resultando que la función de forma  $N_{10}$  queda como:

$$\begin{aligned} N_{10}(\xi, \eta) &= \frac{1}{16}(\xi - 1)(1 - 9\xi^2) \frac{1}{16}(1 + \eta)(9\eta^2 - 1) \\ &= \frac{1}{256}(\xi - 1)(1 - 9\xi^2)(1 + \eta)(9\eta^2 - 1), \end{aligned} \quad (3.54)$$

que se muestra en la Figura 3.21.

Análogamente, se pueden obtener las demás funciones de forma:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= N_1^{(3)}(\xi)N_1^{(3)}(\eta); & N_2(\xi, \eta) &= N_2^{(3)}(\xi)N_1^{(3)}(\eta); & N_3(\xi, \eta) &= N_3^{(3)}(\xi)N_1^{(3)}(\eta); \\ N_4(\xi, \eta) &= N_4^{(3)}(\xi)N_1^{(3)}(\eta); & N_5(\xi, \eta) &= N_4^{(3)}(\xi)N_2^{(3)}(\eta); & N_6(\xi, \eta) &= N_4^{(3)}(\xi)N_3^{(3)}(\eta); \\ N_7(\xi, \eta) &= N_4^{(3)}(\xi)N_4^{(3)}(\eta); & N_8(\xi, \eta) &= N_3^{(3)}(\xi)N_4^{(3)}(\eta); & N_9(\xi, \eta) &= N_2^{(3)}(\xi)N_4^{(3)}(\eta); \\ N_{10}(\xi, \eta) &= N_1^{(3)}(\xi)N_4^{(3)}(\eta); & N_{11}(\xi, \eta) &= N_1^{(3)}(\xi)N_3^{(3)}(\eta); & N_{12}(\xi, \eta) &= N_1^{(3)}(\xi)N_2^{(3)}(\eta); \\ N_{13}(\xi, \eta) &= N_2^{(3)}(\xi)N_2^{(3)}(\eta); & N_{14}(\xi, \eta) &= N_3^{(3)}(\xi)N_2^{(3)}(\eta); & N_{15}(\xi, \eta) &= N_3^{(3)}(\xi)N_3^{(3)}(\eta); \\ N_{16}(\xi, \eta) &= N_2^{(3)}(\xi)N_3^{(3)}(\eta), \end{aligned} \quad (3.55)$$

que cumplen que su valor es 1 en el nodo asociado y 0 en los demás, y además su suma es igual a 1 en todo el dominio rectangular del elemento.

**Comentario 3.4** *Nótese que los elementos rectangulares definidos anteriormente son paralelos a los ejes coordenados.* ■

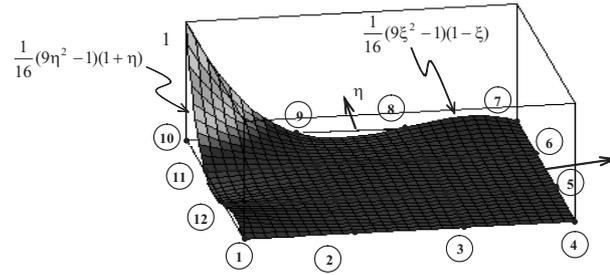


Figura 3.21: Función de forma del nodo 10 dentro del elemento finito rectangular de 16 nodos.

### 3.3.4. Funciones de Forma de Elementos Triangulares

Antes de definir las funciones de forma para elementos triangulares, es necesario introducir el concepto de coordenadas de área, que constituyen el sistema de referencia necesario para definir las funciones de forma en elementos triangulares de forma sencilla. Por otro lado también simplifican de forma considerable su integración.

#### 3.3.4.1. Coordenadas de Área

En el caso de que el dominio del elemento sea triangular en vez de rectangular, es conveniente expresar la posición de un punto arbitrario  $P(x, y)$  en función de las coordenadas de área  $(L_1, L_2, L_3)$ , que constituyen el nuevo sistema de referencia. A continuación, se muestra como deducirlas.

Considérese la Figura 3.22, de la que por semejanza de triángulos se obtiene que:

$$\frac{1}{h} = \frac{L_1}{h_1} \Rightarrow L_1 = \frac{h_1}{h}. \quad (3.56)$$

Dado que se pueden expresar las áreas de los triángulos  $A$  y  $A_1$ , respectivamente, como:

$$A_1 = \frac{bh_1}{2} \Rightarrow h_1 = \frac{2A_1}{b}, \quad (3.57)$$

y

$$A = \frac{bh}{2} \Rightarrow h = \frac{2A}{b}, \quad (3.58)$$

y considerando las ecuaciones (3.56)-(3.58), se deduce que:

$$L_1 = \frac{\frac{2A_1}{b}}{\frac{2A}{b}} = \frac{A_1}{A}. \quad (3.59)$$

En la Figura 3.22 se muestra la evolución del valor de la función de forma  $L_1$  dentro del elemento.

Análogamente, se cumple que  $L_2 = \frac{A_2}{A}$  y  $L_3 = \frac{A_3}{A}$ , por lo que quedan definidas las coordenadas de área (véase la Figura 3.23) como:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad ; \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad ; \quad L_3 = \frac{A_3}{A}. \quad (3.60)$$

Si se considera que  $A = A_1 + A_2 + A_3$ , la suma de las coordenadas de área queda de la siguiente manera:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1, \quad (3.61)$$

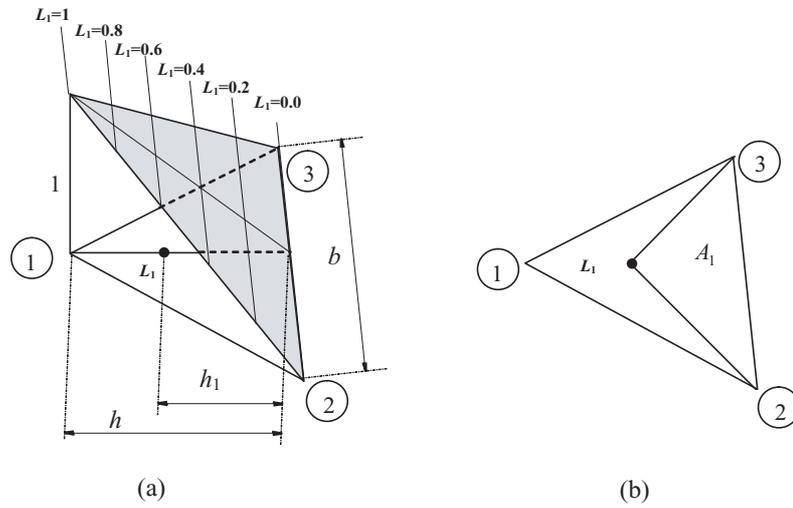


Figura 3.22: Variación de la coordenada de área  $L_1$  dentro del elemento.

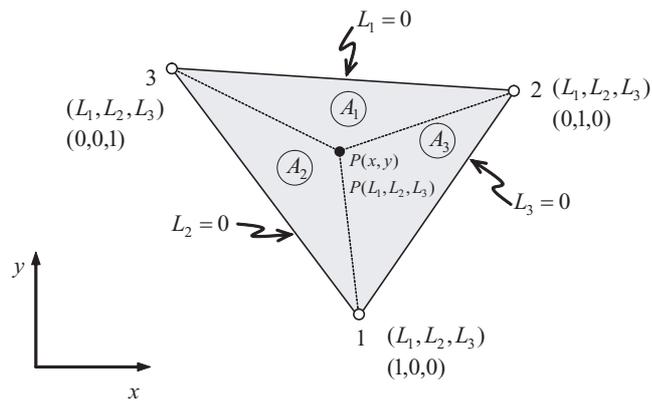


Figura 3.23: Relación entre las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  y las coordenadas de área  $(L_1, L_2, L_3)$ .

y cuyo resultado es análogo al de las funciones de forma lagrangianas.

La relación entre las coordenadas naturales y cartesianas viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} x = x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 \\ y = y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3. \end{cases} \quad (3.62)$$

Teniendo en cuenta que han de cumplirse (3.61) y (3.62), se puede definir la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.63)$$

de la que calculando la inversa se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - y_2x_3) & -(y_3 - y_2) & (x_3 - x_2) \\ -(x_1y_3 - y_1x_3) & (y_3 - y_1) & -(x_3 - x_1) \\ (x_1y_2 - y_1x_2) & -(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}, \quad (3.64)$$

expresión esta última en la que el área del elemento se puede calcular mediante la fórmula del determinante:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Dada una función cualquiera en función de las coordenadas de área,  $f = f(L_1, L_2, L_3)$ , su derivada con respecto a las coordenadas cartesianas es igual a:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y}, \end{cases} \quad (3.65)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial x} &= \frac{y_2 - y_3}{2A} = \frac{b_1}{2A} & ; & \quad \frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{2A} = \frac{c_1}{2A} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} &= \frac{y_3 - y_1}{2A} = \frac{b_2}{2A} & ; & \quad \frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{2A} = \frac{c_2}{2A} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} &= \frac{y_1 - y_2}{2A} = \frac{b_3}{2A} & ; & \quad \frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{2A} = \frac{c_3}{2A}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Otro aspecto importante de emplear las funciones de forma en coordenadas de área es su sencillez de integración para el cálculo posterior de matrices de rigidez. Para ello únicamente es necesario considerar las siguientes expresiones correspondientes a la integración a lo largo de una línea, en un área o en un volumen, respectivamente:

$$\int_S L_1^a L_2^b dS = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} S \quad (3.67)$$

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A \quad (3.68)$$

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 3!V, \quad (3.69)$$

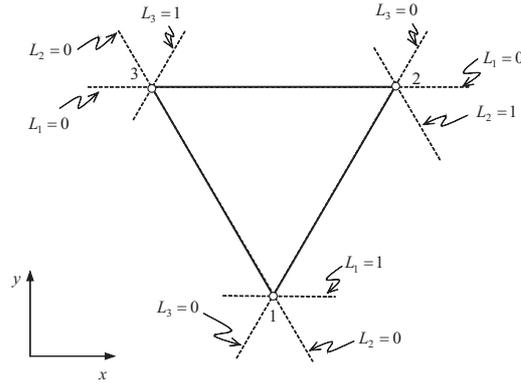


Figura 3.24: Elemento triangular de tres nodos.

en la que  $S$  es la longitud del elemento de integración,  $A$  es el área,  $V$  el volumen, y  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$  es el factorial de  $n$ .

**Ejemplo ilustrativo 3.1 (Integración con coordenadas de área).** Integrar la siguiente expresión  $15L_1^2L_2$  a lo largo del elemento triangular en el que están definidas las funciones de forma.

**Solución:** Empleando la ecuación (3.68), con los siguientes valores de los coeficientes  $a = 2$ ,  $b = 1$  y  $c = 0$ , se obtiene que:

$$\int_A 15L_1^2L_2 dA = \int_A 15L_1^2L_2L_3^0 dA = 15 \frac{2!1!0!}{(2+1+0+2)!} 2A = \frac{A}{2}.$$

■

### 3.3.4.2. Elemento Triangular de 3 Nodos

El elemento triangular más sencillo que se puede emplear es el de 3 nodos, tal y como se muestra en la Figura 3.24.

Nótese que el nodo 1 únicamente depende de la coordenada de área  $L_1$ , ya que en este nodo  $L_2 = L_3 = 0$ . Para obtener su función de forma asociada se emplea el polinomio de Lagrange con dos puntos  $n = 2$ , de la siguiente manera:

$$N_1(L_1) = \frac{(L_1 - L_1^{(2-3)})}{(L_1^{(1)} - L_1^{(2-3)})} = \frac{(L_1 - 0)}{(1 - 0)} = L_1, \quad (3.70)$$

donde  $L_1^{(2-3)}$  es el valor de la coordenada de área  $L_1$  en la arista que une los nodos 2 y 3.

Análogamente se calculan las funciones de forma en los nodos 2 y 3, con lo que se puede concluir que éstas coinciden con las coordenadas de área, tal y como se muestra en la Figura 3.25, es decir que:

$$N_1 = L_1 = 1 - L_2 - L_3 \quad ; \quad N_2 = L_2 \quad ; \quad N_3 = L_3. \quad (3.71)$$

Además teniendo en cuenta (3.61) se comprueba que la suma de las funciones de forma en el elemento es igual a 1.

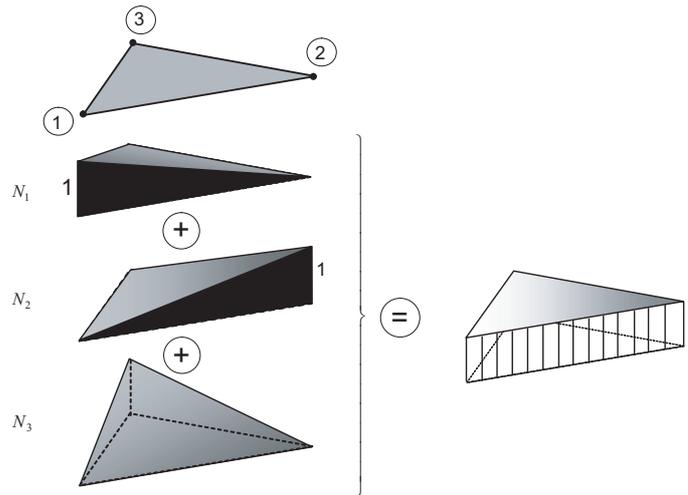


Figura 3.25: Funciones de forma del elemento triangular de 3 nodos.

### 3.3.4.3. Elemento Triangular de 6 Nodos

La obtención de las funciones de forma del elemento triangular de 6 nodos mostrado en la Figura 3.26, se obtiene mediante el polinomio de Lagrange con tres puntos ( $n = 3$ ). Así en el nodo 1:

$$N_1(L_1) = \frac{(L_1 - L_1^{(4-6)})(L_1 - L_1^{(2-3)})}{(L_1^{(1)} - L_1^{(4-6)})(L_1^{(1)} - L_1^{(2-3)})} = \frac{(L_1 - 1/2)(L_1 - 0)}{(1 - 1/2)(1 - 0)} \quad (3.72)$$

$$= L_1(2L_1 - 1), \quad (3.73)$$

donde  $L_1^{(2-3)}$  y  $L_1^{(4-6)}$  son los valores de las coordenadas de área  $L_1$  en las aristas que unen los nodos 2 y 3, y 4 y 6, respectivamente.

Análogamente para los demás nodos de las esquinas, cuyas funciones de forma quedan como:

$$N_2(L_2) = \frac{(L_2 - L_2^{(4-5)})(L_2 - L_2^{(1/3)})}{(L_2^{(2)} - L_2^{(4-5)})(L_2^{(2)} - L_2^{(1-3)})} = L_2(2L_2 - 1) \quad (3.74)$$

$$N_3(L_3) = \frac{(L_3 - L_3^{(6/5)})(L_3 - L_3^{(1/2)})}{(L_3^{(3)} - L_3^{(6/5)})(L_3^{(3)} - L_3^{(1/2)})} = L_3(2L_3 - 1). \quad (3.75)$$

En los nodos pertenecientes a los lados del triángulo, como por ejemplo el nodo 4 que no depende de la coordenada  $L_3$ . Se calculan los polinomios de Lagrange de grado 1 en cada dirección  $L_1$  y  $L_2$  y se multiplican, con lo que se obtiene:

$$N_4(L_1, L_2) = 4L_1L_2, \quad (3.76)$$

donde el polinomio en la dirección  $L_1$  es igual a:

$$N_4(L_1) = \frac{(L_1 - L_1^{(2-3)})}{(L_1^{(4)} - L_1^{(2-3)})} = \frac{(L_1 - 0)}{(\frac{1}{2} - 0)} = 2L_1, \quad (3.77)$$

mientras que en la dirección  $L_2$ :

$$N_4(L_2) = \frac{(L_2 - L_2^{(1-3)})}{(L_2^{(4)} - L_2^{(1-3)})} = \frac{(L_2 - 0)}{(\frac{1}{2} - 0)} = 2L_2. \quad (3.78)$$

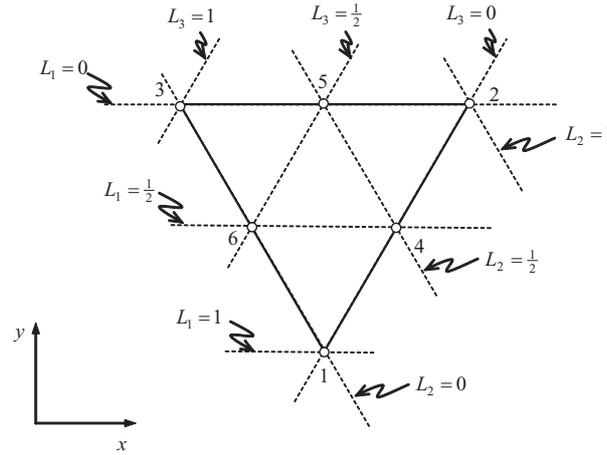


Figura 3.26: Coordenadas de área correspondientes al elemento triangular de 6 nodos.

El nodo 5 (véase la Figura 3.26) únicamente depende de las coordenadas  $L_2$  y  $L_3$ , y por tanto el polinomio en la dirección  $L_2$  es igual a:

$$N_5(L_2) = \frac{(L_2 - L_2^{(1-3)})}{(L_2^{(5)} - L_2^{(1-3)})} = 2L_2, \quad (3.79)$$

mientras que en la dirección  $L_3$  queda como:

$$N_5(L_3) = \frac{(L_3 - L_3^{(1/2)})}{(L_3^{(5)} - L_3^{(1-2)})} = 2L_3, \quad (3.80)$$

y la función de forma del nodo 5 resulta en:

$$N_5(L_2, L_3) = 4L_2L_3. \quad (3.81)$$

Por último, el nodo 6 depende de las coordenadas  $(L_1, L_3)$ , y por tanto, el polinomio en la dirección  $L_1$  es:

$$N_6(L_1) = \frac{(L_1 - L_1^{(2-3)})}{(L_1^{(6)} - L_1^{(2-3)})} = 2L_1, \quad (3.82)$$

mientras que en la dirección  $L_3$  queda como:

$$N_6(L_3) = \frac{(L_3 - L_3^{(1-2)})}{(L_3^{(6)} - L_3^{(1-2)})} = 2L_3, \quad (3.83)$$

resultando en:

$$N_6(L_1, L_3) = 4L_1L_3. \quad (3.84)$$

Nótese que la suma de todas las funciones de forma en el elemento suman 1, como es necesario para que estén correctamente definidas.

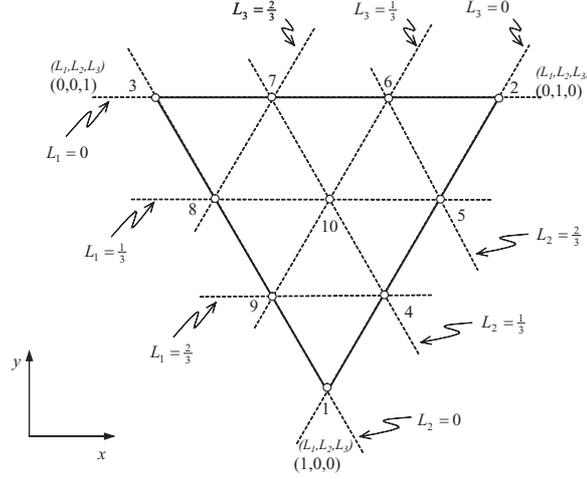


Figura 3.27: Coordenadas de área del elemento triangular de 10 nodos.

### 3.3.4.4. Elemento Triangular de 10 Nodos

Para el elemento triangular de 10 nodos, mostrado en la Figura 3.27, se sigue el mismo procedimiento que para los elementos triangulares de 3 y 6 nodos.

Comenzando por los nodos de las esquinas, la función de forma del nodo 1 se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(L_1 - L_1^{(4-9)}) (L_1 - L_1^{(5-8)}) (L_1 - L_1^{(2-3)})}{(L_1^{(1)} - L_1^{(4-9)}) (L_1^{(1)} - L_1^{(5-8)}) (L_1^{(1)} - L_1^{(2-3)})} \\ &= \frac{(L_1 - \frac{2}{3}) (L_1 - \frac{1}{3}) (L_1 - 0)}{(1 - \frac{2}{3}) (1 - \frac{1}{3}) (1 - 0)}, \end{aligned}$$

que simplificando queda como:

$$N_1 = \frac{1}{2} L_1 (3L_1 - 2)(3L_1 - 1). \quad (3.85)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para los nodos 2 y 3, se obtiene:

$$N_2 = \frac{1}{2} L_2 (3L_2 - 2)(3L_2 - 1) \quad (3.86)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} L_3 (3L_3 - 2)(3L_3 - 1). \quad (3.87)$$

Para el nodo 4, que únicamente depende de las coordenadas  $L_1$  y  $L_2$ , se tiene que su función de forma según la dirección  $L_1$  es:

$$N_4(L_1) = \frac{(L_1 - L_1^{(5-8)}) (L_1 - L_1^{(2-3)})}{(L_1^{(4)} - L_1^{(5-8)}) (L_1^{(4)} - L_1^{(2-3)})} = \frac{3}{2} L_1 (3L_1 - 1),$$

mientras que para la dirección  $L_2$  :

$$N_4(L_2) = \frac{(L_2 - L_2^{(3/1)})}{(L_2^{(4)} - L_2^{(3/1)})} = 3L_2,$$

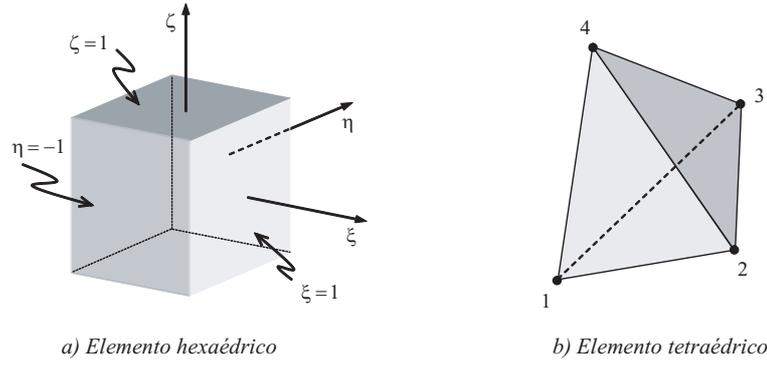


Figura 3.28: Elementos tridimensionales: a) hexaédrico recto, y b) tetraédrico.

con lo que la función de forma definitiva resulta del producto de las anteriores:

$$N_4(L_1, L_2) = N_4(L_1)N_4(L_2) = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1). \quad (3.88)$$

Análogamente, se calculan las funciones de forma para los nodos 5, 6, 7, 8, y 9:

$$N_4 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1) \quad (3.89)$$

$$N_5 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1) \quad (3.90)$$

$$N_6 = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2 - 1) \quad (3.91)$$

$$N_7 = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3 - 1) \quad (3.92)$$

$$N_8 = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_3 - 1) \quad (3.93)$$

$$N_9 = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_1 - 1). \quad (3.94)$$

Por último, para el nodo 10 que depende de las coordenadas  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  (véase la Figura 3.27), su función de forma es:

$$N_{10} = 27L_1L_2L_3. \quad (3.95)$$

Las expresiones de las funciones de forma para elementos triangulares en función de las coordenadas de área se muestran resumidas en la Tabla 3.2.

### 3.4. Funciones de Forma de Elementos Tridimensionales

En esta sección se exponen las funciones de forma para elementos tridimensionales. Únicamente se consideran los elementos hexaédricos de 8 y 27 nodos y el tetraédrico de 4 nodos, tal y como se muestran en la Figura 3.28.

#### 3.4.1. Elemento Hexaédrico Recto de 8 Nodos

En la Figura 3.29 se puede apreciar el elemento hexaédrico de 8 nodos. Análogamente a como se obtuvieron las funciones de forma para los elementos bidimensionales, a partir de las

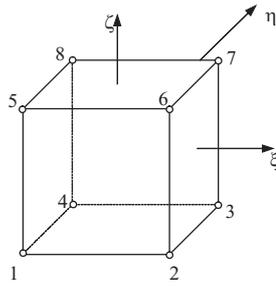


Figura 3.29: Elemento hexaédrico recto de 8 nodos.

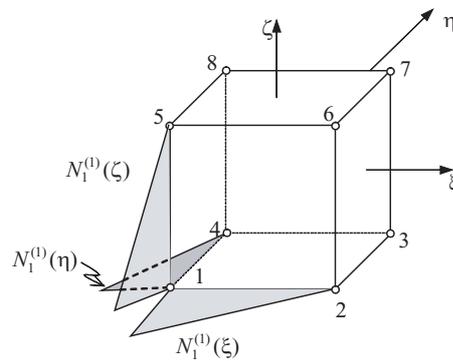


Figura 3.30: Función de forma del nodo 1 del hexaedro de 8 nodos.

combinaciones de las funciones de forma en cada dirección, para los elementos hexaédricos rectos las funciones de forma se obtienen combinando los polinomios de Lagrange en cada una de las tres direcciones  $(\xi, \eta, \zeta)$ , tal y como se indica en la Figura 3.30.

Para el caso concreto del nodo 1 se obtiene mediante el producto del polinomio de Lagrange lineal unidimensional según cada una de las tres direcciones, tal y como se muestran en la Figura 3.30:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= N_1^{(1)}(\xi) N_1^{(1)}(\eta) N_1^{(1)}(\zeta) \\ &= \frac{1}{2}(1-\xi) \frac{1}{2}(1-\eta) \frac{1}{2}(1-\zeta), \end{aligned} \quad (3.96)$$

que simplificando queda como:

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta). \quad (3.97)$$

Análogamente, se pueden obtener las funciones de forma para los demás nodos:

$$N_2(\xi, \eta, \zeta) = N_2^{(1)}(\xi) N_1^{(1)}(\eta) N_1^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \quad (3.98)$$

$$N_3(\xi, \eta, \zeta) = N_2^{(1)}(\xi) N_2^{(1)}(\eta) N_1^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \quad (3.99)$$

$$N_4(\xi, \eta, \zeta) = N_1^{(1)}(\xi) N_2^{(1)}(\eta) N_1^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \quad (3.100)$$

$$N_5(\xi, \eta, \zeta) = N_1^{(1)}(\xi) N_1^{(1)}(\eta) N_2^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \quad (3.101)$$

$$N_6(\xi, \eta, \zeta) = N_2^{(1)}(\xi) N_1^{(1)}(\eta) N_2^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \quad (3.102)$$

$$N_7(\xi, \eta, \zeta) = N_2^{(1)}(\xi) N_2^{(1)}(\eta) N_2^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \quad (3.103)$$

$$N_8(\xi, \eta, \zeta) = N_1^{(1)}(\xi) N_2^{(1)}(\eta) N_2^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta). \quad (3.104)$$

Se puede comprobar que las funciones de forma valen 1 en cada nodo asociado y 0 en los demás, y la suma de todas las funciones de forma a lo largo de todo el elemento suman 1.

### 3.4.2. Elemento Hexaédrico de 27 Nodos

El elemento hexaédrico de 27 nodos se muestra en la Figura 3.31. Las funciones de forma se obtienen siguiendo el mismo procedimiento que en casos anteriores (véase [Oñate, 1992]). De esta manera:

- Para los nodos de las esquinas (1-8):

$$N_i = \frac{1}{8} (\xi^2 + \xi\xi_i) (\eta^2 + \eta\eta_i) (\zeta^2 + \zeta\zeta_i) \quad ; \quad i = \begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \\ 5, 6, 7, 8. \end{matrix} \quad (3.105)$$

- Para los nodos de las aristas:

$$N_i = \frac{1}{4} \eta_i^2 (\eta^2 - \eta\eta_i) \zeta_i^2 (\zeta^2 - \zeta\zeta_i) (1 - \xi^2) + \frac{1}{4} \zeta_i^2 (\zeta^2 - \zeta\zeta_i) + \xi_i^2 (\xi^2 - \xi\xi_i) (1 - \eta^2) + \frac{1}{4} \xi_i^2 (\xi^2 - \xi\xi_i) \eta_i^2 (\eta^2 - \eta\eta_i) (1 - \zeta^2) \quad ; \quad i = \begin{matrix} 9, 10, 11, 12 \\ 13, 14, 15, 16 \\ 17, 18, 19, 20. \end{matrix} \quad (3.106)$$

- Para los nodos de los centros de las caras:

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (\zeta^2 - \zeta_i\zeta^2) + \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2) (\xi^2 - \xi_i^2\xi^2) + \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \zeta^2) (\eta^2 - \eta_i\eta^2) \quad ; \quad i = \begin{matrix} 21, 22, 23 \\ 24, 25, 26. \end{matrix} \quad (3.107)$$

- Por último, para el nodo central:

$$N_{27} = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2). \quad (3.108)$$

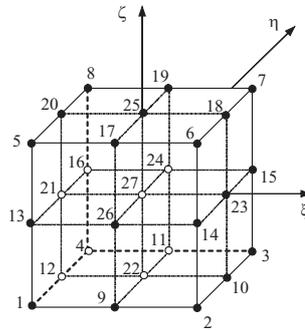


Figura 3.31: Elemento de 27 nodos.

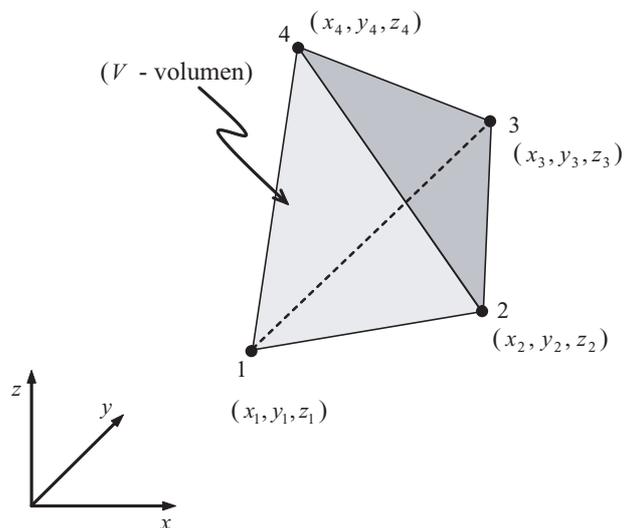


Figura 3.32: Elemento tetraédrico de 4 nodos.

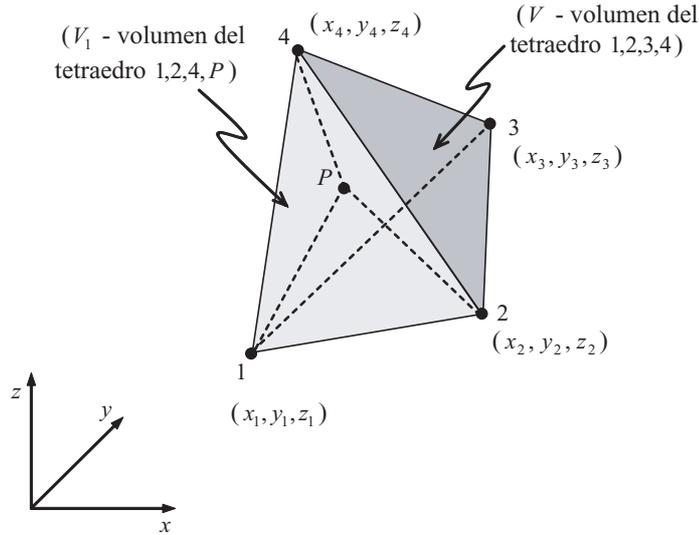


Figura 3.33: Coordenadas de volumen del nodo 3 para el elemento tetraédrico de 4 nodos.

### 3.4.3. Elemento Tetraédrico de 4 Nodos

De la misma manera que se definieron las coordenadas de área para los elementos triangulares, se pueden definir las coordenadas de volumen para elementos tetraédricos (véase la Figura 3.32).

En las coordenadas de volumen  $L_1, L_2, L_3, L_4$ , cada coordenada  $L_i$  se refiere al cociente entre el volumen del tetraedro formado por un punto  $P$  interior al elemento y la cara opuesta al nodo  $i$  y el volumen total del tetraedro, tal y como se muestra en la Figura 3.33.

La expresión explícita de las funciones de forma  $L_i$  se obtiene empleando las coordenadas volumétricas, que son análogas a las coordenadas de área, y se obtienen calculando los volúmenes mediante la fórmula del determinante:

$$N_i = \frac{V_i}{V} = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + h_i z); \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.109)$$

donde  $V$  es el volumen del tetraedro que se calcula como:

$$V = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.110)$$

mientras que los coeficientes  $a_i, b_i, c_i, h_i$  se obtienen calculando el volumen del tetraedro generado por un punto genérico dentro del tetraedro inicial  $(x, y, z)$  y los tres nodos correspondientes a la cara opuesta al punto respecto al cual se desea calcular la función de forma. Para ello basta tener en cuenta que el volumen  $V_i$  se calcula mediante la expresión (3.110) sin más que sustituir las coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  por las coordenadas del punto genérico  $(x, y, z)$ . Así por ejemplo, el volumen que me permite calcular la función de forma asociada al nodo 2 se obtiene como:

$$V_2 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

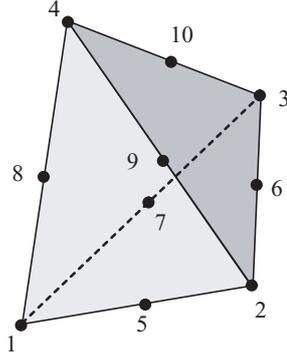


Figura 3.34: Elemento tetraédrico de 10 nodos.

donde se ha sustituido en la segunda fila de la expresión (3.110) el punto  $(x_2, y_2, z_2)$  por el punto genérico  $(x, y, z)$ . Desarrollando el determinante partiendo de la fila con el punto genérico  $(x, y, z)$  se pueden obtener los coeficientes  $a_i, b_i, c_i$ , y  $h_i$ .

Nótese que las coordenadas volumétricas están relacionadas con las coordenadas  $x, y$ , y  $z$  mediante las siguientes expresiones:

$$x = \sum_{i=1}^4 L_i x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^4 L_i y_i \quad ; \quad z = \sum_{i=1}^4 L_i z_i, \quad (3.111)$$

mientras que las derivadas de las coordenadas de volumen con respecto a las coordenadas cartesianas son:

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{6V} b_i \quad ; \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{1}{6V} c_i \quad ; \quad \frac{\partial L_i}{\partial z} = \frac{1}{6V} d_i. \quad (3.112)$$

#### 3.4.4. Elemento Tetraédrico de 10 Nodos

Para el caso del elemento tetraédrico de 10 nodos mostrado en la Figura 3.34, las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 & ; & & N_6 &= 4L_2L_3 \\ N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 & ; & & N_7 &= 4L_1L_3 \\ N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 & ; & & N_8 &= 4L_1L_4 \\ N_4 &= (2L_4 - 1)L_4 & ; & & N_9 &= 4L_2L_4 \\ N_5 &= 4L_1L_2 & ; & & N_{10} &= 4L_3L_4. \end{aligned} \quad (3.113)$$

que se obtienen de forma análoga a los casos anteriores.

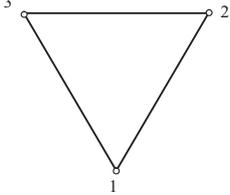
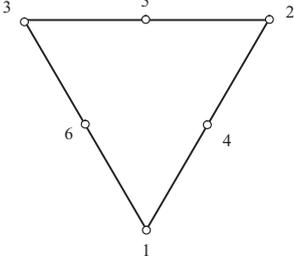
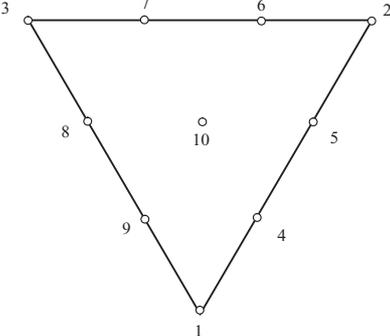
Función de forma del elemento triangular de 3 nodos	
	$N_1 = L_1$ $N_2 = L_2$ $N_3 = L_3$
Función de forma del elemento triangular de 6 nodos	
	$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$ $N_2 = L_2(2L_2 - 1)$ $N_3 = L_3(2L_3 - 1)$ $N_4 = 4L_1L_2$ $N_5 = 4L_2L_3$ $N_6 = 4L_1L_3$
Función de forma del elemento triangular de 10 nodos	
	$N_1 = \frac{1}{2}L_1(3L_1 - 2)(3L_1 - 1)$ $N_2 = \frac{1}{2}L_2(3L_2 - 2)(3L_2 - 1)$ $N_3 = \frac{1}{2}L_3(3L_3 - 2)(3L_3 - 1)$ $N_4 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$ $N_5 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1)$ $N_6 = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2 - 1)$ $N_7 = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3 - 1)$ $N_8 = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_3 - 1)$ $N_9 = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_1 - 1)$ $N_{10} = 27L_1L_2L_3$

Tabla 3.2: Resumen de las funciones de forma para elementos triangulares.



---

## Capítulo 4

# Resolución de Sistemas Constituidos por Barras Mediante el MEF

---

En este capítulo se describe la metodología sistemática para la resolución de sistemas estructurales constituidos por barras interconectadas por los nodos, como es el caso de las celosías. Su aplicación se puede extender a diversas estructuras, tales como puentes, cubiertas, torres de alta tensión, estructuras geodésicas, etc.

Los elementos estructurales que constituyen las celosías interconectadas con nodos articulados tienen la característica de resistir únicamente esfuerzos axiales (tracción o compresión), y las cargas únicamente pueden aplicarse en los nodos de unión de las barras. Para un estudio más adecuado del problema se ha de prestar un cuidado especial a las barras sometidas a compresión, ya que pueden surgir fenómenos de inestabilidad por pandeo, que no se consideran en este libro.

Con el objetivo de obtener un procedimiento sistemático para la resolución de un sistema de barras, se parte inicialmente de un sistema de muelles en una dimensión, y posteriormente se procede al estudio de barras espaciales, ya sea en el plano o en el espacio.

### 4.1. Resolución de un Sistema de Muelles

Un sistema de muelles viene caracterizado por la unión de varios muelles mediante nodos. Todo muelle (véase la Figura 4.1) tiene una propiedad que lo caracteriza: la *constante elástica del muelle* ( $k$ ), que representa la resistencia que ejerce el muelle a deformarse debido a una fuerza aplicada longitudinalmente, en la que se considera que la relación fuerza-desplazamiento es una relación lineal, tal y como se muestra en la Figura 4.2.

#### 4.1.1. Elemento Tipo Muelle

Supóngase el muelle mostrado en la Figura 4.1. Es un elemento longitudinal compuesto por dos nodos y que únicamente está sometido a fuerzas de tracción o compresión. Para este elemento sólo se consideran como incógnitas los desplazamientos nodales en la dirección del eje del muelle, por lo que se tiene un *grado de libertad* por nodo.

**Definición 4.1 (Grado de libertad).** *Se define como grado de libertad por nodo el número de incógnitas asociadas a cada nodo de la discretización en el problema.* ■

Un elemento de tipo muelle está compuesto por los siguientes elementos:

- Dos nodos  $i, j$  correspondientes a sus extremos.
- Los desplazamientos  $u_i^{(e)}, u_j^{(e)}$  colineales con el eje del muelle en cada extremo.

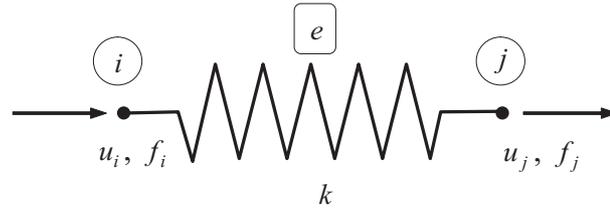


Figura 4.1: Elemento tipo muelle.

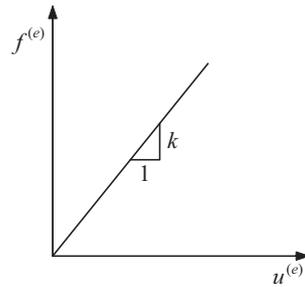


Figura 4.2: Relación fuerza-desplazamiento de un muelle.

- Las fuerzas  $f_i^{(e)}, f_j^{(e)}$  ejercidas en los nodos colineales con el eje del muelle.
- La constante elástica  $k$  del muelle (rigidez).

Nótese que tanto para las fuerzas como para los desplazamientos se emplea el superíndice  $(e)$  para hacer referencia al elemento.

La relación fuerza-desplazamiento del muelle se supone lineal de la siguiente manera:

$$f = ku, \quad (4.1)$$

donde  $f$  es la fuerza de tracción ( $f^{(e)} > 0$ ), y  $u^{(e)}$  es el alargamiento total sufrido por el muelle. En la Figura 4.2 se muestra la gráfica que relaciona la fuerza  $f^{(e)}$  con el desplazamiento  $u^{(e)}$ . Como puede apreciarse es una relación lineal, de forma que la pendiente de la recta es igual a la constante del muelle  $k$ .

**Comentario 4.1** Podemos hacer una analogía con el problema elástico lineal, donde la relación fuerza-desplazamiento del muelle es análoga a la Ley de Hooke en una dimensión:

$$f = ku \iff \sigma = E\varepsilon$$

donde  $\sigma$  es la tensión,  $\varepsilon$  es la deformación y  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal. ■

Para que el muelle esté en equilibrio ha de cumplirse que la suma de las fuerzas colineales al muelle sean cero:

$$f_i^{(e)} + f_j^{(e)} = 0 \Rightarrow f_i^{(e)} = -f_j^{(e)} = -f^{(e)} \quad (4.2)$$

donde  $f^{(e)}$  es la fuerza ( $f^{(e)} > 0$ , si actúa de izquierda a derecha) que actúa sobre los nodos del muelle.

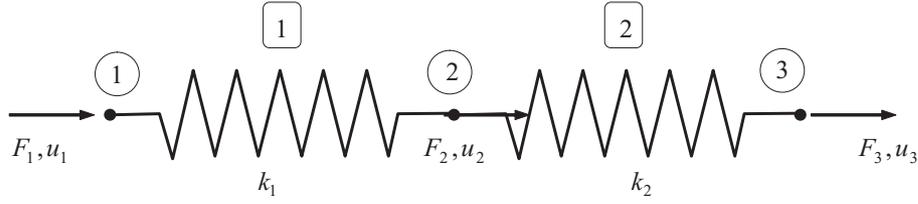


Figura 4.3: Sistema de dos muelles en serie.

Particularizando la ecuación (4.1) en los dos nodos del muelle se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Nodo } i: \quad f_i^{(e)} = -f^{(e)} &= -k(u_j^{(e)} - u_i^{(e)}) = ku_j^{(e)} - ku_i^{(e)} \\ \text{Nodo } j: \quad f_j^{(e)} = f^{(e)} &= k(u_j^{(e)} - u_i^{(e)}) = -ku_j^{(e)} + ku_i^{(e)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Reescribiendo la ecuación (4.3) de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i^{(e)} \\ f_j^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

que de forma compacta queda como:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (4.5)$$

donde  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  es matriz de rigidez del elemento,  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$  es el vector de desplazamientos nodales, y  $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$  es el vector de fuerzas aplicadas en los nodos a nivel elemental.

#### 4.1.2. Sistema de Muelles

En la sección anterior se ha estudiado un elemento tipo muelle. Pero ¿qué ocurre si en vez de tener un único muelle se tiene un sistema de muelles, bien en serie, en paralelo o una combinación de ambos? Para entender cómo se trata un problema de este tipo se va a estudiar el ejemplo mostrado en la Figura 4.3. En este caso hay dos muelles en serie que comparten el nodo 2. Antes de proceder con el estudio del sistema formado por los dos muelles se calculan las matrices de rigidez de cada uno de los muelles suponiendo que no están unidos, así para el elemento 1:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad (4.6)$$

mientras que para el elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

donde  $u_i^{(e)}$  es el desplazamiento del nodo  $i$  asociado al elemento  $e$ , y análogamente  $f_i^{(e)}$  es la fuerza actuando en el nodo  $i$  asociada al elemento  $e$ .

#### 4.1.2.1. Ensamblaje de la Matriz de Rigidez

Para proceder a la obtención de una ecuación análoga a (4.5) asociada al sistema de muelles de la Figura 4.3 se ha de proceder a definir las variables que intervienen. Dado que en el sistema de muelles hay tres nodos, el número de grados de libertad totales será 3, y los vectores  $\{\mathbf{F}\}$  y  $\{\mathbf{u}\}$  tendrán la forma (véase la Figura 4.4):

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}, \quad \text{y} \quad \{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.8)$$

donde  $F_i$  y  $u_i$  son las fuerzas externas y desplazamientos asociados al nodo  $i$  del sistema de muelles.

Para obtener la matriz de rigidez del sistema (global) procedemos a plantear el equilibrio en cada uno de los nodos:

$$\begin{aligned} \text{Nodo 1: } F_1 &= f_1^{(1)} \\ \text{Nodo 2: } F_2 &= f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ \text{Nodo 3: } F_3 &= f_2^{(2)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

A continuación se sustituyen los valores de las fuerzas  $f_i^{(e)}$  por valores obtenidos en las ecuaciones (4.6) y (4.7) teniendo en cuenta que  $u_1^{(1)} = u_1$ ,  $u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2$  y  $u_2^{(2)} = u_3$  (ya que se tiene que cumplir la compatibilidad en los desplazamientos), con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 u_1 - k_1 u_2 \\ F_2 &= -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 \\ F_3 &= -k_2 u_2 + k_2 u_3, \end{aligned} \quad (4.10)$$

que expresada en forma matricial queda como:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}; \quad [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.11)$$

donde  $[\mathbf{K}]$  es la matriz de rigidez (global) para el sistema de muelles.

**Comentario 4.2** Es importante recalcar que el cálculo de la matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  y del vector de fuerzas  $\{\mathbf{F}\}$  efectuado hasta este punto nos conduce a un sistema (4.11) con infinitas soluciones, en el que la matriz de rigidez es singular ( $\det[\mathbf{K}] = 0$ ). Para que tenga solución será necesario imponer ciertas condiciones (condiciones de contorno). ■

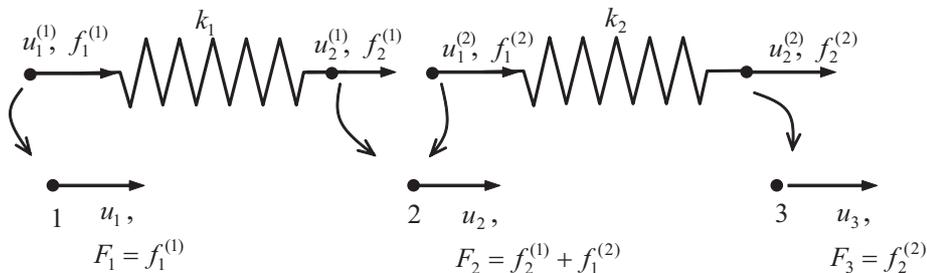


Figura 4.4: Paso del sistema local al global para el ejemplo de dos muelles en paralelo.

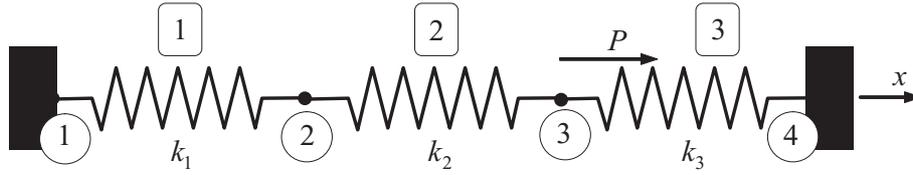


Figura 4.5: Sistema de tres muelles en serie.

**Ejemplo ilustrativo 4.1 (Ensamblaje de un sistema de 3 muelles).** Dado el sistema de muelles mostrado en la Figura 4.5, donde los nodos 1 y 4 están restringidos al movimiento, es decir,  $u_1 = u_4 = 0$  y considerando que:  $k_1 = 100 \text{ N/mm}$ ,  $k_2 = 200 \text{ N/mm}$ ,  $k_3 = 100 \text{ N/mm}$  y  $P = 500 \text{ N}$ . Se pide:

1. Obtener la matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  y el vector de fuerzas  $\{\mathbf{F}\}$  que representan matricialmente el comportamiento del sistema.
2. Calcular los desplazamientos en los nodos 2 y 3.
3. Obtener las fuerzas de reacción en los nodos 1 y 4.
4. Calcular la fuerza de tracción o compresión a la que está sometido el muelle 2.

**Solución:**

Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos son:

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{k}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{k}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

siendo sus unidades  $\text{N/mm}$ .

Análogamente al caso de la sección 4.1.2 se procede a plantear el equilibrio en cada uno de los nodos:

$$\begin{aligned} \text{Nodo 1: } F_1 &= f_1^{(1)} \\ \text{Nodo 2: } F_2 &= f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ \text{Nodo 3: } F_3 &= f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ \text{Nodo 4: } F_4 &= f_2^{(3)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

A continuación se sustituyen los valores de las fuerzas  $f_i^{(e)}$  por los valores obtenidos de las ecuaciones (4.6) y (4.7) teniendo en cuenta que  $u_1^{(1)} = u_1$ ,  $u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2$ ,  $u_2^{(2)} = u_1^{(3)} = u_3$  y  $u_2^{(3)} = u_4$ , con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 u_1 - k_1 u_2 \\ F_2 &= -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 \\ F_3 &= -k_2 u_2 + (k_2 + k_3) u_3 - k_3 u_4 \\ F_4 &= -k_3 u_3 + k_3 u_4, \end{aligned} \quad (4.14)$$

que en forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}. \quad (4.15)$$

En lo que se refiere a las fuerzas, las únicas componentes conocidas de antemano son las fuerzas en los nodos intermedios 1 y 2, que son  $F_2 = 0$  y  $F_3 = P$ , respectivamente. Teniendo esto en cuenta, el sistema de ecuaciones que simula el comportamiento fuerza-desplazamiento del sistema de tres muelles es:

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}; \quad \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100 + 200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200 + 100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \\ F_4 \end{Bmatrix}. \quad (4.16)$$

Nótese que la la matriz de rigidez es simétrica y con forma bandeada.

Una vez planteado el sistema de ecuaciones se puede observar que se tienen 4 ecuaciones y 4 incógnitas, que en principio son los desplazamientos, y el vector de términos independientes asociado a las fuerzas, que en principio se supone conocido. El problema es que ha de cumplirse el equilibrio global de la estructura (sistema de muelles), es decir, hay que evitar que se mueva como un sólido rígido. Para ello se fijan algunos desplazamientos como conocidos (condiciones de contorno), en este caso son  $u_1 = u_4 = 0$ . Además, para que se cumplan las condiciones de compatibilidad entre fuerzas y desplazamientos resulta que ahora son desconocidas las fuerzas asociadas a los nodos 1 y 4, que son las reacciones en los apoyos.

Si aplicamos las condiciones de contorno  $u_1 = u_4 = 0$  en las ecuaciones 2 y 3 del sistema (4.16) llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/250 \\ 3P/500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} mm. \quad (4.18)$$

A partir de las ecuaciones primera y segunda del sistema (4.16) y conocidos los desplazamientos  $u_2, u_3$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} F_1 &= -100u_2 = -200 \text{ N} \\ F_4 &= -100u_3 = -300 \text{ N}. \end{aligned}$$

Para el cálculo de la fuerza a la que está sometido el muelle 2 (fuerza interna) partimos de su correspondiente ecuación (4.5). En este caso:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

de donde se obtiene:

$$f_2^{(2)} = -f_1^{(2)} = 200 \text{ N}.$$

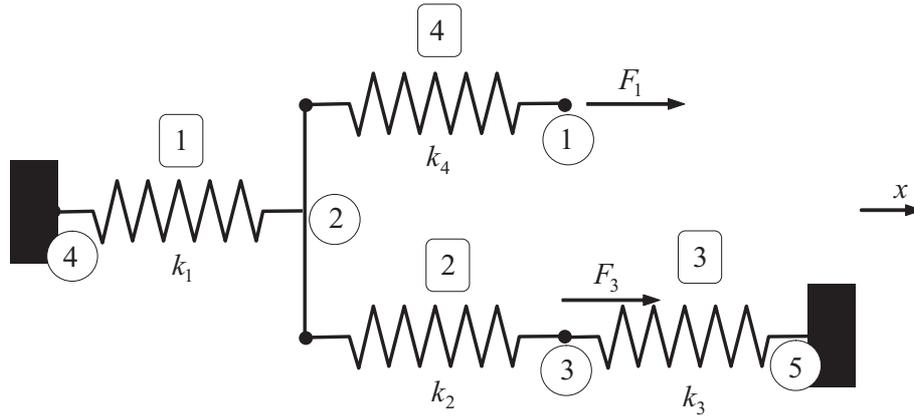


Figura 4.6: Sistema de 4 muelles en serie y en paralelo.

Es interesante destacar que la fuerza resultante en el nodo 3 tiene que ser igual a la fuerza aplicada  $P$ , para demostrarlo calculemos las fuerzas en el elemento 3:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Resultando

$$f_1^{(3)} = -f_2^{(3)} = 300 \text{ N.}$$

Luego, la fuerza resultante en el nodo 3, ver ecuación (4.13), es:

$$F_3 = f_2^{(2)} + f_1^{(3)} = 200 + 300 = 500 \text{ N} = P.$$

■

**Ejemplo ilustrativo 4.2 (Ensamblaje de un sistema de 4 muelles).** Dado el sistema de muelles mostrado en la Figura 4.6 donde las conectividades entre los elementos y sus constantes elásticas se muestran en la Tabla 4.1, obtener la matriz de rigidez global del sistema. Las fuerzas externas que actúan en la estructura son  $F_1 = 500 \text{ N}$  y  $F_3 = 100 \text{ N}$ .

**Solución:**

Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos son:

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{k}^{(2)}] = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

y

$$[\mathbf{k}^{(3)}] = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{k}^{(4)}] = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

siendo sus unidades  $N/mm$ .

Análogamente al caso del Ejemplo Ilustrativo 4.1 se procedería a plantear el equilibrio en cada uno de los nodos y a continuación se sustituirían los valores de las fuerzas  $f_i^{(e)}$  por los

Tabla 4.1: Conectividades para el sistema de muelles del Ejemplo Ilustrativo 4.2.

Elemento- $e$	Nodo $i$	Nodo $j$	$k_e$ (N/mm)
1	4	2	100
2	2	3	150
3	3	5	200
4	2	1	50

valores obtenidos de las ecuaciones correspondientes teniendo en cuenta las relaciones entre los desplazamientos de los nodos de los elementos y los desplazamientos de los nodos globales, de esta forma se obtendría la matriz de rigidez global.

En este caso vamos a escribir las conectividades de los elementos tal y como se muestran en la Tabla 4.1. En ella se muestran para cada muelle, los nodos que lo constituyen considerando la numeración global de la estructura. En la primera columna se muestra el número de elemento, mientras que en las columnas 2 y 3 se muestran los nodos locales que conforman cada uno de los elementos. Así, la columna 2 se corresponde con el primer nodo en locales ( $i$ ), mientras que la segunda se corresponde con el segundo nodo en locales ( $j$ ).

Finalmente la matriz de rigidez tras hacer el ensamblaje queda de la siguiente manera:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Sustituyendo los valores de las constantes elásticas de la Tabla 4.1 queda como:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 150 & -150 & 0 & 0 & 0 \\ -150 & 450 & -200 & -100 & 0 \\ 0 & -200 & 250 & 0 & -50 \\ 0 & -100 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -50 & 0 & 50 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Nótese que la matriz de rigidez es simétrica y con forma bandeada. ■

**Comentario 4.3** Todos los problemas estáticos o cuasi-estáticos se reducirán a un sistema discreto del tipo  $[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$ . ■

#### 4.1.3. Procedimiento Sistemático de Ensamblaje de Elementos Unidimensionales

El procedimiento sistemático de ensamblaje es un paso muy importante cuando se utiliza la técnica de los elementos finitos. El objetivo es la obtención del comportamiento global de la estructura a partir de los comportamientos individuales de los elementos. Por tanto, la comprensión del procedimiento de ensamblaje, es decir, de la obtención de la matriz de rigidez global de la estructura  $[\mathbf{K}]$  a partir de las matrices de rigidez de los elementos  $[\mathbf{k}^{(e)}]$ , es de gran importancia.

Continuando con el caso más sencillo se va a proceder al estudio del ensamblaje de sistemas de muelles, es decir, elementos unidimensionales con un único grado de libertad por nodo. Tal y como se muestra en la Figura 4.7, los elementos trabajan sólo en el sentido longitudinal y están



Figura 4.7: Desplazamientos y fuerzas nodales.

constituidos por dos nodos sobre los que actúan unas fuerzas, y cuyos desplazamientos nodales son desconocidos. Precisamente este desplazamiento es el grado de libertad.

Para este tipo de elemento, su matriz de rigidez, su vector desplazamientos nodales y su vector de fuerzas nodales tienen el siguiente formato:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{u}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \text{y} \quad \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (4.25)$$

donde  $k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)}$ .

Supongamos ahora que se tiene un sistema con tres elementos tal y como se muestra en la Figura 4.8. Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos son las siguientes:

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{k}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{k}^{(3)}] = \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{4} \\ k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

donde  $k_{ij}^{(e)}$  es el elemento de la matriz de rigidez situado en la fila  $i$ -ésima y en la columna  $j$ -ésima para el elemento (muelle)  $e$ . En este caso se tiene un elemento con dos nodos, y tanto  $i$  como  $j$  pueden tomar los valores 1 y 2. Esta numeración se corresponde con la numeración local, de tal forma que tanto la primera fila como la primera columna hacen referencia al primer nodo del elemento mientras que la segunda fila y la segunda columna hacen referencia al segundo nodo del elemento. Sin embargo, si consideramos la estructura completa, hemos de numerar los nodos de forma global y tener en cuenta que hay nodos comunes para varios elementos, por eso es necesario definir la matriz de conectividad de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_{\text{on}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

de forma que el primer elemento-muelle (primera fila de la matriz de conectividad) está constituido por los nodos 1 y 2 en numeración global, el segundo elemento-muelle (segunda fila de la matriz de conectividad) está constituido por los nodos 2 y 3, y por último, el tercer elemento-muelle (tercera fila de la matriz de conectividad) lo constituyen los nodos 3 y 4. Esto implica que los elementos  $k_{ij}^{(e)}$  están ligados a los nodos globales tal y como se muestra en la ecuación (4.26), de forma que, por ejemplo, el elemento  $k_{21}^{(2)}$  actuaría en la matriz de rigidez global en la posición (3, 2).



Figura 4.8: Discretización en 3 elementos.

**Definición 4.2 (Matriz de conectividad).** Se llama matriz de conectividad  $\mathbf{C}_{\text{on}}$  a la matriz que relaciona la numeración local de cada elemento del sistema con los nodos globales. Tiene tantas filas como número de elementos ( $n_e$ ) tenga la estructura y tantas columnas como número de nodos por elemento ( $n_{n_e}$ ), donde el elemento  $c_{ij}$  representa el número que le corresponde en numeración global al nodo  $j$  (en numeración local) del elemento  $i$ . ■

Dado que en la estructura, los elementos individuales están interconectados e interactúan entre sí, es preciso tenerlo en cuenta a la hora de ensamblar para obtener la matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  de la estructura, para ello basta con sumar la contribución de cada elemento en los nodos en común utilizando la información de la matriz de conectividad. De esta forma se obtendría la siguiente matriz de rigidez del sistema:

$$[\mathbf{K}] = \begin{array}{c} \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccc} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 \\ & & k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ & \text{Sim.} & & k_{22}^{(3)} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{GL} \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \hline \end{array} \quad (4.28)$$

Nótese que como la matriz es simétrica sólo se representa la parte superior. Análogamente para el caso del vector de fuerzas obtenemos:

$$\{\mathbf{F}\} = \left\{ \begin{array}{c} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{array} \right\}. \quad (4.29)$$

Para ensamblar de forma sistemática tanto el vector de fuerzas como la matriz de rigidez para el caso de elementos unidimensionales hay que emplear el siguiente algoritmo:

**Algoritmo 4.1 (Ensamblaje unidimensional).**

- **Entrada:** Conjunto inicial de matrices de rigidez  $\mathbf{k}^{(e)}$ ;  $e = 1, \dots, n_e$  y vectores de fuerzas asociados  $\mathbf{f}^{(e)}$ ;  $e = 1, \dots, n_e$  asociados a cada elemento, y matriz de conectividad  $\mathbf{C}_{\text{on}}$ . En este caso en número de grados de libertad por nodo  $n_{g_n}$  es igual a 1, mientras que el número de nodos por elemento  $n_{n_e}$  es igual a 2.
- **Salida:** Matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  y vector de fuerzas  $\mathbf{F}$  de la estructura.

**Paso 1:** Inicializamos el número de elementos  $n_e$  de la estructura como el número de filas de la matriz de conectividad, el número de nodos  $n_n$  del sistema se obtendrá como el máximo valor de la matriz de conectividad:  $n_n = \max c_{ij}$ .

**Paso 2:** Inicialización de la matriz de rigidez del sistema  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$  de dimensiones  $(n_n \times n_{g_n}, n_n \times n_{g_n})$  y del vector de fuerzas  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  de dimensiones  $(n_n \times n_{g_n})$ .

**Paso 3:** Se inicializa el contador de elementos  $n_{el} = 1$  y se procede al ensamblaje.

**Paso 4:** Para todos los elementos de la matriz de rigidez  $\mathbf{k}^{(n_{el})}$  sumar  $k_{ij}^{(n_{el})}$  en la posición  $(c_{n_{el},i}, c_{n_{el},j})$  de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Análogamente, para el caso de las fuerzas, sumar todos los elementos  $f_i^{(n_{el})}$  del vector  $\mathbf{f}^{(n_{el})}$  en la posición  $c_{n_{el},i}$  del vector  $\mathbf{f}$ .

**Paso 5:** Si  $n_{el}$  es menor que el número de elementos  $n_e$  entonces incrementar  $n_{el}$  en una unidad  $n_{el} \leftarrow n_{el} + 1$  y continuar con el **Paso 4**. En caso contrario el algoritmo finaliza. ■

**Comentario 4.4** Desde el punto de vista práctico es importante recalcar que pese a que el procedimiento general de ensamblaje para las fuerzas es análogo al de la matriz de rigidez, generalmente las fuerzas que actúan en una estructura (sistema) vienen dadas en coordenadas globales, es decir, asociadas directamente a los nodos. Con lo cual el procedimiento de ensamblaje cambia con respecto a lo mostrado en el Algoritmo 4.1. ■

#### 4.1.4. Aplicación de las Condiciones de Contorno en Sistemas Unidimensionales

En la sección anterior se expuso de forma concisa un método sistemático para ensamblar la matriz de rigidez y el vector de fuerzas global para un sistema de muelles dado. En principio, parece claro que ya se está en disposición de resolver el sistema (4.11):

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}. \quad (4.30)$$

Nada más lejos de la realidad, la matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  efectivamente contiene la información del comportamiento estructural global del sistema, pero si se trata de resolver el sistema (4.30) se vería que es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones. Efectivamente la estructura puede estar en equilibrio en distintas posiciones en el espacio sin más que moverla como un sólido rígido. Para resolver este problema y obtener una única solución, lo que se hace es impedir el movimiento de sólido rígido de la estructura fijando algunos de los desplazamientos (condiciones de contorno). En contraposición, las reacciones o fuerzas en estos puntos donde se hayan restringido el movimiento, pasan a ser desconocidas.

Las dimensiones de la matriz de rigidez del sistema en (4.30) son  $(n_{gt}, n_{gt})$ , donde  $n_{gt}$  es el número de grados de libertad totales del sistema, que es igual al número de nodos multiplicado por el número de grados de libertad por nodo ( $n_{gt} = n_n \times n_{gn}$ ). Su rango, es decir, el número de vectores linealmente independientes de esta matriz es siempre de  $n_{gt} - 1$ . Este hecho tiene dos implicaciones:

1. El determinante de la matriz de rigidez es nulo  $\det [\mathbf{K}] = 0$ .
2. El sistema de ecuaciones (4.30) tiene infinitas soluciones, ya que el sistema puede adoptar infinitas posiciones (movimiento de sólido rígido).

Para evitar esta situación, basta con añadir al menos una condición de contorno (en el caso del sistema de muelles), con lo cual se elimina la posibilidad de que la estructura se desplace como sólido rígido. En este caso la matriz de rigidez tendría de rango  $n_{gt}$ , con lo cual dejaría de ser singular. Esto supone introducir algún desplazamiento como conocido, en contraposición, la fuerza asociada al nodo en el que se impone la condición de contorno, pasará a ser una de las incógnitas (reacción en el apoyo).

Ante esta situación, es necesario disponer de un método que permita la modificación del sistema de ecuaciones (4.30) para que se cumplan las condiciones de contorno. Existen varios procedimientos para llevar a cabo esta tarea, en este libro se presenta sólo uno de ellos debido principalmente a su simplicidad y sencillez.

Previo paso a la explicación del método seleccionado para la introducción de las condiciones de contorno, es preciso definir cómo se imponen esas condiciones, por eso es necesario definir la matriz de condiciones de contorno de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_{bo} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

de forma que la primera columna contiene la información del número del nodo en el que se va a imponer una condición de contorno y la segunda contiene la información del desplazamiento impuesto.

Supóngase un sistema genérico de ecuaciones en forma matricial que representa el comportamiento de un sistema de muelles (1D):

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}; \{\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}; \{\mathbf{F}\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

A continuación vamos a suponer que el desplazamiento asociado al nodo 2 es ( $u_2 = u_2^0$ ). Por tanto se ha de modificar el sistema (4.32) de forma que al resolverse, el valor de la variable  $u_2$  sea igual a la condición de contorno impuesta. El método propuesto se compone de tres partes:

1. Dado que el desplazamiento asociado al grado de libertad impuesto afecta a los demás elementos (y no se debe de despreciar su influencia), se modifica el vector de fuerzas globales restando la columna asociada al grado de libertad impuesto multiplicada por el valor del desplazamiento impuesto:

$$F_i = F_i - k_{ij}u_j^0; \forall i = 1, \dots, n_{gt}; i \neq j, \quad (4.33)$$

donde  $j$  es el nodo con la condición de contorno impuesta y  $u_j^0$  su valor.

2. Se sustituye la componente del vector de fuerzas asociada al grado de libertad coartado por el desplazamiento impuesto  $u_j = u_j^0$ :

$$F_j = u_j^0, \quad (4.34)$$

donde  $j$  es el nodo con la condición de contorno impuesta y  $u_j^0$  su valor.

3. Modificación de la matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  de forma que tanto la fila como la columna asociada al grado de libertad coartado sean nulas, excepto el término de la diagonal principal.

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = p \\ 0 & \text{si } i = p \text{ \& } j \neq p \\ 0 & \text{si } i \neq p \text{ \& } j = p \end{cases} \forall i, j = 1, \dots, n_{gt}, \quad (4.35)$$

donde  $p$  es el nodo con la condición de contorno impuesta.

De esta forma el sistema (4.32) queda como:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} \quad (4.36)$$

con

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & k_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}; \{\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}; \{\mathbf{F}\} = \begin{bmatrix} F_1 - k_{12}u_2^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ F_n - k_{n2}u_2^0 \end{bmatrix}.$$

Nótese que ambos sistemas son equivalentes pero en el segundo en valor solución de  $u_2$  coincide con la condición de contorno impuesta  $u_2^0$ , tal y como queríamos.

Este método tiene la ventaja de que si el sistema de ecuaciones (4.36) resultante se resuelve mediante métodos de eliminación o descomposición LU, la modificación de la matriz durante el proceso de eliminación no provoca problemas numéricos, ya que el proceso de pivotaje asociado a ese grado de libertad no es necesario hacerlo. El inconveniente es que eliminamos la fuerza o reacción incognita asociada a esa condición de contorno, y debe de calcularse a posteriori con un procedimiento alternativo.

#### 4.1.5. Programa en MATLAB de Ensamblaje y Resolución de Sistemas de Muelles (Unidimensionales)

En este apartado se explica la generación de un programa en MATLAB que realice las siguientes acciones:

- Ensamblaje de forma automática de la matriz de rigidez de cualquier sistema de muelles.
- Ensamblar las cargas en el vector de fuerzas globales.
- Introducir las condiciones de contorno del problema.
- Resolver el sistema de ecuaciones resultante.
- Realizar un post-proceso para obtener todos los resultados.

El organigrama del programa propuesto se muestra en la Figura 4.9, los elementos que constituyen el programa son los siguientes:

##### Datos de entrada

- k**: vector que contiene las constantes elásticas de cada elemento (muelle).
- C<sub>on</sub>**: matriz de conectividad.
- C<sub>bo</sub>**: matriz con la información de las condiciones de contorno.
- P**: vector de cargas externas.

##### Variables

- $n_e$ : número de elementos (muelles).
- $n_{g_n}$ : número de grados de libertad por nodo, en este caso  $n_{g_n} = 1$ .
- $n_{n_e}$ : número de nodos por elemento, en este caso  $n_{n_e} = 2$ .
- $n_n$ : número de nodos totales de la estructura.
- $n_{g_t}$ : número de grados de libertad totales de la estructura  $n_{g_t} = n_n \times n_{g_n}$ .
- $n_{n_b}$ : número de nodos donde el desplazamiento está impuesto, es decir, nodos en los que hay una condición de contorno.
- $n_{n_c}$ : número de nodos cargados, es decir, nodos en los que se aplican fuerzas exteriores.
- k<sup>(e)</sup>**: matriz de rigidez del elemento  $e$ -ésimo.
- K**: matriz de rigidez de la estructura.

**Funciones.** Las funciones y scripts que constituyen el programa son:

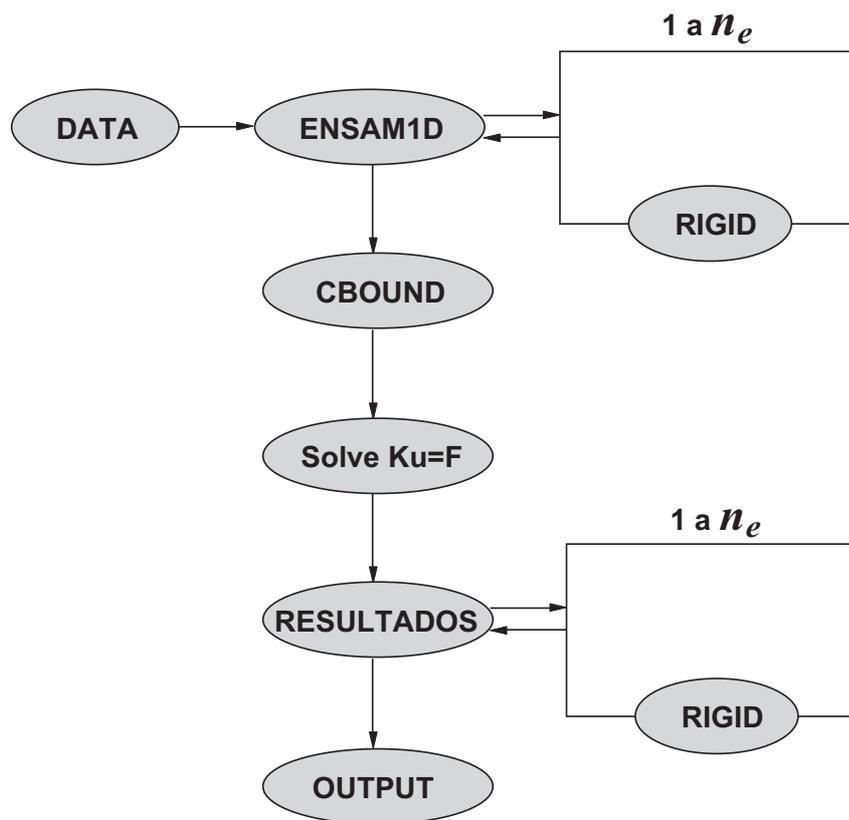


Figura 4.9: Organigrama del programa para resolver estructuras formadas por elementos unidimensionales (muelles).

**data.m:** Script para la introducción de los datos del sistema.

**rigid.m:** Función que proporciona la matriz de rigidez  $\mathbf{k}^{(e)}$  correspondiente a la ecuación (4.4) de un elemento.

**ensam1D.m:** Función que obtiene la matriz de rigidez global de la estructura  $\mathbf{K}$  a través del ensamblaje de las matrices de rigidez de todos los elementos, y que genera el vector de fuerzas globales  $\mathbf{F}$  a partir de los datos de cargas  $\mathbf{P}$ .

**cbound.m:** Función que modifica tanto la matriz de rigidez de la estructura  $\mathbf{K}$  como el vector de fuerzas globales  $\mathbf{F}$  para que se tengan en cuenta las condiciones de contorno, y que el sistema tenga solución.

**resultados.m:** Función mediante la cual, una vez obtenidos los desplazamientos solución  $\mathbf{u}$ , obtiene las reacciones en los apoyos, las fuerzas que equilibran cada elemento, y las fuerzas aplicadas en cada nodo.

A continuación, se procede a describir cada una de las funciones.

#### 4.1.5.1. Fichero de datos

La función **data.m** es realmente un script en el que se introducen los datos de la matriz de conectividad  $\mathbf{C}_{on}$ , la matriz con las condiciones de contorno  $\mathbf{C}_{bo}$ , el vector que contiene las constantes elásticas de cada elemento (muelle)  $\mathbf{k}$ , y el vector con las cargas en los nodos. Particularizando para el Ejemplo Ilustrativo 4.1 queda de la siguiente manera:

```
% Numero de grados de libertad por nodo para el caso unidimensional
ngn = 1;

% Vector que contienen las constantes elasticas de los muelles
k = [100 200 100];

% Matriz de conectividad
Con = [1 2; 2 3; 3 4];

% Condiciones de borde de los elementos
% Numero de nodos de borde
nnb=2;
Cbo=zeros(nnb,1+ngn);
Cbo(1,1)=1; Cbo(1,2)=0;
Cbo(2,1)=4; Cbo(2,2)=0;

% Vector de cargas en los nodos
% Numero de nodos cargados
nnc=1;
P=zeros(nnc,1+ngn);
P(1,1)=3; P(1,2)=500;
```

**Comentario 4.5** *Nótese que el vector de cargas  $\mathbf{P}$  contiene la información de las cargas directamente aplicadas en los nodos globales, por tanto el ensamblaje de las mismas diferirá del ensamblaje mostrado en el Algoritmo 4.1.*



#### 4.1.5.2. Función para Obtener la Matriz de Rigidez Elemental $[k^{(e)}]$

La función **rigid.m** se encarga de calcular la matriz de rigidez (nótese que es simétrica) de cada elemento. Recibe como argumentos el número del elemento ( $e$ ) del que se quiere calcular la matriz de rigidez y el vector donde se almacenan las constantes elásticas de los muelles (elementos):

```
function ke = rigid(e,k)
%
% Funcion que obtiene la matriz de rigidez de un elemento
% tipo muelle unidimensional, solo la parte superior, ya que
% se sabe que va a ser simetrica
%
% Salida:
% ke->Matriz diagonal superior de dimensiones 2x2
%
% Recibe como datos:
% e-> numero de elemento del que se quiere calcular la matriz
% de rigidez
% k-> vector que contiene las constantes elasticas de cada uno
% de los elementos (muelles) del sistema
%
ke = zeros(2);

ke(1,1) = k(e);
ke(2,2) = k(e);
ke(1,2) = -k(e);
ke(2,1) = -k(e);
```

#### 4.1.5.3. Función para ensamblar y obtener la matriz de rigidez global de la estructura $K$ y el vector de cargas globales $F$

La función **ensam1D.m** se encarga de calcular la matriz de rigidez global de la estructura y adicionalmente ensambla las fuerzas en el vector de fuerzas globales  $F$ . Recibe como argumentos el vector donde se almacenan las constantes elásticas de los muelles (elementos), la matriz de conectividad, y la matriz con las cargas externas:

```
function [K,F]=ensam1D(k,Con,P)
%
% Funcion que obtiene la matriz de rigidez de un sistema de
% muelles trabajando unidimensionalmente, solo la parte superior,
% ya que se sabe que va a ser simetrica
% Ademas ensambla las fuerzas en el vector de fuerzas globales
%
% Salida:
% K->Matriz simetrica
% F->Vector de fuerzas
%
% Recibe como datos:
% k-> vector que contiene las constantes elasticas de cada uno
% de los elementos (muelles) del sistema
% Con-> matriz de conectividad que indica para cada elemento que
% nodos del sistema lo componen
```

```

% P-> matriz de con las fuerzas que actuan en cada nodo (globales)
%
if nargin ~= 3,
    error('Numero de argumentos incorrecto, comprobar datos de entrada');
end
% Numero de elementos y del numero de nodos por elemento
% a partir de las dimensiones de matriz de conectividad
[ne,nne] = size(Con);
if ne ~= length(k),
    error('La matriz Con y el vector k no concuerdan, comprobar');
end
% Numero de nodos totales de la estructura de muelles
nn = max(max(Con));
% Numero de grados de libertad por nodo
ngn=length(P(1,:))-1;
% Numero de grados de libertad totales
ngt = nn*ngn;
% Inicializacion del vector de fuerzas global como
% un vector de ceros de tipo sparse
F=(zeros(ngt,1));
% Rutina de ensamblaje de las fuerzas, recorrido de todas las cargas
% con el contador i y ensamblaje en el vector de fuerzas globales
nnc=length(P(:,1));
for i=1:nnc,
    F(P(i,1)*ngn)=P(i,2);
end
% Inicializacion de la matriz de rigidez global como
% una matriz de ceros de tipo sparse
K=(zeros(ngt));
% Rutina de ensamblaje, recorrido de todos los elementos
% con el contador e y ensamblaje en la matriz de rigidez global
for e = 1:ne,
% Matriz de rigidez del muelle e
    ke=rigid(e,k);
% Ciclo para recorrer la parte superior de la matriz ke
    for i = 1:nne*ngn,
% Indice de fila de K en el que se almacena el elemento
        auxi = Con(e,i);
        for j= i:nne*ngn,
% Indice de columna de K en el que se almacena el elemento
            auxj = Con(e,j);
% Para solo construir la parte superior de ma matriz
            if auxj>=auxi,
                K(auxi,auxj)=K(auxi,auxj)+ke(i,j);
            else
                K(auxj,auxi)=K(auxj,auxi)+ke(j,i);
            end % End del if
        end % End del for j
    end % End del for i
end % End del for e
% Matriz de rigidez global considerando la simetria
K = triu(K) + triu(K,1)';

```

#### 4.1.5.4. Función para Aplicar las Condiciones de Contorno

La función **cbound.m** se encarga de modificar la matriz de rigidez **K** y el vector de fuerzas globales **F** para que se cumplan las condiciones de contorno. Recibe como argumentos la matriz de rigidez global de la estructura **K**, el vector de cargas globales **F**, y la matriz con la información de las condiciones de contorno **Cbo**:

```
function [K,F] = cbound(K,F,Cbo)
%
% CBOUND modifica K y F para considerar las condiciones de contorno
%
% Salida:
% K->Matriz de rigidez simetrica modificada
% F->Vector de fuerzas globales modificado
%
% Recibe como datos:
% K->Matriz de rigidez simetrica modificada
% F->Vector de fuerzas globales
% Cbo->Matriz con la informacion de las condiciones de contorno
%
nnc=length(Cbo(:,1));
ngn=length(Cbo(1,:))-1;

for i=1:nnc,
    nn=Cbo(i,1);
    F(1:nn)=F(1:nn)-K(1:nn,nn)*Cbo(i,1+ngn);
    F(nn:end)=F(nn:end)-K(nn,nn:end)'*Cbo(i,1+ngn);
    F(nn,1)=Cbo(i,1+ngn);
    K(nn,:)=0;
    K(:,nn)=0;
    K(nn,nn)=1;
end
```

#### 4.1.5.5. Función para Obtener las Fuerzas Nodales y las Reacciones en los Apoyos

A continuación se define una función mediante la cual se obtiene las fuerzas internas a nivel elemental, y las fuerzas resultantes en cada nodo (global) incluidas las reacciones en los apoyos, dicha función tiene como datos de entrada la matriz de rigidez de cada elemento y los desplazamientos nodales obtenidos tras la solución del sistema (4.36).

```
function [forcel,forcen] = resultados(u,k,Con)
%
% RESULTADOS es la rutina encargada del calculo de los resultados
% una vez obtenidos los desplazamientos solucion del sistema
%
% Salida:
% forcел->Matriz con las fuerzas que equilibran cada elemento
% forcen->Fuerzas en los nodos
%
% Recibe como datos:
% u-> vector que contiene los desplazamientos nodales
% k-> vector que contiene las constantes elasticas de cada uno
%     de los elementos (muelles) del sistema
% Con-> matriz de conectividad que indica para cada elemento que
```

```

%      nodos del sistema lo componen
%
if nargin ~=3,
    error('Numero de argumentos incorrecto');
end

% Numero de elementos y del numero de nodos por elemento
% a partir de las dimensiones de matriz de conectividad
[ne,nne] = size(Con);
% Numero de nodos totales de la estructura de muelles
nn = max(max(Con));
% Numero de grados de libertad por nodo
ngn=1;
% Numero de grados de libertad totales
ngt = nn*ngn;
% Inicializacion de las matrices y vectores necesarios
% Desplazamientos de los nodos de un elemento
ue=zeros(nne*ngn,1);
% Fuerzas a las que esta sometido cada una de los muelles
forcel=zeros(ne,nne*ngn);
% Fuerzas en los nodos incluidas las reacciones en los apoyos
forcen=zeros(nn,ngn);

for e=1:ne,
%  Matriz de rigidez del muelle e
    ke=rigid(e,k);
%  Obtencion de los desplazamientos locales de cada muelle
    for j=1:nne,
        ue(j)=u(Con(e,j));
    end
    forcel(e,:)=(ke*ue)';
    for j=1:nne,
        forcen(Con(e,j))=forcen(Con(e,j))+forcel(e,j);
    end
end
end

```

#### 4.1.5.6. Script de Ejecución

Para permitir la ejecución y el cálculo de la matriz de rigidez de un caso concreto se emplea un script **ejecucion.m** que gestiona la ejecución. Considerando los datos del Ejemplo Ilustrativo 4.1 y teniendo en cuenta el organigrama de la Figura 4.9 se procedería de la siguiente manera:

1. Se borran de la memoria las variables existentes y se cargan los datos llamando al fichero **data.m**:

```

clear; clc;
% Cargo los datos del problema en memoria
data;

```

2. Ensamblaje de la matriz de rigidez y obtención del vector de fuerzas globales:

```

% Llamada a la rutina de ensamblaje y obtención de la matriz de

```

```
% rigidez del sistema de muelles
[K,F] = ensam1D(k,Con,P);
disp('La matriz de rigidez es:')
K
disp('El vector de fuerzas globales es:')
F
```

El resultado mostrado en pantalla es:

```
La matriz de rigidez es:

K =

    100   -100     0     0
   -100    300   -200     0
     0   -200    300   -100
     0     0   -100    100

El vector de fuerzas globales es:

F =

     0
     0
    500
     0
```

Tal y como se explicó en la Sección 4.1.4 el determinante de la matriz de rigidez es nulo, y su rango es  $n_{gt} - 1 = 3$ :

```
>> rank(K)

ans =

     3

>> det(K)

ans =

     0

>>
```

3. El siguiente paso para evitar la singularidad de la matriz de rigidez es introducir las condiciones de contorno. Inicialmente sólo sería necesario introducir una condición de contorno para que el sistema tuviera solución única, en el caso propuesto tenemos dos condiciones de contorno:

```
%Introduccion de las condiciones de contorno
[K,F]=cbound(K,F,Cbo);

disp('La matriz de rigidez, tras introducir las c. de contorno,
es:')

K
disp('El vector de fuerzas globales, tras introducir las c. de
contorno, es:')
F
```

El resultado mostrado en pantalla es:

La matriz de rigidez es tras introducir las c. de contorno es:

K =

```

1     0     0     0
0    300  -200    0
0   -200    300    0
0     0     0     1
```

El vector de fuerzas globales tras introducir las c. de contorno es:

F =

```

0
0
500
0
```

4. Una vez introducidas las condiciones de contorno se está en disposición de resolver el sistema de ecuaciones por cualquiera de los métodos estudiados en la Sección 2.2. En este caso el algoritmo empleado es la descomposición LU:

```
% Resolucion del sistema de ecuaciones
[L,U]=lu(K);
u=L\F;
u=U\u;

disp('Los desplazamientos solucion son:') u
```

El resultado mostrado en pantalla es:

Los desplazamientos solucion son:

u =

```
0
2
3
0
```

resultado que coincide con el resultado (4.18) del Ejemplo Ilustrativo 4.1.

5. Por último, una vez obtenidos los desplazamientos solución se procede al cálculo de esfuerzos:

```
% Obtencion de las reacciones en los apoyos
[forcel,forcen] = resultados(u,k,Con);
disp('Las fuerzas que actuan en cada muelle son:')
forcel
disp('Las fuerzas que actuan en cada nodo incluidas reacciones...
en los apoyos son:')
forcen
```

El resultado mostrado en pantalla es:

```
Las fuerzas que actuan en cada muelle son:

forcel =

    -200    200
    -200    200
     300   -300

Las fuerzas que actuan en cada nodo incluidas reacciones en los
apoyos son:

forcen =

    -200
         0
     500
    -300
```

resultado que coincide con el resultado del Ejemplo Ilustrativo 4.1. Nótese que en las fuerzas que actúan sobre cada elemento las componentes son iguales y de signo contrario para asegurar el equilibrio. Respecto a las fuerzas en los nodos correspondientes a los desplazamientos impuestos éstas son las fuerzas ejercidas por el contorno para evitar el desplazamiento de la estructura como sólido rígido, es decir, las *reacciones* en los apoyos.

**Ejemplo computacional 4.1 (Ensamblaje de un sistema de 4 muelles).** Considerando el sistema de muelles del Ejemplo Ilustrativo 4.2 mostrado en la Figura 4.6, se pide:

1. Generar el fichero de datos correspondiente.

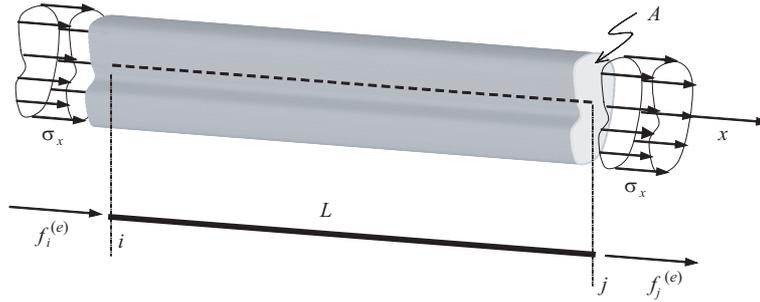


Figura 4.10: Elemento tipo barra y sus componentes.

2. Obtener los desplazamientos de los nodos y las reacciones en los apoyos mediante el programa, y comprobar que la matriz de rigidez obtenida sin considerar las condiciones de contorno coincide con la del Ejemplo Ilustrativo 4.2 en (4.24).

■

## 4.2. Análisis de Estructuras de Barras

El siguiente caso que vamos a estudiar es el de estructuras de barras articuladas mediante rótulas sin fricción, es decir *estructuras articuladas*. Esto implica que las barras sólo trabajan o bien a tracción o a compresión. Además, en el estudio que se realiza a continuación, se asumen las siguientes hipótesis:

- Régimen de pequeñas deformaciones. El estudio sólo será válido suponiendo que la estructura sufre deformaciones pequeñas con las cargas a las que está sometida.
- El material de que están compuestas las barras es un material elástico lineal y homogéneo.
- Las cargas son estáticas, o cuasi-estáticas cuando se aplican las cargas en la estructura muy despacio.

### 4.2.1. Barra Sometida a Esfuerzo Axil

Considérese un elemento tipo barra como el mostrado en la Figura 4.10 donde  $L$  es la longitud de la barra,  $A$  es el área de su sección transversal, y  $\sigma_x$  es la tensión concordante con el eje de la barra que actúa en la sección transversal de la misma.

La fuerza interna total  $f_i^{(e)}$  que actúa en la dirección de la barra en el nodo  $i$  se puede obtener integrando la tensión  $\sigma_x = \sigma$  a lo largo de toda la sección transversal  $A$  como:

$$f_i^{(e)} = \int_A \sigma_x dA. \quad (4.37)$$

Nótese que se define  $u = u(x)$  como el desplazamiento en la dirección de la barra que sufre cada punto de la misma debido a la fuerza aplicada.

### 4.2.2. Matriz de Rigidez del Elemento de Barra

Análogamente al caso de un sistemas de muelles, para el estudio de las estructuras compuestas por barras es necesario obtener la matriz de rigidez, que en este caso representa el comportamiento elasto-deformacional de cada una de las barras. Para ello se realizan los siguientes pasos:

- **Selección del sistema de referencia.** Inicialmente, dado que las barras sólo trabajan en el sentido longitudinal de la misma, se selecciona como sistema de referencia el eje longitudinal, tal y como se muestra en la Figura 4.11.



Figura 4.11: Sistema de coordenadas para un elemento tipo barra que trabaja de forma longitudinal.

- **Adopción de una función aproximante para los desplazamientos sufridos por la barra  $u(x)$ .** En este caso vamos a suponer que los desplazamientos a lo largo de toda la longitud de la barra varían linealmente, así utilizando el polinomio de Lagrange de grado 1, introducido en la Sección 2.3.2, se puede expresar el desplazamiento  $u(x)$  como:

$$u(x) = u_i^{(e)} + \frac{u_j^{(e)} - u_i^{(e)}}{L}x,$$

o mejor aun:

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_i^{(e)} + \frac{x}{L} u_j^{(e)} \\ &= [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde  $N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right)$  y  $N_2 = \frac{x}{L}$  son las funciones de forma del polinomio de Lagrange que permiten representar el desplazamiento como una función lineal en función de los

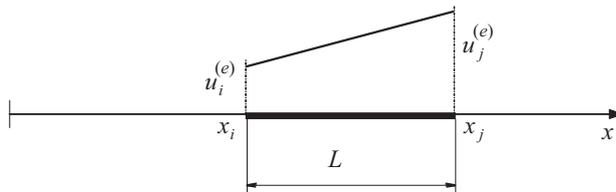


Figura 4.12: Polinomio de Lagrange de grado 1 para representar el desplazamiento  $u(x)$  como una función lineal.

desplazamientos en los nodos (véase la Figura 4.12). Nótese que  $N_1$  y  $N_2$  se corresponden con las funciones  $l_1^{(0)}$  y  $l_2^{(0)}$  en (2.80).

- **Establecimiento de una relación deformación-desplazamiento nodal.** Teniendo en cuenta la hipótesis de que las barras están constituidas por un material elástico lineal y homogéneo la relación entre deformación y el desplazamiento (en una dimensión) viene dada por la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (4.39)$$

Sustituyendo el valor de la función desplazamiento  $u(x)$  adoptada en (4.38) en la expresión anterior (4.39) resulta:

$$\varepsilon = \frac{d}{dx} \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right); \frac{x}{L} \right] \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

que derivando queda como:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left[ -\frac{1}{L}; \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix} \\ &= \left[ B_1; B_2 \right] \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde la matriz  $[\mathbf{B}]$  contiene las derivadas de las funciones de forma.

- **Relación tensión-deformación (Ley de Hooke en una dimensión).** La tensión está relacionada con la deformación (en el caso elástico lineal) a través de la ley de Hooke de la siguiente manera:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (4.42)$$

donde  $E$  es el *módulo de elasticidad longitudinal* o *módulo de Young*, expresión que al considerar (4.41) queda como:

$$\sigma = E \left[ B_1; B_2 \right] \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

- **Relación desplazamiento-fuerza nodales.** Otro de los pasos imprescindibles es encontrar una relación entre los desplazamientos sufridos en la barra y las fuerzas aplicadas en los extremos de la misma. Para ello se aplica el Principio de los Trabajos Virtuales, que establece que tras aplicar un desplazamiento virtual, el trabajo desarrollado por las fuerzas externas iguala el trabajo de las fuerzas internas:

$$W_{ext} = W_{int} \quad (4.44)$$

$$\left\{ \bar{\mathbf{u}}^{(e)} \right\}^T \left\{ \mathbf{f}^{(e)} \right\} = \int_V \left\{ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\}^T \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\} dV \quad (4.45)$$

donde:

$W_{ext}$ : Es el trabajo de las fuerzas externas al sistema.

$W_{int}$ : Es el trabajo de las fuerzas internas.

$\{\mathbf{f}^{(e)}\}$ : Es el vector de fuerzas externas al sistema.

$\{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}$ : Son los desplazamientos virtuales.

$\{\boldsymbol{\sigma}\}$ : Son las tensiones.

$\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ : Es la deformación virtual.

El trabajo interno puede obtenerse integrando en todo el volumen del elemento ( $V$ ) mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} W_{int} &= \int_V \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV \\ &= \int_V \left[ \bar{u}_i^{(e)}; \bar{u}_j^{(e)} \right] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix} dV, \end{aligned}$$

donde ( $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ ) y ( $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ ) vienen dados por las expresiones (4.41) y (4.43), respectivamente. Como los valores de desplazamientos nodales son constantes, éstos pueden salir del integrando, con lo que resulta:

$$W_{int} = \left[ \bar{u}_i^{(e)}; \bar{u}_j^{(e)} \right] \int_V \begin{bmatrix} B_1 E B_1 & B_1 E B_2 \\ B_2 E B_1 & B_2 E B_2 \end{bmatrix} dV \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo los valores de  $B_1$  y de  $B_2$  por los mostrados en la expresión (4.41) resulta:

$$W_{int} = \left[ \bar{u}_i^{(e)}; \bar{u}_j^{(e)} \right] \int_V \begin{bmatrix} \frac{E}{L^2} & \frac{-E}{L^2} \\ \frac{-E}{L^2} & \frac{E}{L^2} \end{bmatrix} dV \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Nótese que dado que se trata de un elemento longitudinal, la integral de volumen puede transformarse en una integral de línea, según el eje longitudinal de la barra, y en una integral de área, con lo que queda como:

$$W_{int} = \left[ \bar{u}_i^{(e)}; \bar{u}_j^{(e)} \right] \int_{x=0}^{x=L} \int_A \begin{bmatrix} \frac{E}{L^2} & \frac{-E}{L^2} \\ \frac{-E}{L^2} & \frac{E}{L^2} \end{bmatrix} dA dx \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Si se supone que el área de la barra es constante ( $A$ ) a lo largo de toda su longitud la expresión anterior se simplifica resultando:

$$W_{int} = \left[ \bar{u}_i^{(e)}; \bar{u}_j^{(e)} \right] \int_{x=0}^{x=L} \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^2} & \frac{-AE}{L^2} \\ \frac{-AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

que al integrar queda como:

$$W_{int} = \left[ \bar{u}_i^{(e)}; \bar{u}_j^{(e)} \right] \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Esto en lo que se refiere al trabajo de las fuerzas internas, si ahora se considera el trabajo de las fuerzas externas el trabajo exterior viene dado por la expresión:

$$W_{ext} = \left\{ \bar{\mathbf{u}}^{(e)} \right\}^T \left\{ \mathbf{f}^{(e)} \right\} = \left[ \bar{u}_i^{(e)}; \bar{u}_j^{(e)} \right] \begin{bmatrix} f_i^{(e)} \\ f_j^{(e)} \end{bmatrix},$$

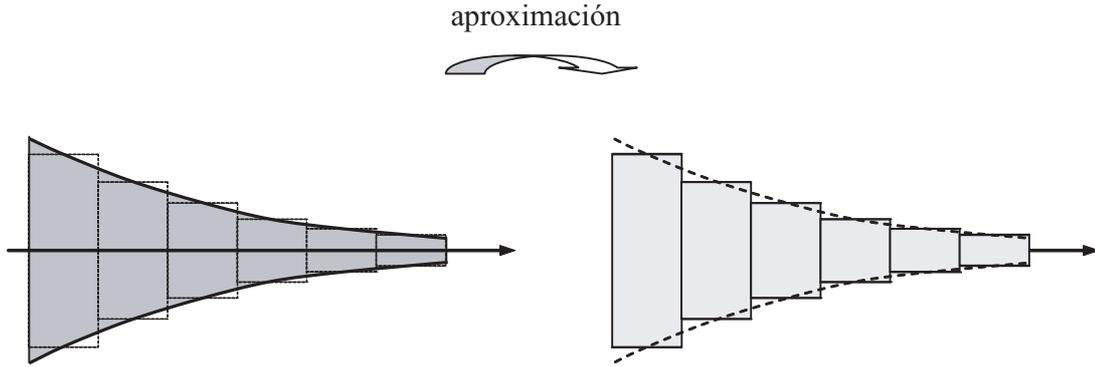


Figura 4.13: Aproximación de una barra de sección variable mediante barras de sección constante de menor longitud.

y considerando la relación (4.44) llegamos a la expresión que relaciona el trabajo virtual para el caso de barra longitudinal con área transversal constante:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i^{(e)}; \bar{u}_j^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i^{(e)} \\ f_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_i^{(e)}; \bar{u}_j^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

en la que eliminando los desplazamientos virtuales de ambos lados de la desigualdad:

$$\begin{bmatrix} f_i^{(e)} \\ f_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)}] \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}, \quad (4.52)$$

de donde se deduce que la matriz de rigidez del elemento tipo barra cuando éste está únicamente sometido a esfuerzo axial es igual a:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

**Comentario 4.6** La expresión de la matriz de rigidez (4.53) es válida para barras con sección constante. En el caso que la sección a lo largo de la barra varíe se ha de obtener una matriz de rigidez equivalente. Otra posibilidad, una aproximación, es discretizar la barra en varios elementos y para cada barra considerar la sección constante, como ejemplo véase la Figura 4.13, en este caso la matriz de rigidez de cada barra viene dada por la expresión (4.53). ■

**Ejemplo ilustrativo 4.3 (Sistema de barras con áreas transversales distintas).** Dado el sistema de barras mostrado en la Figura 4.14, sometido a una fuerza  $P$ , obtener la tensión en las barras y las reacciones en los apoyos.

**Solución:**

1. En primer lugar se obtiene la matriz de rigidez de cada una de las barras partiendo de la expresión (4.53):

$$\begin{array}{cc} \text{Elemento 1} & \text{Elemento 2} \\ [\mathbf{k}^{(1)}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & [\mathbf{k}^{(2)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (4.54)$$

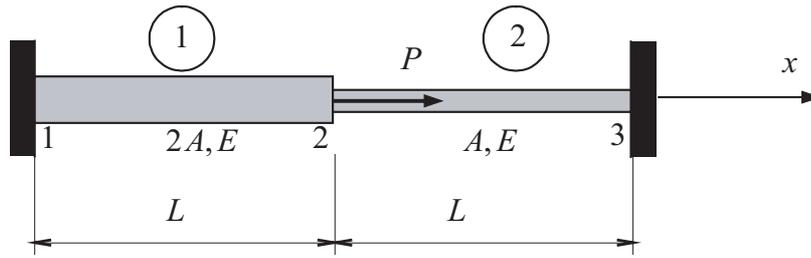


Figura 4.14: Sistemas de barras del Ejemplo Ilustrativo 4.3.

y a continuación, utilizando el procedimiento de ensamblaje de elementos unidimensionales mostrado en la Sección 4.1.3, se ensamblan los elementos de las matrices de rigidez de cada uno de los elementos en la matriz de rigidez de la estructura:

$$[\mathbf{K}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Por tanto se llega a un sistema de ecuaciones análogo al (4.11):

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\}; \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Sustituyendo los valores de las cargas y de las condiciones de contorno  $u_1 = u_3 = 0$  se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

en el que nuevamente la matriz de rigidez es singular y no se puede resolver. Nótese que las incógnitas  $F_1$ ,  $F_3$  y  $u_2$  están a distintos lados de la desigualdad.

Para resolverlo de forma manual se extrae la segunda ecuación:

$$[P] = \frac{EA}{L} [3] [u_2], \quad (4.58)$$

de donde se puede despejar el desplazamiento en el nodo 2:

$$u_2 = \frac{PL}{3EA}. \quad (4.59)$$

2. Para el cálculo de las tensiones empleamos la ecuación (4.43), con lo que la tensión en el primer elemento queda como:

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= E\varepsilon^{(1)} = E [ B_1; B_2 ] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = E \left[ -\frac{1}{L}; \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= E \left[ -\frac{1}{L}; \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{PL}{3EA} \end{bmatrix} = \frac{P}{3A}, \end{aligned}$$

mientras que la tensión en el elemento 2 es:

$$\begin{aligned}\sigma^{(2)} &= E\varepsilon^{(2)} = E \left[ -\frac{1}{L}; \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ &= E \left[ -\frac{1}{L}; \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} \frac{PL}{3EA} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-P}{3A},\end{aligned}$$

es decir que los dos elementos están sometidos a la misma tensión, de tracción para el primero (positiva) y de compresión para el segundo (negativa).

3. El cálculo de las reacciones puede hacerse de dos maneras, o bien partiendo del sistema global (4.56) sustituyendo los desplazamientos por el valor ya obtenido, o bien obteniendo de las fuerzas nodales de los elementos. En este caso se obtendrán con el segundo procedimiento que es el que se utiliza en programación. Las fuerzas nodales (a nivel de elemento) del primer elemento son:

$$\begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{PL}{3EA} \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

que al simplificar quedan como:

$$\begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2P}{3} \\ \frac{2P}{3} \end{bmatrix}.$$

Las fuerzas nodales (a nivel de elemento) en el segundo elemento son:

$$\begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{PL}{3EA} \\ 0 \end{bmatrix},$$

que simplificando quedan como:

$$\begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P}{3} \\ -\frac{P}{3} \end{bmatrix}.$$

Ensamblando las fuerzas nodales de los elementos con el procedimiento mostrado en la Sección 4.1.3 se llega a:

$$\begin{aligned}F_1 &= f_1^{(1)} = -\frac{2P}{3} \\ F_2 &= f_2^{(1)} + f_1^{(2)} = \frac{2P}{3} + \frac{P}{3} = P \\ F_3 &= f_2^{(2)} = -\frac{P}{3}.\end{aligned}$$

Nótese que la fuerza  $P$  se distribuye en los apoyos de forma proporcional a las áreas de los elementos. ■

#### **Ejemplo ilustrativo 4.4 (Matriz de rigidez de barras tubulares de sección variable).**

Considérese la barra tubular con sección variable mostrada en la Figura 4.15. Como se puede apreciarse el diámetro medio de la sección transversal varía a lo largo de la longitud de la barra a través de la siguiente expresión:

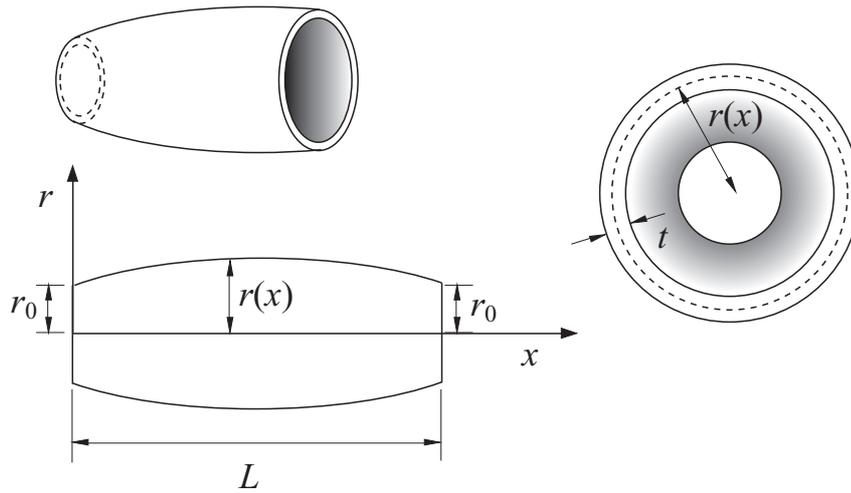


Figura 4.15: Barra tubular del Ejemplo Ilustrativo 4.4.

$$r(x) = r_0 + \frac{4(r_m - r_0)}{L}x \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad (4.61)$$

donde  $r_0$  y  $r_m$  son los diámetros medios al comienzo y a la mitad de la longitud de la barra, respectivamente. Nótese que la barra es simétrica respecto al plano perpendicular que pasa por el punto medio. Supuesto los módulos de elasticidad  $E$  y el espesor  $t$  de la barra constantes, se pide:

1. Obtener la matriz de rigidez del elemento barra unidimensional.
2. Generar una rutina llamada **rigid1D.m** que calcule numéricamente la matriz de rigidez. Comprobar el resultado con el exacto si  $L = 1$ ,  $E = 1$ ,  $t = 1$ ,  $r_0 = 1$  y  $r_m = 5/4$ .
3. Si además del diámetro medio se produce una variación del espesor según la siguiente ley:

$$t(x) = t_0 + \frac{4(t_m - t_0)}{L}x \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad (4.62)$$

donde  $t_0$  y  $t_m$  son los espesores medios al comienzo y a la mitad de la longitud de la barra, respectivamente. Obtener la matriz de rigidez numéricamente si además de los datos anteriores se considera  $t_0 = 1/10$  y  $t_m = 1/20$ . ¿Cuántos puntos de Gauss son necesarios para integrar de forma exacta la matriz de rigidez?

### Solución:

1. Para el cálculo de la matriz de rigidez se parte de la expresión (4.46) de la que se deduce que la matriz de rigidez de un elemento tipo barra, cuyo módulo de elasticidad  $E$  es constante, viene dada por la expresión:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_V \begin{bmatrix} \frac{E}{L^2} & \frac{-E}{L^2} \\ \frac{-E}{L^2} & \frac{E}{L^2} \end{bmatrix} dV$$

en la que se puede extraer fuera del integrando la matriz:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{E}{L^2} & \frac{-E}{L^2} \\ \frac{-E}{L^2} & \frac{E}{L^2} \end{bmatrix} \int_V dV = \begin{bmatrix} \frac{E}{L^2} & \frac{-E}{L^2} \\ \frac{-E}{L^2} & \frac{E}{L^2} \end{bmatrix} V$$

donde  $V$  es el volumen total de la barra.

Así pues, el problema del cálculo de la matriz de rigidez se reduce a un problema de cálculo de volúmenes, en la que considerando el tipo de sección tenemos:

$$V = \int_{x=0}^{x=L} 2\pi r(x)t dx = 2\pi t \int_{x=0}^{x=L} \left[ r_0 + \frac{4(r_m - r_0)}{L} x \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right] dx = \frac{2\pi t L (r_0 + 2r_m)}{3},$$

con lo que la matriz de rigidez del elemento queda como:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \frac{2\pi t E (r_0 + 2r_m)}{3L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sustituyendo en la expresión anterior los valores de  $L = 1$ ,  $E = 1$ ,  $t = 1/7$ ,  $r_0 = 1$  y  $r_m = 5/4$  se obtiene:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & -\frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{3} \end{bmatrix},$$

donde  $\pi/3 \approx 1,0472$ .

Para el cálculo numérico se empleará la integración por Gauss-Legendre, para ello se emplearán las rutinas **GaussLeg.m** y **gauleg.m** que se vieron en la Sección 2.3.12, página 75. La rutina **rigid1D.m** recibirá como argumentos  $E, L, r_0, r_m, t$  y  $n$ , donde  $n$  es el número de puntos de Gauss que se emplearán para integrar. La función queda de la siguiente manera:

```
function [ke]=rigid1D(E,L,r0,rm,t0,tm,n)
%
% Funcion que obtiene la matriz de rigidez de un elemento tipo barra
% unidimensional, tubular y con seccion variable
%
% Salida:
% ke->Matriz de rigidez del elemento tipo barra 1D
%
% Recibe como datos:
% E-> modulo de elasticidad del elemento
% L-> longitud de la barra
% r0-> radio al inicio y al final de la barra
% rm-> radio en el punto medio de la barra
% t-> espesor de la barra
% n-> numero de puntos de Gauss para integrar
%
if nargin < 3, error('Numero de argumentos incorrecto'); end
if nargin < 4, rm=r0; end
if nargin < 5, t0=r0/10; end
if nargin < 6, tm=t0; end
if nargin < 7, n=3; end
```

```

% Definicion del producto radio x espesor en funcion de
% la posicion longitudinal x de la barra
% suponiendo variacion cuadratica de ambos parametros
% Notese que si r0=rm entonces el radio es constante,
% y si t0=tm entonces el espesor es constante

rt = @ (x) (r0 + 4*(rm - r0)*x*(1 - x/L)/L)*(t0 + 4*(tm - t0)*x*(1 - x/L)/L);

% Calculo del volumen llamando a la rutina de integracion GaussLeg

V = 2*pi*GaussLeg(rt,0,L,n);

% Matriz de rigidez del elemento barra en locales

ke = E*V*[1 -1; -1 1]/L^2;

```

Si en la ventana de comandos se llama a la rutina con los parámetros correspondientes se obtiene el siguiente resultado:

```

>> ke=rigid1D(1,1,1,5/4,1/7)

ke =

    1.0472   -1.0472
   -1.0472    1.0472

```

que coincide con el resultado exacto. Recuérdese que tres puntos de Gauss ( $n = 3$ ) integran de forma exacta polinomios de grado  $2n - 1 = 5$ . En este caso, se hubiera obtenido el mismo resultado empleando la siguiente llamada en la línea de comandos `ke=rigid1D(1,1,1,5/4,1/7,1/7,2)`.

3. En caso de que la variación del espesor también sea cuadrática el volumen y la matriz de rigidez quedan como:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{x=0}^{x=L} 2\pi r(x)t(x)dx \\
 &= 2\pi t \int_{x=0}^{x=L} \left[ r_0 + \frac{4(r_m - r_0)}{L}x \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] \left[ t_0 + \frac{4(t_m - t_0)}{L}x \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] dx \\
 &= \frac{2\pi L}{15} [r_0(3t_0 + 2t_m) + r_m(2t_0 + 8t_m)]
 \end{aligned}$$

con lo que la matriz de rigidez del elemento queda como:

$$\left[ \mathbf{k}^{(e)} \right] = \frac{2\pi E}{15L} [r_0(3t_0 + 2t_m) + r_m(2t_0 + 8t_m)] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

y al sustituir por los valores numéricos:

$$\left[ \mathbf{k}^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{23\pi}{150} & -\frac{23\pi}{150} \\ -\frac{23\pi}{150} & \frac{23\pi}{150} \end{bmatrix},$$

donde  $\frac{23\pi}{150} \approx 0,4817$ .

Si en la ventana de comandos se llama a la rutina con los parámetros correspondientes se obtiene el siguiente resultado:

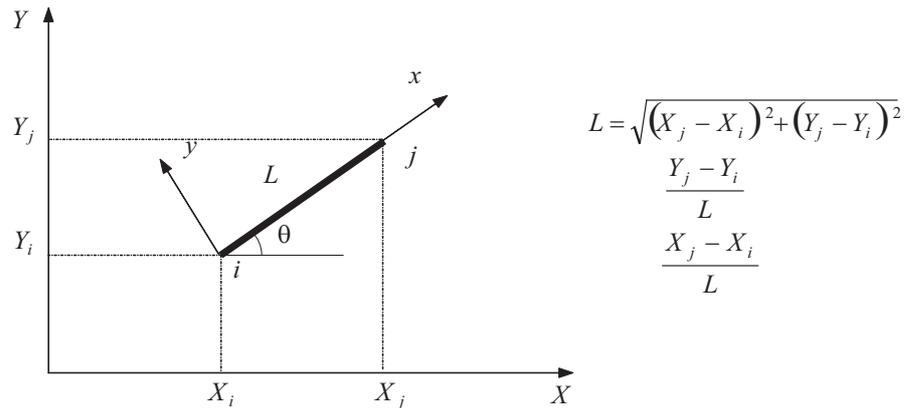


Figura 4.16: Elemento barra situado en el espacio bidimensional.

```
>> ke=rigid1D(1,1,1,5/4,1/10,1/20)
```

```
ke =
```

```
    0.4817   -0.4817
   -0.4817    0.4817
```

que coincide con el resultado exacto. Son necesarios por lo menos tres puntos de Gauss para integrar de forma exacta la matriz de rigidez. ■

**Comentario 4.7** *Es importante recalcar que si se desea implementar esta matriz de rigidez en un programa de elementos finitos es conveniente no emplear la rutina **GaussLeg.m**, ya que esta rutina hace una llamada a la rutina **gauleg.m** que calcula los puntos y pesos necesarios para emplear la fórmula de cuadratura de Gauss. Obviamente, una vez seleccionado el número de puntos a emplear es más eficiente obtener los puntos y los pesos una única vez y utilizarlos para integrar y obtener la matriz de rigidez de cada uno de los elementos.* ■

### 4.2.3. Elemento Barra en el Espacio Bidimensional (2D)

En la sección anterior se han estudiado los elementos tipo barra considerándolos como elementos unidimensionales en los que tanto cargas como desplazamientos eran colineales con el eje longitudinal de las barras. Pero en ingeniería las estructuras de barras son elementos muy empleados para formar entramados y celosías tanto bidimensionales como tridimensionales. Este tipo de estructuras tienen la particularidad de que cada una de las barras trabaja sólo en la dirección del eje de la misma. Por tanto, localmente (a nivel de barra) las ecuaciones que se obtuvieron en la sección anterior son igualmente válidas, pero se ha pasado de un único grado de libertad por nodo (una única incógnita-desplazamiento) a dos y tres para sistemas bidimensionales y tridimensionales, respectivamente.

Considérese en primera instancia que el elemento barra (elemento unidimensional) está situado en el espacio bidimensional, tal y como se indica en la Figura 4.16.

Para poder estudiar el comportamiento de la barra es necesario relacionar los desplazamientos *locales* asociados al eje de la barra  $u_i^{(e)'}$ ,  $v_i^{(e)'}$  con los desplazamientos asociados al espacio

Tabla 4.2: Relación entre el sistema de coordenadas global  $(X, Y)$  y el sistema de coordenadas local a nivel de barra  $(x, y)$ .

Local	Global
$x, y$	$X, Y$
nodo $i - u_i^{(e)'}, v_i^{(e)'}$	nodo $i - u_i^{(e)}, v_i^{(e)}$
1 grado de libertad por nodo	2 grados de libertad por nodo

bidimensional (*globales*)  $u_i^{(e)}, v_i^{(e)}$ . Para poder hacer compatibilidad en desplazamientos, éstos deben de estar referidos a un único sistema de coordenadas, que será el global  $X - Y$ . En la Tabla 4.2 se muestra la correspondencia entre ambos sistemas de referencia.

**Comentario 4.8** *Es importante recalcar que debido a la hipótesis de régimen de pequeñas deformaciones, los desplazamientos laterales no contribuyen al alargamiento o acortamiento de las barras. Matemáticamente esto implica que se puede sustituir el arco por la tangente.* ■

La relación entre los desplazamientos en coordenadas locales y globales viene dada por la expresión matricial:

$$\mathbf{u}_i^{(e)'} = [\mathcal{A}_i^{(e)}] \mathbf{u}_i^{(e)} \implies \begin{bmatrix} u_i^{(e)'} \\ v_i^{(e)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

donde la matriz de transformación  $[\mathcal{A}_i^{(e)}]$  puede ser escrita en función del ángulo  $(\theta)$  que forma el eje longitudinal de la barra con el eje  $X$  global (véase la Figura 4.16) como:

$$[\mathcal{A}_i^{(e)}] = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -\sen \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Nótese que esta transformación es ortogonal, es decir,  $[\mathcal{A}^{(e)}]^{-1} = [\mathcal{A}^{(e)}]^T$ . Esto implica que la distancia euclídea (longitudes de barras, desplazamientos, etc.) permanece invariante con la transformación.

Análogamente, la relación entre las fuerzas en coordenadas locales y globales viene dada por la expresión matricial:

$$\{\mathbf{f}_i^{(e)'}\} = [\mathcal{A}_i^{(e)}] \{\mathbf{f}_i^{(e)}\}. \quad (4.65)$$

Teniendo en cuenta que cada barra está compuesta por dos nodos ( $n_{n_e} = 2$ ) las relaciones entre fuerzas y desplazamientos globales y locales para los desplazamientos de cada elemento (barra) son, respectivamente:

$$\{\mathbf{u}^{(e)'}\} = [\mathcal{A}^{(e)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}; \quad \begin{bmatrix} u_i^{(e)'} \\ v_i^{(e)'} \\ u_j^{(e)'} \\ v_j^{(e)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \\ v_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

y

$$\{\mathbf{f}^{(e)'}\} = [\mathcal{A}^{(e)}] \{\mathbf{f}^{(e)}\}; \quad \begin{bmatrix} f_{x_i}^{(e)'} \\ 0 \\ f_{x_j}^{(e)'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{X_i}^{(e)} \\ f_{Y_i}^{(e)} \\ f_{X_j}^{(e)} \\ f_{Y_j}^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

#### 4.2.4. Matriz de Rigidez en el Espacio 2D

Para obtener la expresión de la matriz de rigidez de la barra en el espacio bidimensional se parte de la relación fuerza-desplazamiento en coordenadas locales<sup>1</sup> dada en (4.53):

$$\{\mathbf{f}^{(e)'}\} = [\mathbf{k}^{(e)'}] \{\boldsymbol{\delta}^{(e)'}\} \quad (4.68)$$

que expresada de forma explícita queda como:

$$\begin{bmatrix} f_{x_i}^{(e)'} \\ 0 \\ f_{x_j}^{(e)'} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)'} \\ v_i^{(e)'} \\ u_j^{(e)'} \\ v_j^{(e)'} \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Si se sustituyen tanto las fuerzas como los desplazamientos ( $\{\mathbf{f}^{(e)'}\}, \{\mathbf{u}^{(e)'}\}$ ) locales, por las fuerzas y desplazamientos globales ( $\{\mathbf{f}^{(e)}\}, \{\mathbf{u}^{(e)}\}$ ) mediante la transformación de coordenadas definida por la matriz  $\mathcal{A}^{(e)}$  (4.65) resulta:

$$[\mathcal{A}^{(e)}] \{\mathbf{f}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)'}] [\mathcal{A}^{(e)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}. \quad (4.70)$$

Multiplicando por la izquierda ambos miembros de la expresión por la matriz  $[\mathcal{A}^{(e)}]^{-1}$  y teniendo en cuenta la ortogonalidad de la misma,  $[\mathcal{A}^{(e)}]^{-1} = [\mathcal{A}^{(e)}]^T$ , se llega a la siguiente expresión:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = [\mathcal{A}^{(e)}]^T [\mathbf{k}^{(e)'}] [\mathcal{A}^{(e)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (4.71)$$

es decir:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (4.72)$$

donde la matriz rigidez en el sistema global  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  viene dada por la expresión:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = [\mathcal{A}^{(e)}]^T [\mathbf{k}^{(e)'}] [\mathcal{A}^{(e)}], \quad (4.73)$$

mientras que su forma inversa es:

$$[\mathbf{k}^{(e)'}] = [\mathcal{A}^{(e)}] [\mathbf{k}^{(e)}] [\mathcal{A}^{(e)}]^T. \quad (4.74)$$

Sustituyendo las matrices por sus expresiones explícitas se obtienen la expresión explícita de la matriz de rigidez en coordenadas globales:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

y simplificando queda como:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

<sup>1</sup>Nótese que el símbolo prima "r" indica coordenadas locales

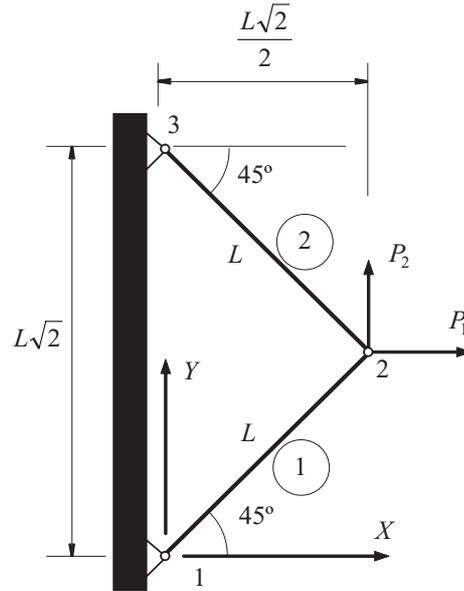


Figura 4.17: Sistema de barras bidimensional del Ejemplo Ilustrativo 4.5.

#### 4.2.5. Tensión en el Elemento Barra Bidimensional

El cálculo de la tensión, en el sistema local, para cada uno de los elementos se obtiene mediante la expresión (4.42) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(e)} &= E\varepsilon^{(e)} & (4.77) \\
 \sigma^{(e)} &= E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)'} \\ u_j^{(e)'} \end{bmatrix} \\
 &= E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \\ v_j^{(e)} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

que simplificando queda como:

$$\sigma^{(e)} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \\ v_j^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

**Ejemplo ilustrativo 4.5 (Sistema de barras en el plano).** Supóngase la celosía mostrada en la Figura 4.17 que está constituida por dos barras cuyos módulos de elasticidad, áreas y longitudes valen  $E$ ,  $A$ , y  $L$ , respectivamente, de tal forma que  $EA/L = 1$ . Supuestas dos cargas  $P_1 = 1$  y  $P_2 = 1$  actuando en el nodo 2, se pide:

1. Obtener los desplazamientos del nodo 2.
2. Calcular la tensión a la que están sometidas las barras.

Nodo	X	Y
1	0	0
2	$\frac{L\sqrt{2}}{2}$	$\frac{L\sqrt{2}}{2}$
3	0	$L\sqrt{2}$

Tabla 4.3: Coordenadas de los nodos del sistema de barras del Ejemplo Ilustrativo 4.5.

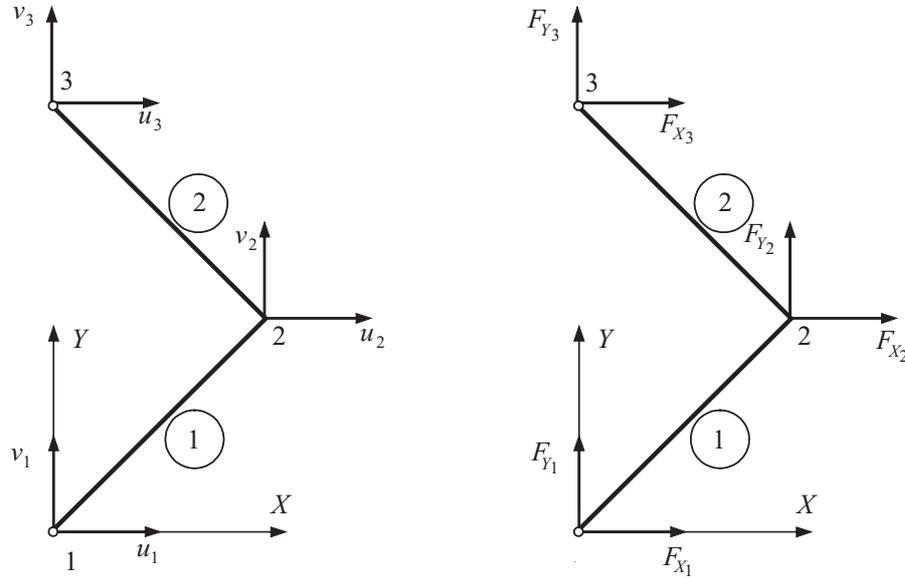


Figura 4.18: Desplazamientos y fuerzas nodales en coordenadas globales.

**Solución:**

Antes de proceder al cálculo necesitamos conocer las coordenadas globales (en el espacio 2D) de los nodos. Teniendo en cuenta que la longitud de las barras es  $L$ , los valores de las coordenadas se muestran en la Tabla 4.3. Las condiciones de contorno y las fuerzas en los nodos se muestran en la Figura 4.18.

A continuación se procede al cálculo de las matrices de rigidez de cada una de las barras, para lo cual se necesita de la matriz de transformación de cada una de las barras  $[\mathcal{A}^{(e)}]$ :

- **Elemento 1:** Para el elemento 1, con  $\theta = 45^\circ$ , los elementos de la matriz  $[\mathcal{A}^{(1)}]$  son  $l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Utilizando la matriz de rigidez obtenida en (4.76) resulta:

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

- **Elemento 2:** Análogamente, para el elemento 2, con  $\theta = 135^\circ$ , los elementos de la matriz  $[\mathcal{A}^{(2)}]$  son  $l = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , con lo que empleando la matriz de rigidez obtenida en (4.76)

resulta:

$$[\mathbf{k}^{(2)}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

El siguiente paso es el ensamblaje de las matrices de rigidez local en coordenadas globales para formar la matriz de rigidez global. Este procedimiento es análogo al ensamblaje de elementos unidimensionales tratado en la Sección 4.1.2.1, obteniendo:

$$[\mathbf{K}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.81)$$

Así pues el sistema de ecuaciones  $\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}$  resultante es:

$$\begin{bmatrix} F_{X_1} \\ F_{Y_1} \\ F_{X_2} \\ F_{Y_2} \\ F_{X_3} \\ F_{Y_3} \end{bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

donde la matriz  $[\mathbf{K}]$  es singular, es decir,  $\det([\mathbf{K}]) = 0$ .

Si se tienen en cuenta tanto las cargas externas, como los desplazamientos impuestos (condiciones de contorno), es decir:

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0; \quad F_{X_2} = P_1 \text{ y } F_{Y_2} = P_2,$$

entonces el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

La solución del sistema anterior nos permite calcular los desplazamientos del nodo 2:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Una vez obtenidos los desplazamientos de los nodos se puede proceder al cálculo de las tensiones en los nodos sin más que emplear la ecuación (4.78) de la siguiente manera:

#### ■ Barra 1

$$\sigma^{(1)} = \frac{E\sqrt{2}}{L} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 + P_2). \quad (4.86)$$

■ Barra 2

$$\sigma^{(2)} = \frac{E\sqrt{2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 - P_2). \quad (4.88)$$

■

#### 4.2.6. Procedimiento Sistemático de Ensamblaje de Elementos Bidimensionales

A continuación se va automatizar el ensamblaje para elementos bidimensionales y en concreto al caso de estructuras articuladas, que poseen dos grados de libertad por nodo.

Para este tipo de elemento la matriz de rigidez, el vector desplazamientos y el vector de fuerzas nodales, con respecto al sistema global, tienen los siguientes formatos:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & -k_{11}^{(e)} & -k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & -k_{21}^{(e)} & -k_{22}^{(e)} \\ -k_{11}^{(e)} & -k_{12}^{(e)} & k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ -k_{21}^{(e)} & -k_{22}^{(e)} & k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{u}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \text{y} \quad \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} f_{x_1}^{(e)} \\ f_{y_1}^{(e)} \\ f_{x_2}^{(e)} \\ f_{y_2}^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (4.89)$$

donde tanto la matriz de rigidez como los vectores de fuerzas y desplazamientos se han separado por bloques. Cada uno de estos bloques (matrices) está asociado a uno de los nodos del elemento. Por eso en este caso tenemos dos bloques ( $n_{n_e} = 2$ ). A su vez cada uno de esos bloques tiene de dimensiones  $n_{g_n} \times n_{g_n}$ , donde  $n_{g_n}$  es el número de grados de libertad por nodo (2 en este caso).

Supóngase que se tiene un sistema con dos elementos tal y como se muestra en la Figura 4.17. Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos son las siguientes:

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cc} 1 & & & 2 \\ \hline k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & -k_{11}^{(1)} & -k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & -k_{21}^{(1)} & -k_{22}^{(1)} \\ \hline -k_{11}^{(1)} & -k_{12}^{(1)} & k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ -k_{21}^{(1)} & -k_{22}^{(1)} & k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

$$[\mathbf{k}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cc} 2 & & & 3 \\ \hline k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & -k_{11}^{(2)} & -k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & -k_{21}^{(2)} & -k_{22}^{(2)} \\ \hline -k_{11}^{(2)} & -k_{12}^{(2)} & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ -k_{21}^{(2)} & -k_{22}^{(2)} & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

donde cada bloque de  $2 \times 2$  se corresponde con cada nodo de la barra, y cada elemento de cada bloque se corresponde con cada grado de libertad ( $X, Y$ ) de cada nodo.

Sin embargo, si consideramos la estructura completa, hemos de numerar los nodos de forma global y tener en cuenta que hay nodos comunes para varios elementos, por eso es necesario definir la matriz de conectividad de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_{\text{on}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

de forma que el primer elemento-barra (primera fila de la matriz de conectividad) está constituido por los nodos 1 y 2 en numeración global, y el segundo elemento-barra (segunda fila de la matriz de conectividad) está constituido por los nodos 2 y 3. Esto implica que los bloques 1 y 2 están ligados a los nodos globales tal y como se muestra en las ecuaciones (4.90) y (4.91).

Dado que en la estructura, los elementos individuales están interconectados e interactúan entre sí, es preciso tenerlo en cuenta a la hora de ensamblar para obtener la matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$ , para ello basta con sumar la contribución de cada elemento en los nodos y en los grados de libertad en común utilizando la información de la matriz de conectividad. De esta forma se obtendría la siguiente matriz de rigidez del sistema:

$$[\mathbf{K}] = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 \\ \hline k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & -k_{11}^{(1)} & -k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & -k_{21}^{(1)} & -k_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ \hline -k_{11}^{(1)} & -k_{12}^{(1)} & k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(1)} + k_{12}^{(2)} & -k_{11}^{(2)} & -k_{12}^{(2)} \\ -k_{21}^{(1)} & -k_{22}^{(1)} & k_{21}^{(1)} + k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & -k_{21}^{(2)} & -k_{22}^{(2)} \\ \hline 0 & 0 & -k_{11}^{(2)} & -k_{12}^{(2)} & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & -k_{21}^{(2)} & -k_{22}^{(2)} & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \text{GL} \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (4.93)$$

Nótese que la matriz es simétrica y que la suma o ensamblaje se efectúa por bloques. Análogamente para el caso del vector de fuerzas obtenemos:

$$\{\mathbf{F}\} = \left\{ \begin{array}{c} f_{x_1}^{(1)} \\ f_{y_1}^{(1)} \\ \hline f_{x_2}^{(1)} + f_{x_1}^{(2)} \\ f_{y_2}^{(1)} + f_{y_1}^{(2)} \\ \hline f_{x_2}^{(2)} \\ f_{y_2}^{(2)} \end{array} \right\}. \quad (4.94)$$

Para ensamblar de forma sistemática tanto el vector de fuerzas como la matriz de rigidez para el caso de elementos bidimensionales hay que emplear el siguiente algoritmo:

#### Algoritmo 4.2 (Ensamblaje bidimensional).

- **Entrada:** Conjunto inicial de matrices de rigidez  $\mathbf{k}^{(e)}$ ;  $e = 1, \dots, n_e$  y vectores de fuerzas asociados  $\mathbf{f}^{(e)}$ ;  $e = 1, \dots, n_e$  asociados a cada elemento, y matriz de conectividad  $\mathbf{C}_{\text{on}}$ . En este caso en número de grados de libertad por nodo  $n_{g_n}$  es igual a 2, mientras que el número de nodos por elemento  $n_{n_e}$  es igual a 2.
- **Salida:** Matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  y vector de fuerzas  $\mathbf{F}$  de la estructura.

**Paso 1:** Inicializamos el número de elementos  $n_e$  de la estructura como el número de filas de la matriz de conectividad, el número de nodos  $n_n$  del sistema se obtendrá como el máximo valor de la matriz de conectividad:  $n_n = \max c_{ij}$ .

**Paso 2:** Inicialización de la matriz de rigidez del sistema  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$  de dimensiones  $(n_n \times n_{g_n}, n_n \times n_{g_n})$  y del vector de fuerzas  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  de dimensiones  $(n_n \times n_{g_n})$ .

**Paso 3:** Se inicializa el contador de elementos  $n_{el} = 1$  y se procede al ensamblaje.

**Paso 4:** Recorrer todos los bloques de la matriz de rigidez  $\mathbf{k}_{ij}^{(n_{el})}$ ;  $\forall i = 1, \dots, n_{ne}; j = 1, \dots, n_{ne}$  de dimensiones  $n_{g_n} \times n_{g_n}$ , y sumarlos en el bloque

$$((c_{n_{el},i} - 1)n_{g_n} + 1 : c_{n_{el},i}n_{g_n}, (c_{n_{el},j} - 1)n_{g_n} + 1 : c_{n_{el},j}n_{g_n})$$

de la matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$ . Análogamente, para el caso de las fuerzas, sumar todos los vectores columna  $\mathbf{f}_i^{(n_{el})}$  de dimensiones  $n_{g_n}$  en el bloque-columna

$$((c_{n_{el},i} - 1)n_{g_n} + 1 : c_{n_{el},i}n_{g_n})$$

del vector  $\mathbf{F}$ .

**Paso 5:** Si  $n_{el}$  es menor que el número de elementos  $n_e$  entonces incrementar  $n_{el}$  en una unidad  $n_{el} \leftarrow n_{el} + 1$  y continuar con el **Paso 4**. En caso contrario el algoritmo finaliza. ■

**Comentario 4.9** Análogamente a lo que ocurría en el caso unidimensional las fuerzas que actúan en una estructura (sistema) vienen dadas en coordenadas globales, es decir, asociadas directamente a los nodos. Con lo cual el procedimiento de ensamblaje desde el punto de vista computacional cambia con respecto a lo mostrado en el Algoritmo 4.2. ■

#### 4.2.7. Aplicación de las Condiciones de Contorno en Sistemas Bidimensionales

En la sección anterior se expuso de forma concisa un método sistemático para ensamblar la matriz de rigidez y el vector de fuerzas global para un sistema de barras dado. Análogamente a lo que ocurría en el caso unidimensional, la matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  efectivamente contiene la información del comportamiento deformacional del sistema en equilibrio, pero si se trata de resolver el sistema:

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (4.95)$$

con los métodos tradicionales (Gauss, LU, Cholesky) aplicables sólo a sistemas compatibles determinados se llegaría a la conclusión de que es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones. Efectivamente la estructura puede estar en equilibrio en distintas posiciones en el espacio sin más que moverla como un sólido rígido. Para resolver este problema y obtener una única solución, lo que se hace es impedir el movimiento de sólido rígido de la estructura fijando algunos de los desplazamientos (condiciones de contorno o apoyo). En contraposición, las reacciones o fuerzas en estos apoyos pasaran a ser desconocidas.

Las dimensiones de la matriz de rigidez del sistema en (4.95) son  $(n_{gt}, n_{gt})$ , donde  $n_{gt}$  es el número de grados de libertad totales del sistema, que es igual al número de nodos multiplicado por el número de grados de libertad por nodo ( $n_{gt} = n_n \times n_{g_n}$ ). Su rango, es decir, el número de vectores linealmente independientes de esta matriz es siempre menor que  $n_{gt}$ . Este hecho tiene dos implicaciones:

1. El determinante de la matriz de rigidez es nulo  $|\mathbf{K}| = 0$ .

2. El sistema de ecuaciones (4.95) tiene infinitas soluciones, ya que el sistema puede adoptar infinitas posiciones (movimiento de sólido rígido).

Para ilustrar este hecho se presentan a continuación diversos ejemplos de estructuras articuladas resueltas mediante el método de ortogonalización introducido en la Sección 2.2.1.13, y que permite calcular las infinitas soluciones de un sistema compatible indeterminado:

**Ejemplo ilustrativo 4.6 (Estructura articulada isostática).** Supóngase la estructura mostrada en la Figura 4.19 en la que las barras tienen un valor constante de la rigidez  $k = \frac{EA}{L}$ . Si se ensamblan las matrices de rigidez de cada una de las barras se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

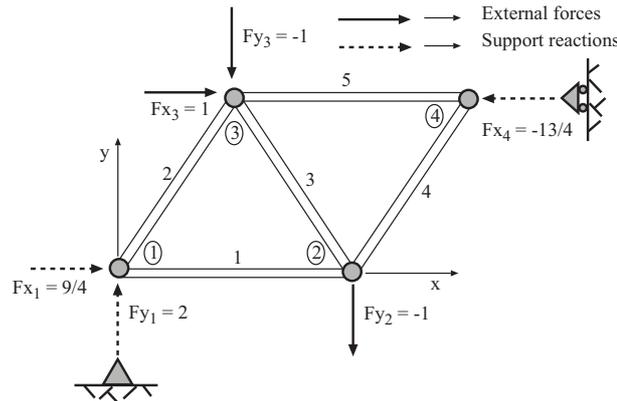


Figura 4.19: Estructura articulada en dos dimensiones.

$$\frac{k}{150} \begin{pmatrix} 179 & 72 & | & -125 & 0 & | & -54 & -72 & | & 0 & 0 \\ 72 & 96 & | & 0 & 0 & | & -72 & -96 & | & 0 & 0 \\ - & - & + & - & - & + & - & - & + & - & - \\ -125 & 0 & | & 233 & 0 & | & -54 & 72 & | & -54 & -72 \\ 0 & 0 & | & 0 & 192 & | & 72 & -96 & | & -72 & -96 \\ - & - & + & - & - & + & - & - & + & - & - \\ -54 & -72 & | & -54 & 72 & | & 233 & 0 & | & -125 & 0 \\ -72 & -96 & | & 72 & -96 & | & 0 & 192 & | & 0 & 0 \\ - & - & + & - & - & + & - & - & + & - & - \\ 0 & 0 & | & -54 & -72 & | & -125 & 0 & | & 179 & 72 \\ 0 & 0 & | & -72 & -96 & | & 0 & 0 & | & 72 & 96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ - \\ - \\ u_2 \\ v_2 \\ - \\ - \\ u_3 \\ v_3 \\ - \\ - \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ - \\ - \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ - \\ - \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \\ - \\ - \\ F_{x_4} \\ F_{y_4} \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

donde tanto los desplazamientos  $u_i, v_i; i = 1, \dots, 4$  como las fuerzas externas que actúan sobre la estructura se muestran en las Figuras 4.20 (a) y (b), respectivamente. Nótese que las diferentes particiones se refieren a nodos distintos.

En primer lugar cabría preguntarse que condiciones mínimas ha de satisfacer el sistema de ecuaciones (4.96) para tener al menos una solución. Este procedimiento se puede hacer mediante el método de ortogonalización con lo que se llegan a las siguientes condiciones:

$$0 = F_{x_1} + F_{x_2} + F_{x_3} + F_{x_4} \tag{4.97}$$

$$0 = F_{y_1} + F_{y_2} + F_{y_3} + F_{y_4} \tag{4.98}$$

$$0 = 4/5F_{x_1} - 3/5F_{y_1} + 4/5F_{x_2} + 3/5F_{y_2} + 6/5F_{y_4}, \tag{4.99}$$

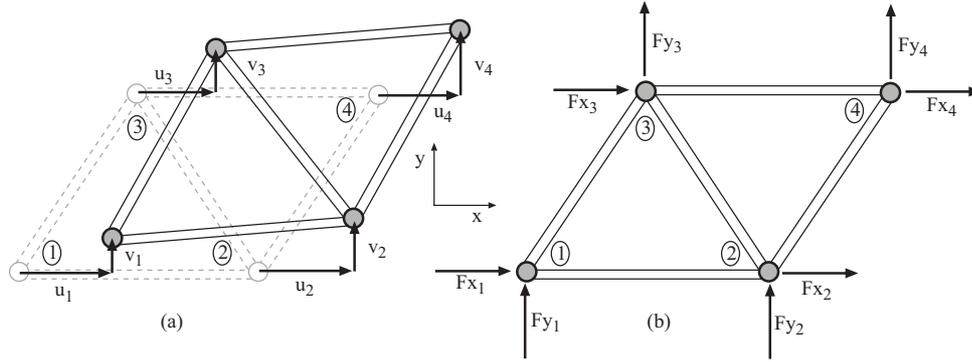


Figura 4.20: Fuerzas y desplazamientos de la estructura articulada de Ejemplo Ilustrativo 4.6 en el plano.

en las que (4.97) y (4.98) representan el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales, respectivamente, y (4.99) representa el equilibrio de momentos (momento tomado respecto al nodo 3). Es decir, que matemáticamente se ha llegado a la conclusión de que la condición necesaria para que exista al menos una solución al problema (4.96) es que las fuerzas externas a la estructura han de estar en equilibrio ( $\sum F_{x_i} = 0$ ,  $\sum F_{y_i} = 0$  y  $\sum M_i = 0$ ,  $M_i$  es el momento de la fuerza  $F_i$  con respecto a un punto).

El rango de la matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  en este caso es 5, lo que implica que hay 5 vectores linealmente independientes, y tres vectores que se pueden obtener como combinación lineal de los 5.

Para obtener todas las soluciones del sistema (4.96), se aplica el algoritmo de ortogonalización con lo que se obtiene:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 467/120 \\ 501/160 \\ 359/120 \\ -359/160 \\ 39/10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho_3 \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6/5 \end{pmatrix}; \quad \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}, \quad (4.100)$$

que desde un punto de vista matemático representa un espacio afín, es decir, que es la suma de una solución particular más un espacio de dimensión 3 (dimensión de la matriz  $[\mathbf{K}]$  menos su rango 5) que no es más que una combinación lineal de tres vectores linealmente independientes.

Desde un punto de vista ingenieril la solución (4.100) se puede interpretar de la siguiente manera:

1. La dimensión del espacio solución coincide con el número mínimo de grados de libertad que se han de imponer para que el sistema tenga una solución única, es decir, para impedir movimientos de sólido rígido de la estructura.
2. El espacio compuesto por los vectores a los que se les asocian los coeficientes  $\rho$  implica que la estructura puede estar ubicada en infinitas posiciones distintas siempre y cuando se garantice el equilibrio.
3. El primero de los vectores de desplazamientos solución es una solución particular que satisface la ecuación (4.96) para los valores de las fuerzas  $\{\mathbf{F}\}$  mostrados en la Figura 4.19.

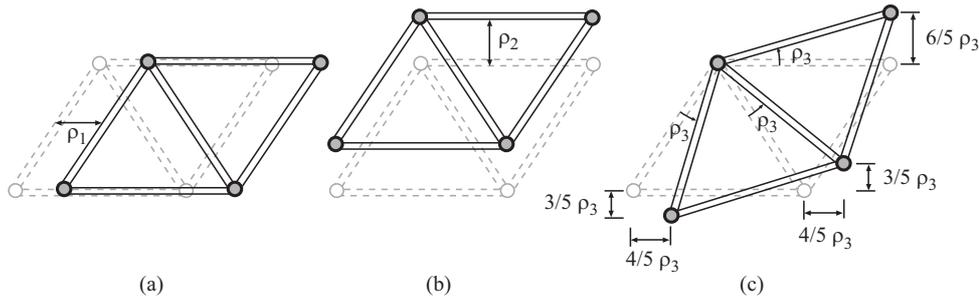


Figura 4.21: Ilustración gráfica de los vectores linealmente independientes que componen la solución en el Ejemplo Ilustrativo 4.6. Éstos se corresponden con: (a) Una traslación horizontal, (b) una traslación vertical, y (c) un giro respecto al nodo 3.

Es importante recalcar que este vector puede reemplazarse por cualquier otra solución particular, que puede obtenerse añadiendo a la misma cualquier combinación lineal de los 3 vectores básicos.

- Los otros tres vectores son soluciones del problema homogéneo, es decir, sin fuerzas externas. En este caso particular se corresponden con un desplazamiento horizontal de toda la estructura como si fuera un sólido rígido, un desplazamiento vertical, y un giro respecto al nodo 3, respectivamente (véase la Figura 4.21).

Obviamente el espacio vectorial generado por esos tres vectores en (4.100) se podría haber representado en cualquier otra base del mismo espacio. ■

**Ejemplo ilustrativo 4.7 (Estructura articulada crítica).** Si se considera la misma estructura articulada que en ejemplo Ilustrativo 4.6 pero con otras condiciones de contorno, por ejemplo,  $u_1 = 0, v_1 = 0$  y  $u_2 = 0$ , entonces de (4.100) se obtiene que:

$$\begin{aligned} u_1 &= 467/(120k) + \rho_1 + 4/5\rho_3 = 0 \\ v_1 &= 501/(160k) + \rho_2 - 3/5\rho_3 = 0 \\ u_2 &= 359/(120k) + \rho_1 + 4/5\rho_3 = 0, \end{aligned}$$

que es un sistema compatible indeterminado porque la submatriz de coeficientes asociados con los valores  $\rho, u_1, v_1$  y  $u_4$  en (4.100) cumple que:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 1 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} = 2 < 3.$$

Si se incorpora la información de las condiciones de contorno del problema al sistema (4.96), considerando las fuerzas externas (véase la Figura 4.22)

$$\{\mathbf{F}\} = \frac{1}{8} ( 9 \quad 12 \quad 0 \quad -8 \quad 8 \quad -8 \quad -17 \quad 4 )^T,$$

que satisfacen las condiciones de compatibilidad (4.97)-(4.99) (equilibrio) y aplicando el algoritmo

mo de ortogonalización se obtiene la nueva solución del problema:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -49/16 \\ -1/24 \\ -37/16 \\ -73/24 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6/5 \\ -4/5 \\ 3/5 \\ -4/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}. \tag{4.101}$$

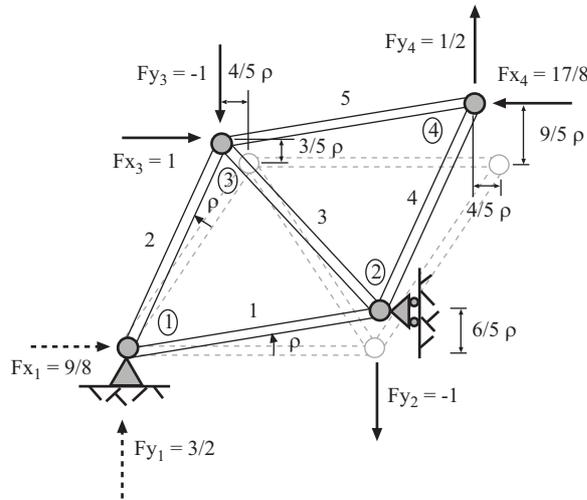


Figura 4.22: Conjunto de soluciones asociadas con las condiciones de contorno  $u_1 = 0, v_1 = 0$  y  $u_2 = 0$  para una estructura crítica.

Esta solución se puede interpretar de la siguiente manera:

1. El primer vector es una solución particular que satisface la ecuación (4.96) para el vector  $\{\mathbf{F}\}$  considerado y para las condiciones de contorno  $u_1 = 0, v_1 = 0$  y  $u_2 = 0$ .
2. El segundo vector es una solución del problema homogéneo (sin cargas), y representa una rotación de la estructura con respecto al nodo 1 como sólido rígido, tal y como se muestra en la Figura 4.22. Esto significa que las condiciones de contorno impuestas, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, no son capaces de impedir el movimiento de la estructura como sólido rígido. Adicionalmente, se puede observar que las condiciones de contorno no son suficientes para garantizar el equilibrio de la estructura con cualquier vector de fuerzas externas  $\{\mathbf{F}\}$ .

■

**Ejemplo ilustrativo 4.8 (Mecanismo).** Considérese la estructura articulada mostrada en la Figura 4.23. El sistema de ecuaciones resultante del ensamblaje de las matrices de rigidez de cada una de sus barras es:

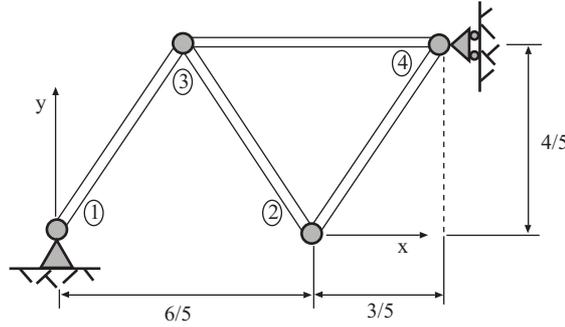


Figura 4.23: Mecanismo del Ejemplo Ilustrativo 4.8.

$$\frac{k}{150} \underbrace{\begin{pmatrix} 54 & 72 & 0 & 0 & -54 & -72 & 0 & 0 \\ 72 & 96 & 0 & 0 & -72 & -96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 108 & 0 & -54 & 72 & -54 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & 192 & 72 & -96 & -72 & -96 \\ -54 & -72 & -54 & 72 & 233 & 0 & -125 & 0 \\ -72 & -96 & 72 & -96 & 0 & 192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -54 & -72 & -125 & 0 & 179 & 72 \\ 0 & 0 & -72 & -96 & 0 & 0 & 72 & 96 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix}}_{\{\mathbf{u}\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \\ F_{x_4} \\ F_{y_4} \end{pmatrix}}_{\{\mathbf{F}\}} \quad (4.102)$$

y sus correspondientes condiciones de compatibilidad son:

$$0 = F_{x_1} + F_{x_2} + F_{x_3} + F_{x_4} \quad (4.103)$$

$$0 = F_{y_1} + F_{y_2} + F_{y_3} + F_{y_4} \quad (4.104)$$

$$0 = 4/5 F_{x_1} - 3/5 F_{y_1} \quad (4.105)$$

$$0 = 4/5 F_{x_2} + 3/5 F_{y_2} + 6/5 F_{y_4}, \quad (4.106)$$

donde (4.103) y (4.104) constituyen el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales, respectivamente, y (4.105) y (4.106) establecen el equilibrio de momentos con respecto al nodo 3 de las subestructuras que están a su izquierda y a su derecha, respectivamente.

Si se considera el vector de fuerzas

$$\{\mathbf{F}\} = \frac{1}{8} (9 \quad 12 \quad 0 \quad -8 \quad 8 \quad -8 \quad -17 \quad 4)^T,$$

que cumple las condiciones de compatibilidad (4.103)-(4.106) (equilibrio) y se resuelve el sistema (4.102) se llega a la siguiente solución:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 49/8 \\ 0 \\ 3/2 \\ -61/32 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho_3 \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6/5 \end{pmatrix}, \quad (4.107)$$

donde  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \mathbb{R}$ . Desde un punto de vista matemático la solución es un espacio afín de dimensión 4, es decir, suma de una solución particular más una combinación lineal de 4 vectores linealmente independientes. La interpretación gráfica de los mismos se muestra en la Figura 4.24 (a-d), y se corresponden con una traslación horizontal, una traslación vertical, y dos rotaciones independientes con respecto al nodo 3. Nótese que si se elimina la barra 1-2, la barra 1-3 y la subestructura de la derecha pueden rotar con respecto al nodo 3 de forma independiente. Por eso hay dos parámetros  $\rho_3$  y  $\rho_4$ , asociados a las rotaciones. Si se suman los vectores asociados a las rotaciones en (4.107) el vector resultante coincide con la solución (4.100) en la que la barra 1-2 existe.

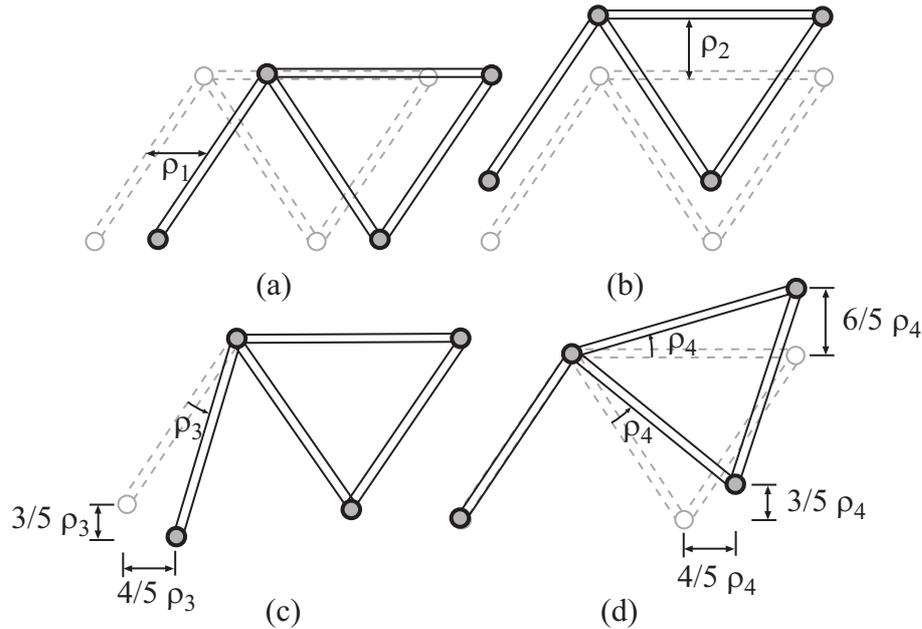


Figura 4.24: Ilustración gráfica de los vectores linealmente independientes correspondientes a la solución del Ejemplo Ilustrativo 4.8.

Si a continuación se añaden las condiciones de contorno  $u_1 = 0, v_1 = 0$  y  $u_4 = 0$ , entonces de (4.107) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1 &= 49/(8k) + \rho_1 + 4/5\rho_3 = 0 \\ v_1 &= \rho_2 - 3/5\rho_3 = 0 \\ u_4 &= \rho_1 = 0 \end{aligned}$$

cuya solución es  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = -147/(32k)$  y  $\rho_3 = -245/(32k)$ , pero  $\rho_4$  puede tomar cualquier valor.

Si se considera la siguiente matriz de condiciones de contorno se cumple que:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} \mathbf{K} \\ - \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = 2m - 1 = 7$$

lo que implica que aun hay 1 movimiento de sólido rígido permitido bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones.

Así, la solución en este caso es:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/2 \\ -13/2 \\ 3 \\ -147/32 \\ 0 \\ -147/32 \end{pmatrix} + \rho_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6/5 \end{pmatrix},$$

por lo que efectivamente se puede comprobar que las condiciones de contorno impuestas no son suficientes para garantizar el equilibrio de sólido rígido, ya que la subestructura derecha aun puede rotar con respecto al nodo 3, tal y como se muestra en la Figura 4.25.

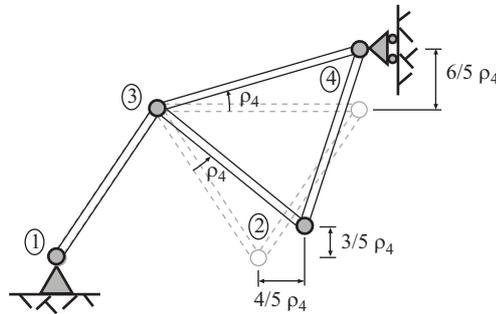


Figura 4.25: Ilustración gráfica de como las condiciones de contorno  $u_1 = 0, v_1 = 0$  y  $u_4 = 0$  no impiden la rotación de la subestructura derecha con respecto al nodo 3.

■

A la vista de los ejemplos anteriores queda claro que hay que ser cuidadoso al introducir las condiciones de contorno de forma que éstas sean suficientes para garantizar no sólo los desplazamientos de sólido rígido, sino también que las reacciones en los apoyos garanticen el equilibrio de la estructura (compatibilidad del sistema).

El método para modificar el sistema de ecuaciones (4.95) y que se cumplan las condiciones de contorno es exactamente el mismo que para el caso unidimensional, pero en este caso para cada nodo se puede imponer una condición de contorno asociada a cada grado de libertad. Esto implica que la forma de introducir las condiciones de contorno varíe ligeramente con respecto al caso unidimensional, así la matriz con la información de las condiciones de contorno se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_{bo} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.108)$$

de forma que la primera columna contiene la información del número de nodo en el que se va a imponer una condición de contorno, las dos siguientes columnas están asociadas a los grados de libertad  $X$  e  $Y$ , respectivamente, y contienen un 1 si existe condición de contorno asociada a ese grado de libertad o un 0 en caso contrario. Las últimas dos columnas se corresponden con el valor de la condición de contorno impuesta para cada grado de libertad. En caso de que no haya, su valor por defecto será cero.

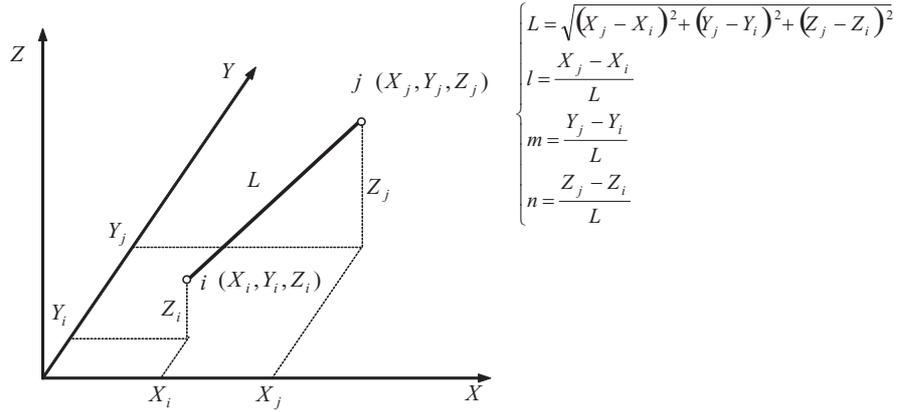


Figura 4.26: Barra en el espacio 3D.

#### 4.2.8. Elemento Barra en el Espacio Tridimensional (3D)

Previo paso a la elaboración del programa en MATLAB se muestra cómo se puede hacer el tratamiento de las estructuras articuladas suponiendo que están en el espacio tridimensional.

Considérese una barra en el espacio tridimensional tal y como se muestra en la Figura 4.26.

Las componentes de los desplazamientos en el sistema local están relacionadas con los desplazamientos en el sistema global por la siguiente expresión:

$$u_i^{(e)'} = lu_i^{(e)} + mv_i^{(e)} + nw_i^{(e)} \quad (4.109)$$

$$u_j^{(e)'} = lu_j^{(e)} + mv_j^{(e)} + nw_j^{(e)}, \quad (4.110)$$

expresión que en forma matricial queda como:

$$\begin{bmatrix} u_i^{(e)'} \\ u_j^{(e)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \\ w_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \\ v_j^{(e)} \\ w_j^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (4.111)$$

de tal forma que la matriz de transformación queda como:

$$[\mathcal{A}^{(e)}] = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}. \quad (4.112)$$

Como ya se vio en (4.73) la matriz de rigidez en el sistema global queda como:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = [\mathcal{A}^{(e)}]^T [\mathbf{k}^{(e)'}] [\mathcal{A}^{(e)}], \quad (4.113)$$

donde:

$$[\mathbf{k}^{(e)'}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.114)$$

Si se efectúa el producto matricial (4.113) se llega a la siguiente expresión para la matriz de rigidez de un elemento barra en el espacio tridimensional:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ \hline -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix}. \quad (4.115)$$

Nótese que los términos de la matriz de rigidez se obtienen a partir de los cosenos directores de los ángulos que forman las barras con los ejes coordenados. Éstos se obtienen a partir de las coordenadas de los nodos mediante las siguientes expresiones:

$$l = \frac{X_j - X_i}{L} \quad ; \quad m = \frac{Y_j - Y_i}{L} \quad ; \quad n = \frac{Z_j - Z_i}{L}, \quad (4.116)$$

donde  $L$  es la longitud de la barra que se puede calcular con las coordenadas de los nodos como  $L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}$ .

Nótese que en este caso el número de nodos por barra sigue siendo el mismo pero el número de grados de libertad por nodo ahora es de tres ( $n_{gn} = 3$ ).

#### 4.2.8.1. Tensión en el Elemento Barra en el Espacio Tridimensional

Empleando la misma formulación que en la Sección 4.2.5 se puede obtener la tensión a la que está sometido un elemento tipo barra como:

$$\begin{aligned} \sigma^{(e)} &= E\varepsilon^{(e)} & (4.117) \\ \sigma^{(e)} &= E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)'} \\ u_j^{(e)'} \end{bmatrix} \\ &= E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \\ w_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \\ v_j^{(e)} \\ w_j^{(e)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que simplificando queda como:

$$\sigma^{(e)} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & -n & l & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \\ w_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \\ v_j^{(e)} \\ w_j^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (4.118)$$

**Comentario 4.10** Desde el punto de vista computacional el utilizar la expresión (4.116) nos permite despreocuparnos del signo de los ángulos. ■

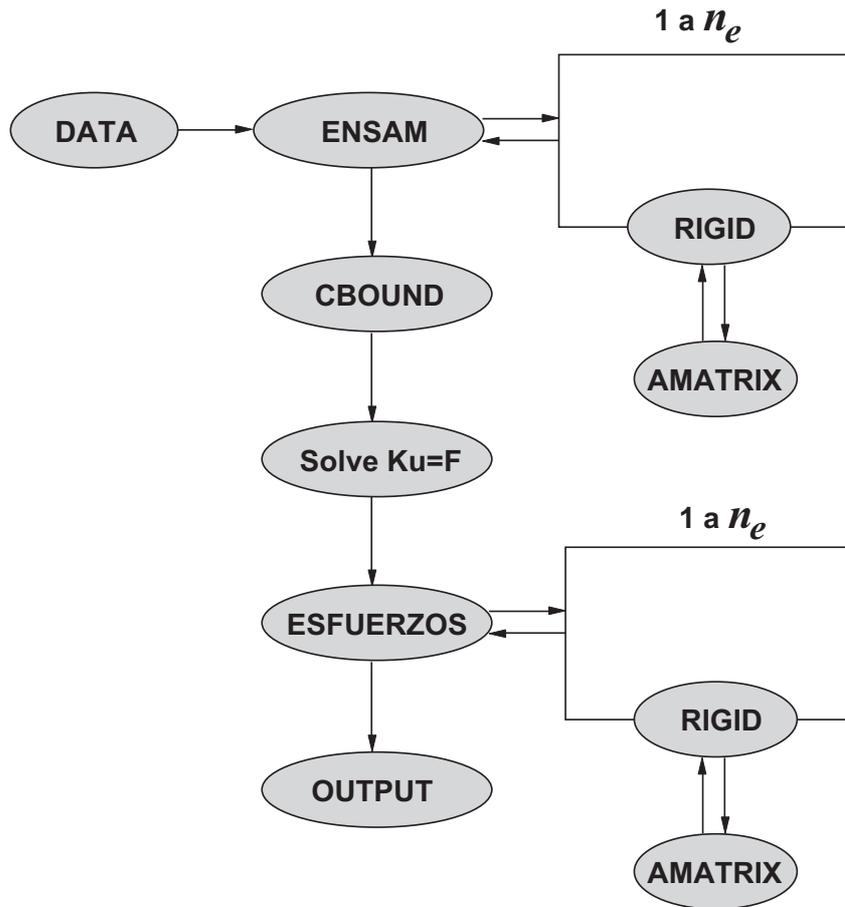


Figura 4.27: Organigrama del programa para resolver estructuras articuladas (celosías) tanto en 2 como en 3 dimensiones.

#### 4.2.9. Programa para Ensamblaje y Resolución de Estructuras Articuladas en MATLAB

En este apartado se explica el desarrollo de un programa en MATLAB que realice las siguientes acciones:

- Ensamblaje de forma automática de la matriz de rigidez de cualquier estructura articulada.
- Ensamblar las cargas en el vector de fuerzas globales.
- Introducir las condiciones de contorno del problema.
- Resolver el sistema de ecuaciones resultante.
- Realizar un post-proceso para visualizar los resultados.

El organigrama del programa propuesto se muestra en la Figura 4.27, los elementos que constituyen el programa son los siguientes:

##### Datos de entrada

- **p**: vector que contiene las propiedades de cada barra, indicando el tipo de material de que están constituidas.

- E**: vector que contiene los módulos de elasticidad o de Young para cada tipo de material.
- A**: vector que contiene las áreas para cada tipo de barra (material).
- C<sub>on</sub>**: matriz de conectividad.
- C<sub>bo</sub>**: matriz con las información de las condiciones de contorno.
- P**: vector de cargas externas.
- x**: matriz de coordenadas locales en las que se dan las coordenadas de cada uno de los nodos de la discretización.

### Variables

- $n_e$ : número de elementos (barras).
- $n_{g_n}$ : número de grados de libertad por nodo, en este caso  $n_{g_n} = 2$  ó  $3$ .
- $n_{n_e}$ : número de nodos por elemento, en este caso  $n_{n_e} = 2$ .
- $n_n$ : número de nodos totales de la estructura.
- $n_{g_t}$ : número de grados de libertad totales de la estructura  $n_{g_t} = n_n \times n_{g_n}$ .
- $n_{n_b}$ : número de nodos donde el desplazamiento está impuesto, es decir, nodos en los que hay una condición de contorno.
- $n_{n_c}$ : número de nodos cargados, es decir, nodos en los que se aplican fuerzas exteriores.
- $n_{e_c}$ : número de estados de carga.
- $\mathcal{A}^{(e)}$ : matriz de transformación de coordenadas locales a globales.
- $\mathbf{k}^{(e)}$ : matriz de rigidez del elemento  $e$ -ésimo.
- K**: matriz de rigidez de la estructura.

**Funciones.** Las funciones y scripts que constituyen el programa son:

- data.m**: Script para la introducción de los datos del sistema.
- Amatrix.m**: Función que genera la matriz de transformación de coordenadas y que calcula la longitud de las barras en función de las coordenadas locales.
- rigid.m**: Función que proporciona la matriz de rigidez  $\mathbf{k}^{(e)}$  correspondiente a la ecuación (4.76) ó (4.115) en función de que se trabaje en 2 o 3 dimensiones, respectivamente.
- ensam.m**: Función que obtiene la matriz de rigidez global de la estructura **K** a través del ensamblaje de las matrices de rigidez de todos los elementos, y que genera el vector de fuerzas globales **F** a partir de los datos de cargas **P**.
- cbound.m**: Función que modifica tanto la matriz de rigidez de la estructura **K** como el vector de fuerzas globales **F** para que se tengan en cuenta las condiciones de contorno, y que el sistema tenga solución.
- esfuerzos.m**: Función mediante la cual, una vez obtenidos los desplazamientos solución **u**, obtiene las reacciones en los apoyos, las fuerzas que equilibran cada elemento, las fuerzas aplicadas en cada nodo, y las tensiones sobre las barras.
- trigrigid.m**: Función mediante la cual se dibuja tanto la estructura como su deformada numerando barras y nodos según conveniencia.

A continuación, se procede a describir cada una de las funciones.

### 4.2.9.1. Fichero de Datos

La función **data.m** es realmente un script en el que se introducen los datos de la matriz de conectividad  $\mathbf{C}_{on}$ , la matriz con las condiciones de contorno  $\mathbf{C}_{bo}$ , el vector que contiene las áreas y los módulos de elasticidad de cada uno de los materiales ( $\mathbf{A}, \mathbf{E}$ ), el vector que indica el tipo de material que compone cada barra (**prop**), la matriz de cargas nodales ( $\mathbf{P}$ ) cuyas dimensiones son  $(n_{nc}, n_{gn}, n_{ec})$ , y la matriz con las coordenadas nodales ( $\mathbf{x}$ ). Particularizando para el Ejemplo Ilustrativo 4.5, donde hemos considerado que  $A = 1$ ,  $E = 1$ ,  $L = 1$ , queda de la siguiente manera:

```
% Numero de grados de libertad por nodo
ngn = 2;

% Vector que contiene la informacion del tipo de material que constituye
% cada barra
prop = [1 1];

% Modulos de elasticidad asociados a cada tipo de material
E = [1];

% Areas transversales asociados a cada tipo de material
A = [1];

% Condiciones de borde de los elementos
% Numero de nodos de borde
nnb = 2;
Cbo = zeros(nnb,1+2*ngn);
Cbo = [1 1 1 0 0;
       3 1 1 0 0];

% Vector de cargas en los nodos
% Numero de nodos cargados
nnc = 1;
% Numero de estados de carga
nec = 1;
P = zeros(nnc,1+ngn,nec);
P(1,1,1)=2; P(1,2,1)=1; P(1,3,1)=1;

% Matriz de conectividad
Con = [2 1; 2 3];

% Matriz de coordenadas de los nodos
x = [0 0; sqrt(2)/2 sqrt(2)/2; 0 sqrt(2)];
```

**Comentario 4.11** *Nótese que el vector de cargas  $\mathbf{P}$  es una matriz de matrices donde la tercera dimensión se corresponde con el número del estado de cargas.* ■

### 4.2.9.2. Función para Obtener la Matriz de Transformación de Coordenadas Globales a Locales $[\mathcal{A}^{(e)}]$

La función **Amatrix.m** se encarga de calcular la matriz transformación de coordenadas que permitirá calcular la matriz de rigidez del elemento barra en coordenadas globales. Además

calcula la longitud de la barra en función de las coordenadas de los nodos:

```
function [Ae,le] = Amatrix(x)
%
% Funcion que obtiene la matriz de transformacion de coordenadas
% locales a globales de un elemento tipo barra
% trabajando en 1, 2 o 3 dimensiones, y la longitud de la barra
%
% Salida:
%   Ae->Matriz de transformacion
%   le->Longitud de la barra
%
% Recibe como datos:
%   x-> matriz con las coordenadas de los nodos del elemento
%
[nne,ngn] = size(x);

% Calculo de la longitud del elemento y los cosenos directores
le = (x(2,:)-x(1,:));
Ae = zeros(2,2*ngn);
Ae(1,1:ngn) = le;
Ae(2,ngn+1:end) = le;
le = sqrt(le*le');
Ae = Ae/le;
```

#### 4.2.9.3. Función para Obtener la Matriz de Rigidez Elemental $[k^{(e)}]$

La función **rigid.m** se encarga de calcular la matriz de rigidez (nótese que es simétrica) de cada elemento. Recibe como argumentos la matriz de coordenadas de los nodos  $\mathbf{x}$ , el módulo de elasticidad del elemento  $E$  y su área  $A$ :

```
function ke=rigid(x,E,A);
%
% Funcion que obtiene la matriz de rigidez de un elemento tipo barra
% trabajando en 1, 2 o 3 dimensiones
%
% Salida:
%   ke->Matriz de rigidez del elemento tipo barra
%
% Recibe como datos:
%   x-> matriz con las coordenadas de los nodos del elemento
%   A-> área transversal del elemento
%   E-> modulo de elasticidad del elemento
%
if nargin ~= 3,
    error('Numero de argumentos incorrecto, compruebe los datos de entrada');
end
% Numero de nodos por elemento y numero de grados de libertad
% a partir de las dimensiones de matriz de coordenadas X
[nne,ngn] = size(x);
% Obtencion de la matriz de transformacion A
[Ae,le] = Amatrix(x);
% Matriz de rigidez del elemento barra en locales
```

```

ke = E*A*[1 -1; -1 1]/le;
% Matriz de rigidez del elemento barra en globales
ke = Ae'*ke*Ae;

```

#### 4.2.9.4. Función para Ensamblar y Obtener la Matriz de Rigidez Global de la Estructura $[K]$ y el Vector de Cargas Globales $\{F\}$

La función **ensam.m** se encarga de calcular la matriz de rigidez global de la estructura y adicionalmente ensambla las fuerzas en el vector de fuerzas globales  $\{F\}$ :

```

function [K,F]=ensam(P,E,A,prop,Con,x)
%
% Funcion que obtiene la matriz de rigidez de una estructura en celosia
% trabajando en 1, 2 o 3 dimensiones, se ensambla solo la parte superior,
% ya que se sabe que va a ser simetrica
% Ademas ensambla las fuerzas en el vector de fuerzas globales
%
% Salida:
% K->Matriz diagonal superior (o completa)
% F->Vector de fuerzas
%
% Recibe como datos:
% E-> modulos de elasticidad de cada uno de los materiales
% A-> areas transversales de cada uno de los materiales
% prop-> vector que asocia a cada barra su tipo de material
% Con-> matriz de conectividad que indica para cada elemento (barra) que
%       nodos del sistema lo componen
% P-> matriz de con las fuerzas que actuan en cada nodo (globales)
% x-> matriz de coordenadas nodales
%
if nargin ~= 6,
    error('Numero de argumentos incorrecto, compruebe los datos de entrada');
end
% Numero de elementos y del numero de nodos por elemento
% a partir de las dimensiones de matriz de conectividad
[ne,nne] = size(Con);
if ne ~= length(prop),
    error('La matriz Con y el vector prop no concuerdan, comprobar');
end
% Numero de nodos y numero de grados de libertad por nodo
% a partir de las dimensiones de matriz de coordenadas
[nn,ngn] = size(x);
% Numero de grados de libertad totales
ngt = nn*ngn;
% Rutina de ensamblaje de las fuerzas, recorrido de todas las cargas
% con el contador i y ensamblaje en el vector de fuerzas globales
nnc = length(P(:,1));
nec = length(P(1,1,:));
% Inicializacion del vector de fuerzas global como
% un vector de ceros de tipo sparse
F = (zeros(ngt,nec));
for j = 1:nec,
    for i = 1:nnc,

```

```

        F((P(i,1)-1)*ngn+1:P(i,1)*ngn,j)=P(i,2:end,j)';
    end
end
% Inicializacion de la matriz de rigidez global como
% una matriz de ceros de tipo sparse
K = (zeros(ngt));
% Rutina de ensamblaje, recorrido de todos los elementos
% con el contador e y ensamblaje en la matriz de rigidez global
for e = 1:ne,
% Matriz de rigidez de la barra e
ke = rigid(x(Con(e,:),:),E(prop(e)),A(prop(e)));
% Ciclo para recorrer la parte superior de la matriz ke por bloques
for i = 1:nne,
% Indices de fila inicial y final para el bloque iesimo
auxin = (Con(e,i)-1)*ngn+1;
auxif = Con(e,i)*ngn;
for j = i:nne,
% Indices de fila inicial y final para el bloque jesimo
auxjn = (Con(e,j)-1)*ngn+1;
auxjf = Con(e,j)*ngn;
% Para solo construir la parte superior de la matriz
if Con(e,i) <= Con(e,j),
K(auxin:auxif,auxjn:auxjf)=K(auxin:auxif,auxjn:auxjf)+...
ke((i-1)*ngn+1:i*ngn,(j-1)*ngn+1:j*ngn);
else
K(auxjn:auxjf,auxin:auxif)=K(auxjn:auxjf,auxin:auxif)+...
ke((j-1)*ngn+1:j*ngn,(i-1)*ngn+1:i*ngn);
end % End del if
end % End del for j
end % End del for i
end % End del for e
% Matriz de rigidez global considerando la simetria
K = triu(K) + triu(K,1)';

```

#### 4.2.9.5. Función para Aplicar las Condiciones de Contorno

La función **cbound.m** se encarga de modificar la matriz de rigidez  $[K]$  y el vector de fuerzas globales  $\{F\}$  para que se cumplan las condiciones de contorno. Recibe como argumentos la matriz de rigidez global de la estructura  $[K]$ , el vector de cargas globales  $\{F\}$ , y la matriz con la información de las condiciones de contorno:

```

function [K,F] = cbound(K,F,Cbo)
%
% CBOUND modifica K y F para considerar las condiciones de contorno
%
% Salida:
% K->Matriz de rigidez simetrica modificada
% F->Vector de fuerzas globales modificado
%
% Recibe como datos:
% K->Matriz de rigidez simetrica modificada
% F->Vector de fuerzas globales (Cada columna es un estado de carga)

```

```

% Cbo->Matriz con la informacion de las condiciones de contorno
%
if nargin ~= 3,
    error('Numero de argumentos incorrecto, compruebe los datos de entrada');
end
% Numero de nodos con condicion de contorno y numero de grados
% de libertad por nodos a partir de la matriz de condiciones
% de contorno
nnc = length(Cbo(:,1));
ngn = (length(Cbo(1,:))-1)/2;
% Numero de estados de carga
nec = length(F(1,:));
% Ciclo sobre los nodos con condiciones de contorno
for i = 1:nnc,
% Numero de nodo cargado
    nn=Cbo(i,1);
% Ciclo para cada grado de libertad
    for j = 1:ngn,
% Comprobación de si el grado de libertad esta impedido o no
        if Cbo(i,1+j) == 1,
% Posicion del grado de libertad en la matriz de rigidez global
            aux=(nn-1)*ngn+j;
            for k = 1:nec,
                F(:,k)=F(:,k)-K(:,aux)*Cbo(i,1+ngn+j);
                F(aux,k)=Cbo(i,1+ngn+j);
            end
            K(aux,:)=0;
            K(:,aux)=0;
            K(aux,aux)=1;
        end
    end
end
end
end

```

#### 4.2.9.6. Función para Obtener las Fuerzas Nodales y las Reacciones en los Apoyos

Función mediante la cual, una vez obtenidos los desplazamientos, tras la resolución del sistema (4.95), se obtienen las fuerzas que equilibran cada elemento, y las fuerzas aplicadas en cada nodo incluidas las reacciones en los apoyos, y tanto las tensiones como los esfuerzos axiales a los que están sometidos cada una de las barras:

```

function [forcen,forcel,Ne,sigmae]=esfuerzos(u,x,prop,E,A,Con)
%
% ESFUERZOS es la rutina encargada del calculo de los resultados
% una vez obtenidos los desplazamientos solucion de la estructura
%
% Salida:
% forcel->Matriz con las fuerzas que equilibran cada elemento
% forcen->Fuerzas en los nodos
% Ne->Esfuerzos axiales en las barras
% sigmae->Tensiones en las barras
%
% Recibe como datos:

```

```

% u->desplazamientos solucion del problema
% E-> modulos de elasticidad de cada uno de los materiales
% A-> areas transversales de cada uno de los materiales
% prop-> vector que asocia a cada barra su tipo de material
% Con-> matriz de conectividad que indica para cada elemento (barra) que
%       nodos del sistema lo componen
% x-> matriz de coordenadas nodales
%
if nargin ~=6,
    error('Numero de argumentos incorrecto, compruebe los datos de entrada');
end
% Numero de elementos y del numero de nodos por elemento
% a partir de las dimensiones de matriz de conectividad
[ne,nne] = size(Con);
if ne ~= length(prop),
    error('La matriz Con y el vector prop no concuerdan, comprobar');
end
% Numero de nodos y numero de grados de libertad por nodo
% a partir de las dimensiones de matriz de coordenadas
[nn,ngn] = size(x);
% Numero de grados de libertad totales
ngt = nn*ngn;
% Numero de estados de carga
nec = length(u(1,:));
% Inicializacion de las matrices y vectores necesarios
% Desplazamientos de los nodos de un elemento
ue = zeros(nne*ngn,nec);
% Fuerzas a las que esta sometido cada una de los muelles
forcel = zeros(ne,nne*ngn,nec);
% Fuerzas en los nodos incluidas las reacciones en los apoyos
forcen = zeros(nn,ngn,nec);
% Tensiones en cada barra
Ne = zeros(ne,nec);
sigmae = zeros(ne,nec);

for e = 1:ne,
% Matriz de rigidez de la barra e
ke = rigid(x(Con(e,:),:),E(prop(e)),A(prop(e)));
% Obtencion de la matriz de transformacion A
[Ae,le] = Amatrix(x(Con(e,:),:));
Lm = [-Ae(1,1:ngn) Ae(1,1:ngn)];
for i = 1:nec,
% Obtencion de los desplazamientos asociados al elemento e
for j = 1:nne,
    ue((j-1)*ngn+1:j*ngn,i)=u((Con(e,j)-1)*ngn+1:Con(e,j)*ngn,i);
end
% Calculo de las tensiones y esfuerzos axiles
sigmae(e,i) = E(prop(e))*Lm*ue(:,i)/le;
Ne(e,i) = sigmae(e,i)*A(prop(e));
% Fuerzas en los nodos para cada elemento y el acumulado en los nodos
forcel(e,:,i) = (ke*ue(:,i))';
for j = 1:nne,
    forcen(Con(e,j),:,i)=forcen(Con(e,j),:,i)+...
        forcel(e,(j-1)*ngn+1:j*ngn,i);
end
end

```

```
end
end
```

#### 4.2.9.7. Script de Ejecución

Para permitir la ejecución y el cálculo de la matriz de rigidez de un caso concreto se emplea un script **ejecucion.m** que gestiona la ejecución. Considerando los datos del Ejemplo Ilustrativo 4.5 y teniendo en cuenta el organigrama de la Figura 4.27 se procede de la siguiente manera:

1. Se borran de la memoria las variables existentes y se cargan los datos llamando al fichero **data.m**:

```
clear; clc;
% Cargo los datos del problema en memoria
data;
```

2. Dibujo de la estructura numerando tanto los nodos como las barras. Para ello se dispone de una rutina llamada **tri\_grid.m**.

```
figure(1)
[delta,margen] = tri_grid(Con,x);
hold off
```

3. Ensamblaje de la matriz de rigidez y obtención del vector de fuerzas globales. Además se dibuja la estructura de la matriz de rigidez:

```
% Llamada a la rutina de ensamblaje y obtención de la matriz de
% rigidez del sistema de muelles
%[K,F] = ensam(P,E,A,prop,Con,x)
disp('La matriz de rigidez es:')
K
disp('El vector de fuerzas globales es:')
F
figure(2)
spy(K)
```

El resultado mostrado en pantalla es:

La matriz de rigidez es:

K =

```
    0.5000    0.5000   -0.5000   -0.5000         0         0
    0.5000    0.5000   -0.5000   -0.5000         0         0
   -0.5000   -0.5000    1.0000         0   -0.5000    0.5000
   -0.5000   -0.5000         0    1.0000    0.5000   -0.5000
         0         0   -0.5000    0.5000    0.5000   -0.5000
         0         0    0.5000   -0.5000   -0.5000    0.5000
```

El vector de fuerzas globales es:

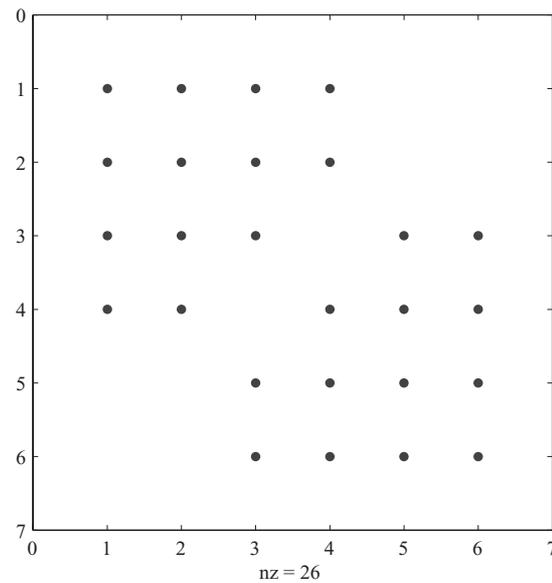


Figura 4.28: Estructura de la matriz de rigidez  $[K]$  de la estructura del Ejemplo Ilustrativo 4.5.

```
F =
    0
    0
    1
    1
    0
    0
```

En la Figura 4.28 se muestra la estructura de la matriz de rigidez y el número de elementos distintos de cero.

Tal y como se explicó en la Sección 4.2.7 el determinante de la matriz de rigidez es nulo, y su rango es 2 en este caso:

```
>> rank(K)

ans =

    2
```

- El siguiente paso para evitar la singularidad de la matriz de rigidez es introducir las condiciones de contorno. En principio es necesario introducir 4 condiciones de contorno para que el sistema tenga solución única:

```
% Introduccion de las condiciones de contorno
[K,F] = cbound(K,F,Cbo);
```

```

disp('La matriz de rigidez, tras
introducir las c. de contorno, es:')

K disp('El vector de fuerzas globales, tras introducir las c. de
contorno, es:')

F

```

El resultado mostrado en pantalla es:

```

La matriz de rigidez, tras introducir las c. de contorno, es:

K =

    1.0000         0         0         0         0         0
         0    1.0000         0         0         0         0
         0         0    1.0000         0         0         0
         0         0         0    1.0000         0         0
         0         0         0         0    1.0000         0
         0         0         0         0         0    1.0000

El vector de fuerzas globales, tras introducir las c. de contorno, es:

F =

    0
    0
    1
    1
    0
    0

```

5. Una vez introducidas las condiciones de contorno se está en disposición de resolver el sistema de ecuaciones por cualquiera de los métodos estudiados en la Sección 2.2. En este caso el algoritmo empleado es la descomposición LU:

```

% Resolucion del sistema de ecuaciones
[L,U] = lu(K);
u = L\F;
u = U\u;
disp('Los desplazamientos solucion son:')
u

```

El resultado mostrado en pantalla es:

```

Los desplazamientos solucion son:

u =

    0
    0
    1.0000
    1.0000

```

```
0
0
```

resultado que coincide con el resultado (4.84) del Ejemplo Ilustrativo 4.5.

6. Por último, una vez obtenidos los desplazamientos solución se procede al cálculo de esfuerzos:

```
% Obtencion de las reacciones en los apoyos
[forcen,forcel,Ne,sigmae] = esfuerzos(u,x,prop,E,A,Con);
disp('Las fuerzas que actuan en cada barra son:')
forcel
disp('Las fuerzas que actuan en cada nodo son:')
forcen
disp('Las esfuerzos axiles en las barras son:')
Ne
disp('Las tensiones en las barras son:')
sigmae
```

El resultado mostrado en pantalla es:

Las fuerzas que actuan en cada barra son:

forcel =

```
1    1   -1   -1
0    0    0    0
```

Las fuerzas que actuan en cada nodo incluidas reacciones en los apoyos son:

forcen =

```
-1   -1
1    1
0    0
```

Las esfuerzos axiles en las barras son:

Ne =

```
1.4142
0
```

Las tensiones en las barras son:

sigmae =

```
1.4142
0
```

resultado que coincide con el resultado del Ejemplo Ilustrativo 4.5. Nótese que en las fuerzas que actúan sobre cada elemento las componentes son iguales y de signo contrario para asegurar el equilibrio. Respecto a las fuerzas en los nodos correspondientes a los desplazamientos impuestos éstas son las fuerzas ejercidas por el contorno para evitar el desplazamiento de la estructura como sólido rígido, es decir, las *reacciones* en los apoyos.

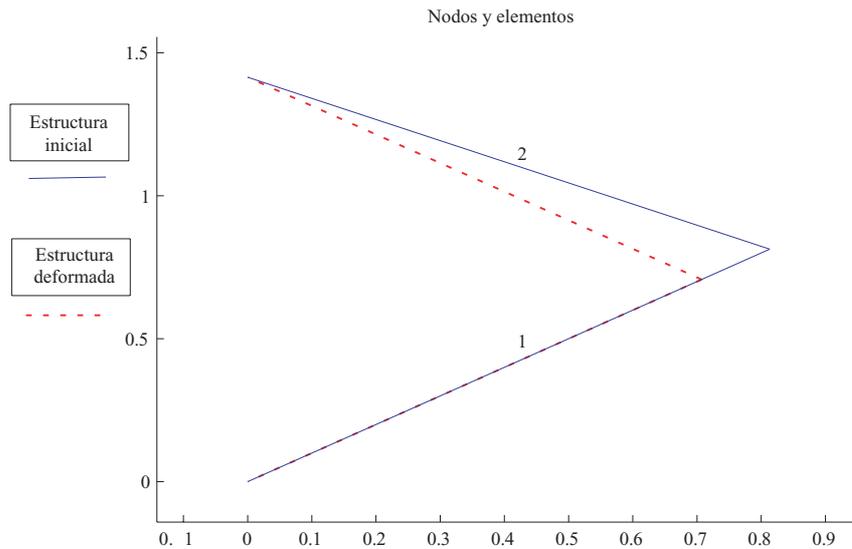


Figura 4.29: Deformada de la estructura del Ejemplo Ilustrativo 4.5.

7. Por último se procede al pintado de la deformada final mediante la rutina `tri_grid.m`:

```
% Dibujo de la estructura deformada
% Nuevas coordenadas
[nn,ngn] = size(x);
umax = max(abs(u));
nec = length(u(1,:));
xnew = zeros(nn,ngn,nec);
figure(3)
tri_grid(Con,x,'r',0,0,0);
hold on
if umax~=0,
    for j = 1:nec,
        for i = 1:nn,
            xnew(i,:,j) = x(i,:)...
                +0.75*margen*delta*u((i-1)*ngn+1:i*ngn,j)'/umax(j);
        end
        tri_grid(Con,xnew(:, :, j),'b',0,1,0);
    end
end
hold off
```

**Ejemplo ilustrativo 4.9 (Consideración del peso propio).** Una consideración importante a la hora de resolver celosías considerando como elementos toda la longitud de la barra es que la introducción del peso propio hace que la resolución sea aproximada. Nótese que la introducción del peso propio en una estructura es una fuerza externa  $\{\mathbf{f}_b^{(e)}\}$  provocada por una fuerza másica  $\{\mathbf{b}\}$  (gravitacional), cuyo vector de fuerzas equivalentes dado por el MEF se calcula mediante

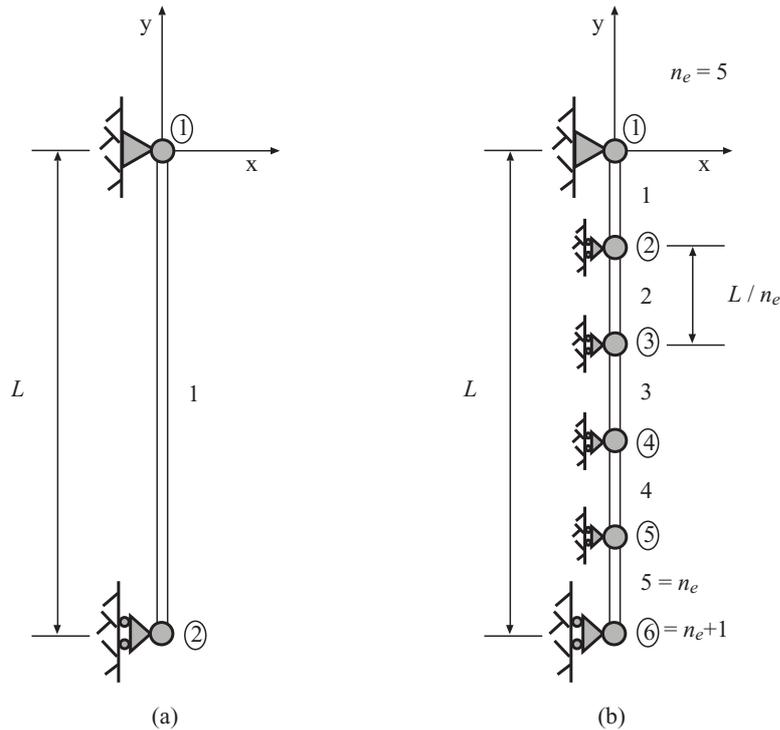


Figura 4.30: Celosía plana del Ejemplo Computacional 4.2.

la siguiente expresión:

$$\left\{ \mathbf{f}_b^{(e)} \right\} = \frac{AL}{2} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix}. \quad (4.119)$$

Las fuerzas másicas debido al campo gravitacional, en el caso bidimensional, vienen dadas por:

$$\{\mathbf{b}\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix}, \quad (4.120)$$

donde  $g = 9,81m/s^2$  es la aceleración de la gravedad.

**Comentario 4.12** La deducción de la expresión (4.119) se mostrará en la Sección 5.1.2 en la que se deducirá la fuerza másica equivalente en elementos triangulares (CST). ■

Supóngase una barra como la mostrada en la Figura 4.30 (a) que está sometida sólo a la acción del peso propio. Las características de la misma son las siguientes:  $A = 1$ ,  $L = 1$ ,  $p_x = 0$  y  $p_y = -1$ . Se pide:

1. Considerando el vector de fuerzas (4.119), obtener la tensión en la barra y las fuerzas que la equilibran. ¿Es correcto emplear como reacción en el nodo 1 las fuerzas que actúan en el nodo 1 de la barra? En caso de que no lo sea, ¿cómo lo solucionarías?

Tabla 4.4: Coordenadas globales de los nodos del Ejemplo Computacional 4.2.

Nodos	$X_i$ (cm)	$Y_i$ (cm)
1	0	0
2	100	0
3	50	50
4	200	100

Tabla 4.5: Características de las barras del Ejemplo Computacional 4.2.

Elemento	Área Sección transversal (cm <sup>2</sup> )	Conectividades		$E(N/cm^2)$
		Local $i$	Local $j$	
1	2	1	3	$2 \times 10^3$
2	2	3	2	$2 \times 10^3$
3	2	3	4	$2 \times 10^3$
4	2	2	4	$2 \times 10^3$

- Calcular la tensión en el elemento y explicar si el resultado se ajusta a la realidad y por qué.
- Supóngase que se discretiza la barra en más elementos tipo barra, tal y cómo se indica en la Figura 4.30 (b). Si el número de elementos es igual a 10 ( $n_e = 10$ ), recalculer e interpretar los resultados.

■

**Ejemplo computacional 4.2 (Ensamblaje de una celosía en 2 dimensiones).** Considérese la celosía plana mostrada en la Figura 4.31, cuyas características de materiales empleados, información de las conectividades de los elementos, así como los datos de su geometría se muestran en las Tablas 4.5 y 4.4, respectivamente. Se pide:

- Generar el fichero de datos correspondiente.
- Obtener los desplazamientos de los nodos y las reacciones en los apoyos mediante el programa, y comprobar que la matriz de rigidez obtenida sin considerar las condiciones de contorno es singular. ¿Cual es el rango de la matriz? ¿Qué implicaciones tiene?

**Solución:** La solución tras la ejecución del programa de MATLAB es:

La matriz de rigidez es:

K =

```

28.2843  28.2843      0      0 -28.2843 -28.2843      0      0
28.2843  28.2843      0      0 -28.2843 -28.2843      0      0
      0      0 42.4264 -14.1421 -28.2843  28.2843 -14.1421 -14.1421
      0      0 -14.1421 42.4264  28.2843 -28.2843 -14.1421 -14.1421
-28.2843 -28.2843 -28.2843  28.2843  79.3369   7.5895 -22.7684  -7.5895
-28.2843 -28.2843  28.2843 -28.2843   7.5895  59.0984  -7.5895  -2.5298
      0      0 -14.1421 -14.1421 -22.7684  -7.5895  36.9105  21.7316
      0      0 -14.1421 -14.1421  -7.5895  -2.5298  21.7316  16.6720

```

El vector de fuerzas globales es:

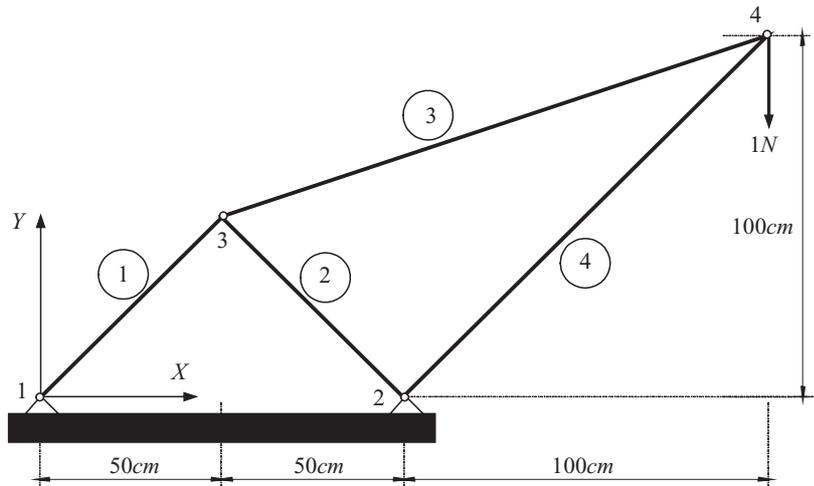


Figura 4.31: Celosía plana del Ejemplo Computacional 4.2.

F =

```

0
0
0
0
0
0
0
0
-1

```

La matriz de rigidez, tras introducir las c. de contorno, es:

K =

1.0000	0	0	0	0	0	0	0
0	1.0000	0	0	0	0	0	0
0	0	1.0000	0	0	0	0	0
0	0	0	1.0000	0	0	0	0
0	0	0	0	79.3369	7.5895	-22.7684	-7.5895
0	0	0	0	7.5895	59.0984	-7.5895	-2.5298
0	0	0	0	-22.7684	-7.5895	36.9105	21.7316
0	0	0	0	-7.5895	-2.5298	21.7316	16.6720

El vector de fuerzas globales, tras introducir las c. de contorno, es:

F =

```

0
0
0
0
0

```

```
0
0
-1
```

Los desplazamientos solución son:

u =

```
0
0
0
0
0.0265
0.0088
0.1960
-0.3021
```

Las fuerzas que actúan en cada barra son:

forcel =

```
-1.0000  -1.0000   1.0000   1.0000
 0.5000  -0.5000  -0.5000   0.5000
-1.5000  -0.5000   1.5000   0.5000
 1.5000   1.5000  -1.5000  -1.5000
```

Las fuerzas que actúan en cada nodo incluidas reacciones en los apoyos son:

forcen =

```
-1.0000  -1.0000
 1.0000   2.0000
 0.0000    0
-0.0000  -1.0000
```

Las esfuerzos axiales en las barras son:

Ne =

```
1.4142
-0.7071
 1.5811
-2.1213
```

Las tensiones en las barras son:

sigmae =

```
0.7071
-0.3536
 0.7906
-1.0607
```

**Comentario 4.13** *En el caso de que se deseen almacenar los resultados en ficheros ASCII para*

su utilización en algún otro programa de post-proceso basta con añadir los siguientes comandos:

```
save u.out u -ascii

% Guardo los valores de la sesion en el disco duro
save execution.mat
```

**Ejemplo computacional 4.3 (Torre de alta tensión).** Considérese la torre de alta tensión mostrada en la Figura 4.32, ver [Groenwold and Stander, 1997]. Dicha torre está compuesta por barras de sección constante con un módulo de elasticidad y un peso específico del material de  $E = 2,047 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\rho = 0,00785 \text{ kg/cm}^3$ , respectivamente. La información de la conectividad de las barras se encuentra en la Tabla 4.6, mientras que las coordenadas de los nodos se muestran en la Tabla 4.7. Por limitaciones de fabricación, las áreas ( $\text{cm}^2$ ) de las distintas barras disponibles en el mercado son las siguientes:

$$A = [19,03; 5,27; 19,03; 5,27; 19,03; 5,75; 17,03; 6,25; 13,79; 6,25; 5,75; 12,21; 6,84; 5,75; 2,66; 7,44; 1,84; 8,66; 2,66; 3,07; 2,66; 8,06; 5,27; 7,44; 6,25; 1,84; 4,79; 2,66; 3,47; 1,84; 2,26; 3,88; 1,84; 1,84; 3,88; 1,84; 1,84; 3,88].$$

En la Tabla 4.6 también se encuentra disponible la información del área de cada una de las barras que componen la torre. Teniendo en cuenta que la estructura se va emplear para la construcción de una línea de alta tensión, que hay que considerar cada uno de los estados de carga indicados en la Tabla 4.8 bajo las hipótesis:

- Sin considerar el peso propio de la estructura.
- Considerando el peso propio de la estructura.

Se pide:

1. Obtener el desplazamiento del nodo cumbre (nodo 52) en todos los casos.
2. Calcular la máxima tensión tanto de tracción como de compresión que se producen, indicando la barra en la que ocurre (también para todos los casos).
3. ¿En alguno de los casos, la tensión máxima es mayor que la admisible  $\sigma_{adm} = 1500 \text{ kg/cm}^2$ ?
4. Comparar los resultados obtenidos considerando el peso propio y sin considerarlo. ¿Es razonable despreciarlo?

**Solución:**

Los desplazamientos del nodo 52 en  $\text{cm}$  bajo las distintas hipótesis de carga sin considerar el peso propio son:

$i$	$u_i$	$v_i$	$w_i$
1	-5,6088	-0,0109	-0,0315
2	-4,5471	3,4805	-0,0287
3	-5,5843	-0,0109	-0,0315
4	-5,0199	1,5513	-0,0327
5	-5,3715	0,8539	-0,0300
6	-5,0362	-1,6229	-0,0283
7	-5,3715	0,8842	-0,0300
8	-4,3981	4,0835	-0,0287

(4.121)

mientras que los desplazamientos considerando el peso propio son:

$i$	$u_i$	$v_i$	$w_i$
1	-5,6176	-0,0111	-0,0385
2	-4,5559	3,4803	-0,0357
3	-5,5931	-0,0111	-0,0385
4	-5,0286	1,5511	-0,0397
5	-5,3803	0,8537	-0,0369
6	-5,0450	-1,6231	-0,0353
7	-5,3803	0,8839	-0,0369
8	-4,4069	4,0832	-0,0357

(4.122)

La máxima tensión admisible en  $kg/cm^2$  bajo las distintas hipótesis de carga sin considerar el peso propio son:

$e$	$\sigma_{\max}$	$e$	$\sigma_{\min}$
3	590,6568	85	-696,5611
86	829,8399	88	-1027,0895
3	574,8133	85	-711,0178
2	713,9585	88	-813,6141
2	685,6289	85	-757,6254
3	721,7503	85	-818,7954
2	690,9702	85	-759,1735
86	911,1928	88	-1108,5076

(4.123)

donde  $e$  es el número del elemento,  $\sigma_{\max}$  es la máxima tensión de tracción, y  $\sigma_{\min}$  es la máxima tensión de compresión (negativa). En el caso de considerar el peso propio:

$e$	$\sigma_{\max}$	$e$	$\sigma_{\min}$
3	574,4639	85	-708,0882
86	822,6282	88	-1038,6123
3	558,6204	85	-722,5448
2	697,7644	88	-825,1368
2	669,4348	85	-769,1524
3	705,5574	85	-830,3225
2	674,7761	4	-771,7246
86	903,9811	88	-1120,0303

(4.124)

Nótese que en ninguno de los casos se alcanza la máxima tensión admisible, ya que la máxima tensión de tracción se da en el elemento 86 sin considerar el peso propio  $911,1928 (kg/cm^2) < 1500 (kg/cm^2)$ , mientras que la máxima compresión se da en la barra 88 considerando el peso propio  $|-1120,0303 (kg/cm^2)| < 1500 (kg/cm^2)$ . Por tanto, en principio, la estructura está bien diseñada.

**Comentario 4.14** *En estructuras articuladas el fallo a compresión se produce antes de llegar a la tensión máxima admisible del material debido a fenómenos de inestabilidad por pandeo. Por tanto, para que la estructura estuviera realmente bien diseñada debería de comprobarse.* ■

Si comparamos la solución en desplazamientos sin (4.121) y con (4.122) el peso propio se puede observar lo siguiente: (a) los desplazamientos horizontales no varían considerablemente ni en términos absolutos (diferencias de décimas de milímetro) ni en términos relativos (variaciones

porcentuales menores del 1%), mientras que (b) los desplazamientos verticales cambian poco en términos absolutos (diferencias de décimas de milímetro), pero mucho en términos relativos (aumentan del orden de un 20%).

En lo relativo a tensiones el efecto es más importante, así las variaciones porcentuales máximas en cada una de las hipótesis de carga son de:

$$\begin{pmatrix} \Delta \% \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28,25 & 1579,81 & 86,97 & 11,42 & 72,1 & 19,83 & 85,42 & 5699,26 \\ 111 & 63 & 111 & 142 & 79 & 113 & 79 & 132 \end{pmatrix}.$$

Nótese que los incrementos porcentuales más grandes son debidos a estados de carga que apenas producían tensiones en las barras. En lo que se refiere a variaciones absolutas las barras más afectadas son las cercanas a la base porque han de soportar todo el peso de la estructura, por ejemplo, en la barra 4 el aumento tensional es  $\approx 16,95 \text{ kg/cm}^2$ .

Así pues se puede concluir que es importante la consideración del peso propio en lo referido a tensiones, especialmente cuando el peso de la estructura total es grande, en este caso es de  $1359,772 \text{ kg}$ . Es importante recalcar que debido a que la fuerza gravitacional actúa en el eje  $z$  y en sentido descendente las barras traccionadas están menos traccionadas pero las barras comprimidas están más comprimidas y no considerar el peso en el cálculo puede producir que alguna de ellas plastifique o pandee.

■

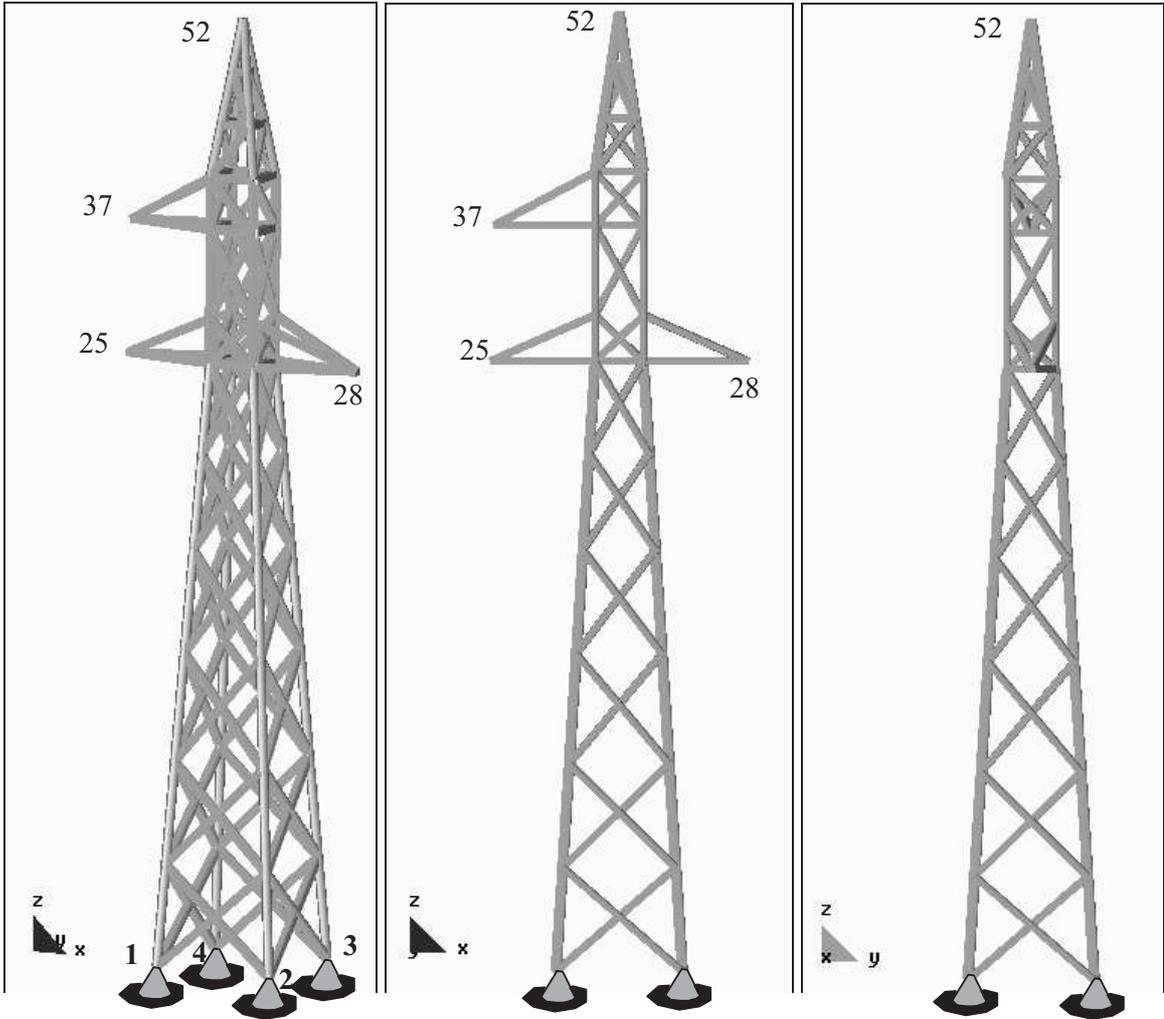


Figura 4.32: Torre de alta tensión compuesta por 160 barras.

$e$	Nodos			$A_e$	$e$	Nodos			$A_e$	$e$	Nodos			$A_e$	$e$	Nodos			$A_e$
	$i$	$j$				$i$	$j$				$i$	$j$				$i$	$j$		
1	1	5	1	41	13	18	8	81	25	31	17	121	36	40	29				
2	2	6	1	42	14	17	8	82	28	32	17	122	38	41	29				
3	3	7	1	43	14	19	8	83	28	33	17	123	39	42	29				
4	4	8	1	44	15	18	8	84	25	34	17	124	35	43	29				
5	1	6	2	45	15	20	8	85	26	31	18	125	40	41	30				
6	2	5	2	46	16	19	8	86	27	32	18	126	41	42	30				
7	2	7	2	47	16	17	8	87	29	33	18	127	42	43	30				
8	3	6	2	48	13	20	8	88	30	34	18	128	43	40	30				
9	3	8	2	49	17	21	9	89	26	32	19	129	35	36	31				
10	4	7	2	50	18	22	9	90	27	31	19	130	36	38	31				
11	4	5	2	51	19	23	9	91	29	34	19	131	38	39	31				
12	1	8	2	52	20	24	9	92	30	33	19	132	39	35	31				
13	5	9	3	53	17	22	10	93	27	33	20	133	40	44	32				
14	6	10	3	54	18	21	10	94	29	32	20	134	41	45	32				
15	7	11	3	55	19	24	10	95	30	31	20	135	42	46	32				
16	8	12	3	56	20	23	10	96	26	34	20	136	43	47	32				
17	5	10	4	57	18	23	11	97	26	29	21	137	40	45	33				
18	6	9	4	58	19	22	11	98	27	30	21	138	41	46	33				
19	6	11	4	59	20	21	11	99	31	35	22	139	42	47	33				
20	7	10	4	60	17	24	11	100	32	36	22	140	43	44	33				
21	7	12	4	61	21	26	12	101	33	38	22	141	44	45	34				
22	8	11	4	62	22	27	12	102	34	39	22	142	45	46	34				
23	8	9	4	63	23	29	12	103	33	39	23	143	46	47	34				
24	5	12	4	64	24	30	12	104	32	35	23	144	44	47	34				
25	9	13	5	65	21	27	13	105	31	36	23	145	44	48	35				
26	10	14	5	66	22	26	13	106	34	38	23	146	45	49	35				
27	11	15	5	67	23	30	13	107	32	38	24	147	46	50	35				
28	12	16	5	68	24	29	13	108	33	36	24	148	47	51	35				
29	9	14	6	69	22	29	14	109	34	35	24	149	45	48	36				
30	10	13	6	70	23	27	14	110	31	39	24	150	46	49	36				
31	10	15	6	71	24	26	14	111	37	35	25	151	47	50	36				
32	11	14	6	72	21	30	14	112	37	39	25	152	44	51	36				
33	11	16	6	73	26	27	15	113	37	40	26	153	48	49	37				
34	12	15	6	74	27	29	15	114	37	43	26	154	49	50	37				
35	12	13	6	75	29	30	15	115	35	40	27	155	50	51	37				
36	9	16	6	76	30	26	15	116	36	41	27	156	48	51	37				
37	13	17	7	77	25	26	16	117	38	42	27	157	48	52	38				
38	14	18	7	78	27	28	16	118	39	43	27	158	49	52	38				
39	15	19	7	79	25	30	16	119	35	38	28	159	50	52	38				
40	16	20	7	80	29	28	16	120	36	39	28	160	51	52	38				

Tabla 4.6: Datos de conectividades y áreas para los elementos de la torre de alta tensión con 160 barras.

$i$	Coordenadas			$i$	Coordenadas		
	$x_i$	$y_i$	$z_i$		$x_i$	$y_i$	$z_i$
1	-105.000	-105.000	0.000	27	40.000	-40.000	1027.500
2	105.000	-105.000	0.000	28	214.000	0.000	1027.500
3	105.000	105.000	0.000	29	40.000	40.000	1027.500
4	-105.000	105.000	0.000	30	-40.000	40.000	1027.500
5	-93.929	-93.929	175.000	31	-40.000	-40.000	1105.500
6	93.929	-93.929	175.000	32	40.000	-40.000	1105.500
7	93.929	93.929	175.000	33	40.000	40.000	1105.500
8	-93.929	93.929	175.000	34	-40.000	40.000	1105.500
9	-82.859	-82.859	350.000	35	-40.000	-40.000	1256.500
10	82.859	-82.859	350.000	36	40.000	-40.000	1256.500
11	82.859	82.859	350.000	37	-207.000	0.000	1256.500
12	-82.859	82.859	350.000	38	40.000	40.000	1256.500
13	-71.156	-71.156	535.000	39	-40.000	40.000	1256.500
14	71.156	-71.156	535.000	40	-40.000	-40.000	1346.500
15	71.156	71.156	535.000	41	40.000	-40.000	1346.500
16	-71.156	71.156	535.000	42	40.000	40.000	1346.500
17	-60.085	-60.085	710.000	43	-40.000	40.000	1346.500
18	60.085	-60.085	710.000	44	-26.592	-26.592	1436.500
19	60.085	60.085	710.000	45	26.592	-26.592	1436.500
20	-60.085	60.085	710.000	46	26.592	26.592	1436.500
21	-49.805	-49.805	872.000	47	-26.592	26.592	1436.500
22	49.805	-49.805	872.000	48	-12.737	-12.737	1526.500
23	49.805	49.805	872.000	49	12.737	-12.737	1526.500
24	-49.805	49.805	872.000	50	12.737	12.737	1526.500
25	-214.000	0.000	1027.500	51	-12.737	12.737	1526.500
26	-40.000	-40.000	1027.500	52	0.000	0.000	1615.000

Tabla 4.7: Coordenadas de los nodos de la torre de alta tensión con 160 barras.

E. carga	nº nodo	$P_x$	$P_y$	$P_z$
1	52	-868.0	0.0	-491.0
	37	-996.0	0.0	-546.0
	25	-1091.0	0.0	-546.0
	28	-1091.0	0.0	-546.0
2	52	-493.0	1245.0	-363.0
	37	-996.0	0.0	-546.0
	25	-1091.0	0.0	-546.0
	28	-1091.0	0.0	-546.0
3	52	-917.0	0.0	-491.0
	37	-951.0	0.0	-546.0
	25	-1015.0	0.0	-546.0
	28	-1015.0	0.0	-546.0
4	52	-917.0	0.0	-546.0
	37	-572.0	1259.0	-428.0
	25	-1015.0	0.0	-546.0
	28	-1015.0	0.0	-546.0
5	52	-917.0	0.0	-491.0
	37	-951.0	0.0	-546.0
	25	-1015.0	0.0	-546.0
	28	-636.0	1259.0	-428.0
6	52	-917.0	0.0	-491.0
	37	-572.0	-1303.0	-428.0
	25	-1015.0	0.0	-546.0
	28	-1015.0	0.0	-546.0
7	52	-917.0	0.0	-491.0
	37	-951.0	0.0	-546.0
	25	-1015.0	0.0	-546.0
	28	-636.0	1303.0	-428.0
8	52	-498.0	1460.0	-363.0
	37	-951.0	0.0	-546.0
	25	-1015.0	0.0	-546.0
	28	-1015.0	0.0	-546.0

Tabla 4.8: Estados de carga de la torre de alta tensión con 160 barras.

### 4.3. Procedimiento Genérico de Ensamblaje

En las Secciones 4.1.3 y 4.2.6 se estudió de forma concisa el procedimiento de ensamblaje para problemas unidimensionales y bidimensionales con 1 y 2 grados de libertad por nodo, respectivamente, y donde además los elementos estaban constituidos por dos nodos.

A continuación se generaliza el concepto de ensamblaje para problemas con un número  $n_{gn}$  de grados de libertad por nodo, con elementos constituidos por  $n_{ne}$  número de nodos por elemento y donde la estructura del problema consta de  $n_n$  número de nodos totales. Las cargas externas se considerarán aplicadas directamente en los nodos y con  $n_{gn}$  componentes.

La matriz de conectividad necesaria para el ensamblaje de la matriz de rigidez global y del vector de fuerzas globales tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{C}_{on} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n_{ne}} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n_{ne}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n_e,1} & c_{n_e,2} & \cdots & c_{n_e,n_{ne}} \end{bmatrix}, \quad (4.125)$$

cuyas dimensiones son  $n_e \times n_{ne}$  de forma que el elemento  $c_{e,j}$  es el número de nodo en la numeración global que se corresponde con el nodo  $j$ -ésimo del elemento  $e$ -ésimo.

La matriz de rigidez de un elemento genérico cualquiera tiene la siguiente estructura:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & c_{e,1} & & \cdots & & c_{e,n_{ne}} & \\ \hline k_{11}^{(e,1,1)} & \cdots & k_{1,n_{gn}}^{(e,1,1)} & \cdots & k_{11}^{(e,1,n_{ne})} & \cdots & k_{1,n_{gn}}^{(e,1,n_{ne})} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline k_{n_{gn},1}^{(e,1,1)} & \cdots & k_{n_{gn},n_{gn}}^{(e,1,1)} & \cdots & k_{n_{gn},1}^{(e,1,n_{ne})} & \cdots & k_{n_{gn},n_{gn}}^{(e,1,n_{ne})} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline k_{11}^{(e,n_{ne},1)} & \cdots & k_{1,n_{gn}}^{(e,n_{ne},1)} & \cdots & k_{11}^{(e,n_{ne},n_{ne})} & \cdots & k_{1,n_{gn}}^{(e,n_{ne},n_{ne})} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline k_{n_{gn},1}^{(e,n_{ne},1)} & \cdots & k_{n_{gn},n_{gn}}^{(e,n_{ne},1)} & \cdots & k_{n_{gn},1}^{(e,n_{ne},n_{ne})} & \cdots & k_{n_{gn},n_{gn}}^{(e,n_{ne},n_{ne})} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline c_{e,1} \\ \hline \vdots \\ \hline c_{e,n_{ne}} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (4.126)$$

donde cada uno de los bloques está asociado a cada nodo del elemento, y por tanto el número de bloques es  $n_{ne} \times n_{ne}$ , mientras que cada bloque consta de  $n_{gn} \times n_{gn}$  componentes. Nótese que para un elemento cualquiera de la matriz de rigidez  $k_{ij}^{(e,k,l)}$  el índice  $e$  corresponde al número de elemento de la discretización,  $k$  y  $l$  hacen referencia a los nodos  $k, l$ -ésimo, respectivamente, y por último, los índices  $i$  y  $j$  hacen referencia a las componentes  $i, j$ -ésima de cada bloque, es decir, al elemento  $(i, j)$  del bloque  $(k, l)$ .

Análogamente, el vector de desplazamientos y el vector de fuerzas nodales tienen la siguiente

estructura:

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = \left\{ \begin{array}{c} u_1^{(e,1)} \\ \vdots \\ u_{n_{gn}}^{(e,1)} \\ \vdots \\ u_1^{(e,n_{ne})} \\ \vdots \\ u_{n_{gn}}^{(e,n_{ne})} \end{array} \right\} \begin{array}{c} c_{e,1} \\ \vdots \\ c_{e,n_{ne}} \end{array} \quad \text{y} \quad \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \left\{ \begin{array}{c} f_1^{(e,1)} \\ \vdots \\ f_{n_{gn}}^{(e,1)} \\ \vdots \\ f_1^{(e,n_{ne})} \\ \vdots \\ f_{n_{gn}}^{(e,n_{ne})} \end{array} \right\} \begin{array}{c} c_{e,1} \\ \vdots \\ c_{e,n_{ne}} \end{array} \quad (4.127)$$

donde los elementos  $u_i^{(e,j)}$  y  $f_i^{(e,j)}$  son los desplazamientos y las fuerzas que actúan en el elemento  $e$ -ésimo, respectivamente, asociados al grado de libertad  $i$ -ésimo, en el nodo  $j$ -ésimo del elemento.

La matriz de rigidez global de la estructura tiene la siguiente estructura:

$$[\mathbf{K}] = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c|c} \hline & 1 & \dots & & n_n \\ \hline k_{11}^{(1,1)} & \dots & k_{1,n_{gn}}^{(1,1)} & \dots & k_{11}^{(1,n_n)} & \dots & k_{1,n_{gn}}^{(1,n_n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_{gn},1}^{(1,1)} & \dots & k_{n_{gn},n_{gn}}^{(1,1)} & \dots & k_{n_{gn},1}^{(1,n_n)} & \dots & k_{n_{gn},n_{gn}}^{(1,n_n)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline k_{11}^{(n_n,1)} & \dots & k_{1,n_{gn}}^{(n_n,1)} & \dots & k_{11}^{(n_n,n_n)} & \dots & k_{1,n_{gn}}^{(n_n,n_n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_{gn},1}^{(n_n,1)} & \dots & k_{n_{gn},n_{gn}}^{(n_n,1)} & \dots & k_{n_{gn},1}^{(n_n,n_n)} & \dots & k_{n_{gn},n_{gn}}^{(n_n,n_n)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n_n \end{array} \end{array} \quad (4.128)$$

donde cada uno de los bloques está asociado a cada nodo de la estructura, por tanto el número de bloques es  $n_n \times n_n$ , mientras que cada bloque consta de  $n_{gn} \times n_{gn}$  componentes. Nótese que para un elemento cualquiera de la matriz de rigidez  $k_{ij}^{(k,l)}$ ,  $k$  y  $l$  hacen referencia a los nodos  $k, l$ -ésimo de la estructura, respectivamente, y por último, los índices  $i$  y  $j$  hacen referencia a las componentes  $i, j$ -ésima de cada bloque, es decir, al elemento  $(i, j)$  del bloque  $(k, l)$ . Considerando las estructuras de la matriz de rigidez elemental (4.126) y de la matriz de rigidez global, cada uno de los bloques  $(k, l)$  de la matriz de rigidez del elemento ha de sumarse en el bloque  $(c_{e,k}, c_{e,l})$  de la matriz de rigidez global  $[\mathbf{K}]$  (4.128).

Análogamente, el vector de fuerzas nodales global tiene la siguiente estructura:

$$\{\mathbf{F}\} = \left\{ \begin{array}{c} f_1^{(1)} \\ \vdots \\ f_{n_{g_n}}^{(1)} \\ \vdots \\ f_1^{(n_e)} \\ \vdots \\ f_{n_{g_n}}^{(n_e)} \end{array} \right\} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n_n \end{array} \quad (4.129)$$

En este caso también tenemos bloques columna, y por tanto el bloque  $i$ -ésimo del vector de fuerzas del elemento  $e$ -ésimo (4.127) se sumará en el bloque  $c_{e,i}$  del vector de fuerzas globales  $\{\mathbf{F}\}$  en (4.129).

Nótese que el ensamblaje se efectúa por bloques.

Para ensamblar de forma sistemática tanto el vector de fuerzas como la matriz de rigidez para el caso de elementos genéricos hay que emplear el siguiente algoritmo:

#### Algoritmo 4.3 (Ensamblaje genérico).

- **Entrada:** Conjunto inicial de matrices de rigidez  $\mathbf{k}^{(e)}$ ;  $e = 1, \dots, n_e$  y vectores de fuerzas asociados  $\mathbf{f}^{(e)}$ ;  $e = 1, \dots, n_e$  asociados a cada elemento, y matriz de conectividad  $\mathbf{C}_{on}$ . En este caso el número de grados de libertad por nodo es igual a  $n_{g_n}$ , mientras que el número de nodos por elemento es  $n_{n_e}$ .
- **Salida:** Matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  y vector de fuerzas  $\mathbf{F}$  de la estructura.

**Paso 1:** Se inicializa el número de elementos  $n_e$  de la estructura como el número de filas de la matriz de conectividad, el número de nodos  $n_n$  del sistema se obtiene como el máximo valor de la matriz de conectividad:  $n_n = \max c_{ij}$ .

**Paso 2:** Inicialización de la matriz de rigidez del sistema  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$  de dimensiones  $(n_n \times n_{g_n}, n_n \times n_{g_n})$  y del vector de fuerzas  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  de dimensiones  $(n_n \times n_{g_n})$ .

**Paso 3:** Se inicializa el contador de elementos  $n_{el} = 1$  y se procede al ensamblaje.

**Paso 4:** Recorrer todos los bloques de la matriz de rigidez  $\mathbf{k}^{(n_{el},k,l)}$ ;  $\forall k = 1, \dots, n_{n_e}$ ;  $l = 1, \dots, n_{n_e}$  de dimensiones  $n_{g_n} \times n_{g_n}$ , cuyos índices de fila y columna varían de la siguiente manera:

$$((k-1)n_{g_n} + 1 : kn_{g_n}, (l-1)n_{g_n} + 1 : ln_{g_n}),$$

y sumarlos en el bloque  $(c_{n_{el},k}, c_{n_{el},l})$  de la matriz de rigidez global  $[\mathbf{K}]$  (4.128), cuyos índices de fila y columna varían de la siguiente manera:

$$((c_{n_{el},k} - 1)n_{g_n} + 1 : c_{n_{el},k}n_{g_n}, (c_{n_{el},l} - 1)n_{g_n} + 1 : c_{n_{el},l}n_{g_n}).$$

Análogamente, para el caso de las fuerzas, recorrer todos los bloques del vector de fuerzas del elemento  $\mathbf{f}^{(n_{el},k)}$ ;  $\forall k = 1, \dots, n_{n_e}$  de dimensiones  $n_{g_n}$ , cuyos índices de fila varían de la siguiente manera:

$$((k-1)n_{g_n} + 1 : kn_{g_n}),$$

y sumarlos en el bloque  $c_{n_{el},k}$  del vector de fuerzas globales  $\{\mathbf{F}\}$  en (4.129) cuyos índices de fila varían de la siguiente manera:

$$((c_{n_{el},k} - 1)n_{g_n} + 1 : c_{n_{el},k}n_{g_n}).$$

**Paso 5:** Si  $n_{el}$  es menor que el número de elementos  $n_e$  entonces incrementar  $n_{el}$  en una unidad  $n_{el} \leftarrow n_{el} + 1$  y continuar con el **Paso 4**. En caso contrario el algoritmo finaliza.

■

En la Figura 4.33 se muestra el ensamblaje de un elemento de tres nodos ( $n_{n_e} = 3$ ) y dos grados de libertad ( $n_{g_n} = 2$ ). Nótese que la matriz de rigidez del elemento  $n_{el}$ -ésimo ( $[\mathbf{k}^{n_{el}}]$ ) tiene de dimensiones  $(3 \times 2, 3 \times 2)$ , y que se puede dividir en tres bloques de  $2 \times 2$  asociados a cada nodo del elemento. Particularizando para el elemento  $n_{el} = 2$ , la información de los nodos que lo componen se encuentra en la segunda fila de la matriz de conectividad  $\mathbf{C}_{on}$ , de la que se deduce que el elemento 2 lo constituyen los nodos 2, 5, y 6. A continuación se recorren los bloques de la matriz de rigidez elemental con los índices  $i, j$ ;  $i = 1, 2, 3$ , de tal forma que si suponemos que  $i = 1$  y  $j = 2$ , es decir, primera fila y segunda columna de bloques, la matriz de conectividad nos indica la posición que ocupa dicho bloque en la matriz de rigidez global  $[\mathbf{K}]$ , que en este caso es (2,5).

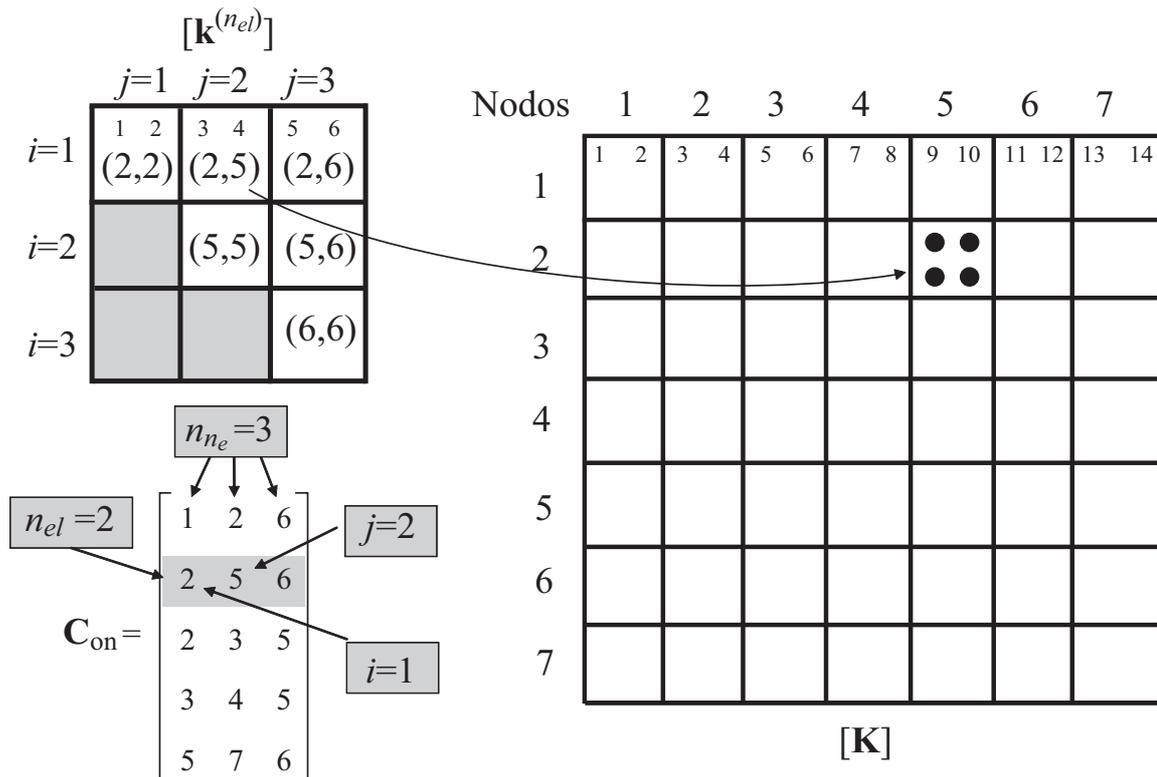


Figura 4.33: Ilustración gráfica del ensamblaje de un elemento de tres nodos ( $n_{n_e} = 3$ ) y dos grados de libertad ( $n_{g_n} = 2$ ).

**Comentario 4.15** La función de MATLAB en la que se implementa el ensamblaje genérico es la misma que la función `ensam.m` mostrada en Sección 4.2.9.4. El único cambio se produce en

la generación de la matriz de rigidez del elemento  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  en la que habrá de implementarse la correspondiente al problema que se plantea. ■

**Comentario 4.16** Alternativamente al ensamblaje por bloques se puede hacer un ensamblaje elemento a elemento, en el que se recorren todas las componentes de la matriz de rigidez  $k_{i,j}^{(e)}$ ;  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n_{n_e} \times n_{g_n}$  y se ensamblan (suma acumulada) en la posición:

$$[(c_{e,\text{floor}(i/n_{g_n})+1} - 1) n_{g_n} + \text{mod}(i, n_{g_n}), (c_{e,\text{floor}(j/n_{g_n})+1} - 1) n_{g_n} + \text{mod}(j, n_{g_n})],$$

donde el operador  $\text{floor}(a)$  redondea  $a$  al entero más pequeño y más próximo, y el operador  $\text{mod}(a, b)$  devuelve el resto de la división entera  $a/b$ . ■

# Aplicación del MEF en la Elasticidad Lineal

En el Apéndice A se exponen algunos conceptos básicos de la teoría de la elasticidad lineal de un medio continuo, en donde se muestran las ecuaciones *constitutivas* que relacionan tensiones y deformaciones. En este capítulo se procede al estudio mediante el *Método de los Elementos Finitos* (MEF) de problemas de Mecánica de Sólidos en régimen elástico lineal en dos y tres dimensiones mediante la utilización de elementos finitos más sencillos.

Los elementos bidimensionales utilizados en este capítulo son:

1. Elemento triangular de tres nodos (CST).
2. Elemento triangular de seis nodos (LST).
3. Elemento rectangular de cuatro nodos.

Respecto a los elementos tridimensionales, el único considerado es el elemento tetraédrico de 4 nodos.

## 5.1. Elemento Triangular de 3 Nodos (CST)

El elemento más sencillo (en dos dimensiones) que se puede considerar es el elemento triangular de tres nodos. Éste adquirió gran popularidad entre los ingenieros estructurales principalmente por su gran versatilidad y sencillez que, como se verá, permite expresar el proceso de análisis elástico de estructuras bidimensionales complejas mediante un procedimiento análogo al del cálculo de estructuras de barras. Por contrapartida tiene la limitación de que el campo de desplazamientos dentro del elemento es lineal, con lo que las deformaciones dentro del mismo son constantes. Esto obliga, en determinados casos, a la utilización de mallas muy tupidas para una respuesta satisfactoria. Debido a que la deformación es constante en el elemento finito, el elemento recibe el nombre de *Constant Strain Triangular* (CST).

### 5.1.1. Matriz de Rigidez del CST

En esta sección se exponen los pasos necesarios para obtener la matriz de rigidez  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  del elemento CST para problemas de elasticidad bidimensional. La matriz de rigidez  $[\mathbf{k}^{(e)}]$ , análogamente a lo expuesto para el elemento de barra, relaciona el vector de desplazamientos nodales  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$  con el vector de fuerzas externas aplicadas en los nodos  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$  de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}. \quad (5.1)$$

Los pasos para la obtención de la matriz de rigidez  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  del elemento CST para resolver problemas de elasticidad bidimensional son:

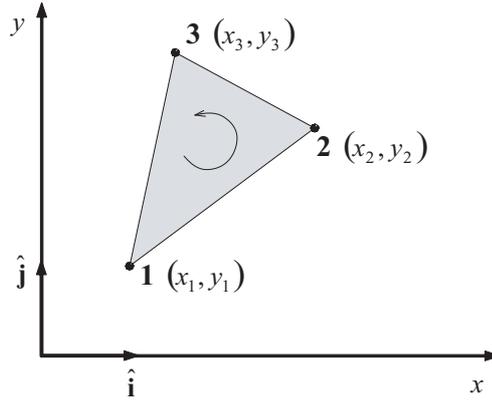


Figura 5.1: Elemento triangular de 3 nodos (CST).

- Paso 1: Identificación del problema.** El primer paso, común para cualquier elemento utilizado, es la selección del sistema de coordenadas y la identificación tanto del número de nodos del elemento ( $n_{n_e}$ ), como del número de grados de libertad por nodo ( $n_{g_n}$ ).

El sistema de coordenadas globales y la numeración de los nodos del elemento se muestran en la Figura 5.1. Nótese que la numeración de los nodos se realiza en sentido anti-horario, ya que el cálculo del área del elemento ( $A$ ) se obtiene por medio del producto vectorial de los vectores que van del nodo 1 al nodo 2, y del nodo 1 al nodo 3, respectivamente, cuya expresión es:

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{12} \wedge \vec{13} \right| \quad \text{con} \quad \begin{cases} \vec{12} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (0)\hat{k} \\ \vec{13} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (0)\hat{k} \end{cases} \quad (5.2)$$

expresión que con el sentido de numeración seleccionado siempre es positiva. La ecuación (5.2) también se puede expresar en función de las coordenadas de los nodos de la siguiente manera:

$$A = \frac{1}{2} (x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)). \quad (5.3)$$

Los desplazamientos para cada punto dentro del elemento están representados por el vector  $\{\mathbf{u}\}$  que consta de dos componentes asociadas, respectivamente, a una traslación horizontal ( $x$ ) y a una vertical ( $y$ ). Por tanto el número de grados de libertad o incógnitas por nodo es igual a dos, tal como se muestra en la Figura 5.2, con lo cual cada nodo del elemento tendrá dos parámetros nodales. Análogamente, para el caso de las fuerzas en los nodos, toda fuerza se puede expresar en función de dos componentes también asociadas a los grados de libertad, con lo cual el vector de desplazamientos nodales  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$  y el vector de fuerzas externas nodales  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$  vienen representados, respectivamente, por las siguientes expresiones:

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} f_{x_1}^{(e)} \\ f_{y_1}^{(e)} \\ f_{x_2}^{(e)} \\ f_{y_2}^{(e)} \\ f_{x_3}^{(e)} \\ f_{y_3}^{(e)} \end{Bmatrix}. \quad (5.4)$$

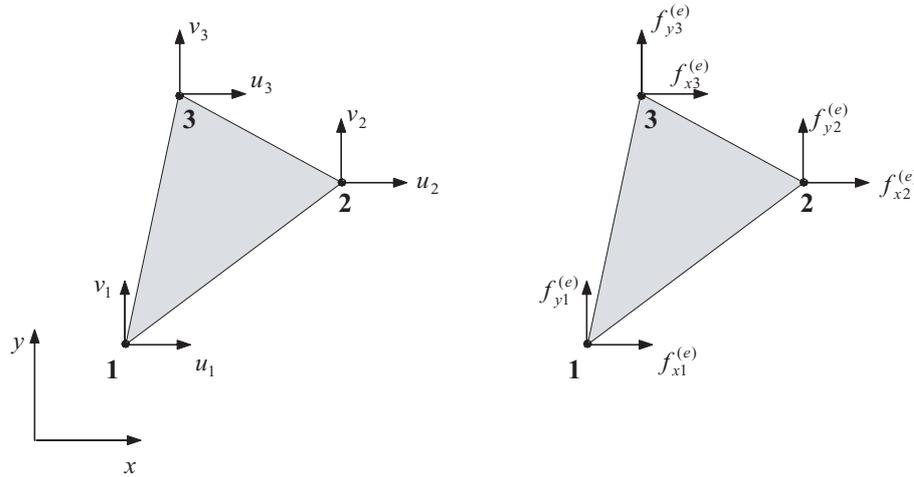


Figura 5.2: Componentes de los vectores de desplazamientos y de fuerzas externas nodales del elemento triangular de 3 nodos (CST).

- Paso 2: Selección de la función de desplazamientos  $\{u(x, y)\}$ .** Dos aspectos importantes cuando se utiliza el método de los elementos finitos para la resolución de una ecuación diferencial son: 1) discretización del dominio, y 2) selección dentro de cada elemento del tipo de aproximación que se va a adoptar, para posteriormente tratar de expresarla **sólo** en función de un número finito de puntos del elemento (nodos), de forma que el conocer el valor de una función en esos nodos seleccionados implica conocer el valor de la función en cualquier punto dentro del elemento, sin más que interpolar los valores nodales.

Previo paso a la selección de las funciones interpolantes (o de forma) es importante recalcar que adoptaremos funciones polinómicas, y que sólo pueden reproducir exactamente variaciones polinómicas de grado igual o inferior al del polinomio completo de mayor grado contenido en dichas funciones. Obviamente, la solución será tanto mejor cuanto mayor sea el grado de dicho polinomio completo. En dos dimensiones un polinomio completo de grado  $n$  puede escribirse de la siguiente manera:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^p \alpha x^j y^k; \quad j + k \leq n, \quad (5.5)$$

donde el número de términos en el polinomio es

$$p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (5.6)$$

De esta forma, para un polinomio lineal con tres términos ( $p = 3$ ):

$$f(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (5.7)$$

Una vez que se dispone del polinomio es preciso saber si es un polinomio completo o no, una forma sencilla de identificar el polinomio completo es a través del *Polinomio de Pascal* que se muestra en la Figura 5.3.

Nótese que a la hora de seleccionar un elemento u otro (el tipo de aproximación a realizar) es preferible seleccionar elementos cuyas funciones aproximantes sean polinomios completos, ya que términos adicionales que no impliquen polinomios completos de mayor grado no contribuyen notablemente a aumentar el grado de la aproximación.

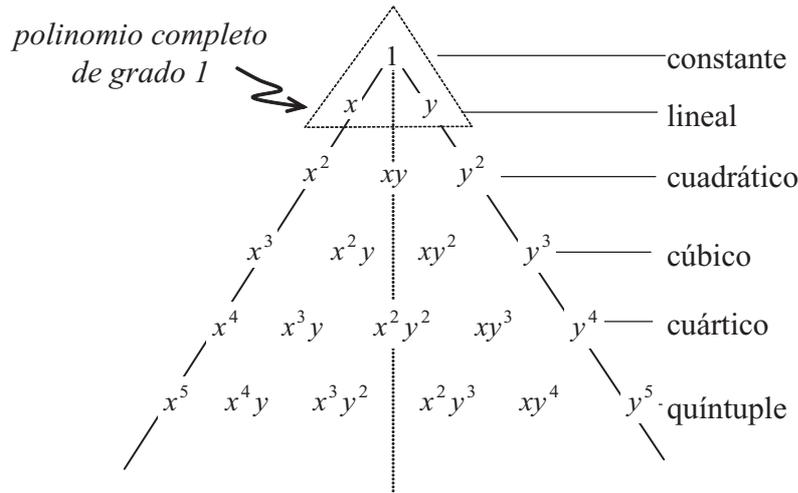


Figura 5.3: Polinomio de Pascal en dos dimensiones.

En el caso de que las funciones que representan el campo de desplazamientos sean lineales tienen la siguiente forma:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{5.8}$$

$$v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y, \tag{5.9}$$

donde los coeficientes ( $\alpha_i; i = 1, \dots, 6$ ) son constantes indeterminadas. Nótese que tanto (5.8) como (5.9) son polinomios completos de grado 1.

Las expresiones (5.8) y (5.9) en forma matricial quedan de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

o de forma compacta como:

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = [\mathbf{X}] \{\boldsymbol{\alpha}\}, \tag{5.11}$$

donde:

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

- Paso 3: Representación de los desplazamientos dentro del elemento.** En esta etapa se pretende representar los desplazamientos dentro del elemento,  $\{\mathbf{u}(x, y)\}$ , en función de los desplazamientos nodales,  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$ , es decir, que los parámetros  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  de la ecuación (5.11) quedan en función de los desplazamientos nodales.

Partiendo de que la función de aproximación adoptada (5.10) es válida para todos los puntos del elemento, a continuación se particulariza la función de los desplazamientos en

las coordenadas de los tres nodos del elemento:

$$\begin{aligned}
 u(x_1, y_1) &= u_1^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\
 v(x_1, y_1) &= v_1^{(e)} = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1 \\
 u(x_2, y_2) &= u_2^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\
 v(x_2, y_2) &= v_2^{(e)} = \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2 \\
 u(x_3, y_3) &= u_3^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \\
 v(x_3, y_3) &= v_3^{(e)} = \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3,
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

expresión que de forma matricial queda como:

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{u}^{(e)}\} = [\mathbf{A}] \{\boldsymbol{\alpha}\} \tag{5.14}$$

y su forma inversa:

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \tag{5.15}$$

donde la inversa de  $[\mathbf{A}]$  viene dada por:

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 y_3 \\ -y_2 x_3 \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} y_1 x_3 \\ -x_1 y_3 \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} x_1 y_2 \\ -y_1 x_2 \end{pmatrix} & 0 \\ (y_2 - y_3) & 0 & (y_3 - y_1) & 0 & (y_1 - y_2) & 0 \\ (x_3 - x_2) & 0 & (x_1 - x_3) & 0 & (x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} x_2 y_3 \\ -y_2 x_3 \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} y_1 x_3 \\ -x_1 y_3 \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} x_1 y_2 \\ -y_1 x_2 \end{pmatrix} \\ 0 & (y_2 - y_3) & 0 & (y_3 - y_1) & 0 & (y_1 - y_2) \\ 0 & (x_3 - x_2) & 0 & (x_1 - x_3) & 0 & (x_2 - x_1) \end{bmatrix},$$

donde  $A$  es el área del elemento triangular.

Reemplazando la expresión (5.15) en la ecuación (5.11) se llega a la siguiente expresión:

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = [\mathbf{X}][\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \tag{5.16}$$

de donde se deduce que:

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{X}][\mathbf{A}]^{-1}, \tag{5.17}$$

y por tanto, los desplazamientos quedan como:

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}. \tag{5.18}$$

Nótese que la matriz  $[\mathbf{N}]$  nos proporciona los desplazamientos en cualquier punto dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales, y contiene las funciones de forma del elemento:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \tag{5.19}$$

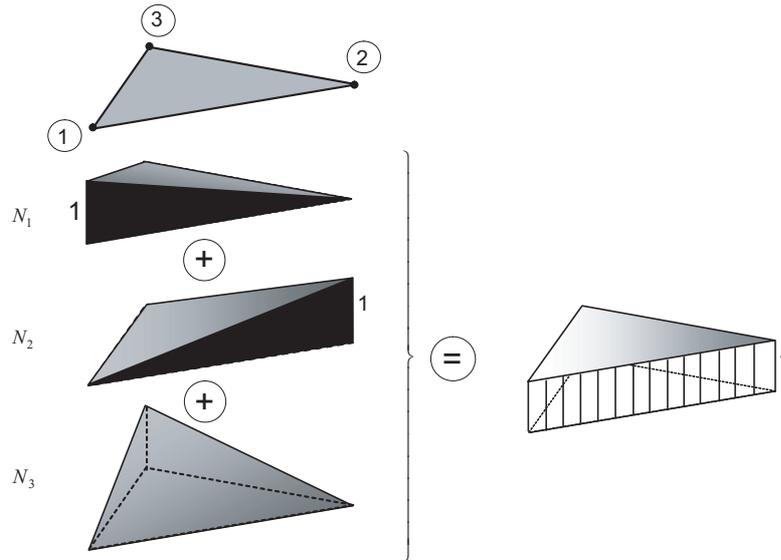


Figura 5.4: Funciones de forma lineales  $N_1(x, y)$ ,  $N_2(x, y)$  y  $N_3(x, y)$  del elemento CST.

donde:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{2A} (x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + (x_2y_3 - x_3y_2)) \\
 N_2(x, y) &= \frac{1}{2A} (x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + (x_3y_1 - x_1y_3)) \\
 N_3(x, y) &= \frac{1}{2A} (x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)).
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

En la Figura 5.4 se muestra una representación gráfica de cada una de las funciones de forma. En ella se puede observar cómo la función de forma asociada al nodo  $i$ -ésimo es por un lado lineal, y vale 1 en el nodo  $i$ -ésimo y cero en los demás. Además se cumple que la suma de las mismas es  $\sum_{i=1}^3 N_i = 1$  en todos los puntos del dominio del elemento.

**Comentario 5.1** Nótese que  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$  son análogas a las funciones interpoladoras de Lagrange  $l_i^{(n-1)}(z)$  de grado  $(n-1) = 1$  cuya expresión genérica se da en (2.80), y pueden obtenerse empleando coordenadas de área de la siguiente manera:

$$N_1 = \frac{A_1}{2A}; \quad N_2 = \frac{A_2}{2A}; \quad N_3 = \frac{A_3}{2A}, \tag{5.21}$$

donde las áreas se calculan mediante la fórmula del símplice en dos dimensiones:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}; \quad A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}; \quad A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5.22}$$

■

**Definición 5.1 (Símplice).** Se define como símplice en el espacio  $n$ -dimensional aquella entidad geométrica perteneciente a ese espacio que es capaz de generar un hipervolumen

en esa dimensión distinto de cero con el menor número de puntos  $n + 1$ . Su hipervolumen  $V^{(n)}$  en función de las coordenadas de esos puntos se calcula mediante la fórmula:

$$V^{(n)} = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & \cdots & x_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.23)$$

donde  $x_{ij}$  es la coordenada  $j$ -ésima del nodo o punto  $i$ -ésimo que compone el símplice. ■

- **Paso 4: Establecimiento de la relación deformación-desplazamiento dentro del elemento.** Dado que en las ecuaciones de la elasticidad intervienen las deformaciones es preciso relacionar para un elemento dado, las deformaciones  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\}$  con los desplazamientos nodales  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$ .

En la teoría de la elasticidad lineal, para problemas tanto de tensión plana como de deformación plana, ver Apéndice A, la expresión que permite relacionar las deformaciones  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\}$  con los desplazamientos es la siguiente:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (5.24)$$

que de forma matricial queda como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \quad (5.25)$$

Sustituyendo el vector desplazamiento  $\{\mathbf{u}(x, y)\}$  por  $[\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}$  (véase la ecuación (5.18)) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.26)$$

y por tanto:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \{\mathbf{u}^{(e)}\}. \quad (5.27)$$

Si en la expresión anterior, a la matriz que contiene las derivadas de las funciones de forma se la denota como  $[\mathbf{B}] = [\mathbf{B}_1 ; \mathbf{B}_2 ; \mathbf{B}_3]$ , se puede obtener el campo de deformación como:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.28)$$

que permite expresar las deformaciones dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales.

- **Paso 5: Establecimiento de la relación tensión-desplazamiento dentro del elemento.** Análogamente a lo que ocurría para la deformación-desplazamiento, para resolver el problema elástico es necesario establecer una relación entre la tensión en el elemento  $\{\boldsymbol{\sigma}(x, y)\}$  y los desplazamientos nodales  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$ .

Si se considera un material homogéneo, elástico, lineal e isótropo, la relación tensión-deformación viene dada por la siguiente expresión:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(x, y)\} = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (5.29)$$

donde la *matriz constitutiva elástica*,  $[\mathbf{D}]$ , con las propiedades elásticas (mecánicas) del material, tal y como se muestra en el Apéndice A, depende del tipo de problema:

- Tensión plana:

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

- Deformación plana

$$[\mathbf{D}] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal o Módulo de Young, y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson.

Sustituyendo (5.28) en (5.29) se obtiene la siguiente expresión:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(x, y)\} = [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.32)$$

que nos permite expresar la tensión en cualquier punto del elemento una vez conocidos los desplazamientos nodales.

- **Paso 6: Establecimiento de la relación fuerzas-desplazamientos nodales.** El último paso para obtener la matriz de rigidez del elemento CST consiste en establecer la relación entre la fuerza  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$  y el desplazamiento nodal  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$ , precisamente esa relación viene dada por la matriz de rigidez del elemento  $\{\mathbf{k}^{(e)}\}$ .

Aplicando el *Teorema del Trabajo Virtual*, imponemos unos desplazamientos virtuales  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}$  en los nodos del elemento de forma que el trabajo externo total, que viene dado por la expresión:

$$W_{ext} = \{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}^T \{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\},$$

ha de ser igual al trabajo interno total, que se obtiene mediante la expresión:

$$W_{int} = \int_V \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y)\}^T \{\boldsymbol{\sigma}(x, y)\} dV, \quad (5.33)$$

donde  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  y  $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$  son las tensiones internas y las deformaciones virtuales, respectivamente.

Las deformaciones virtuales se pueden relacionar con los desplazamientos nodales virtuales utilizando (5.28), de forma que:

$$\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y)\} = [\mathbf{B}] \{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}. \quad (5.34)$$

A continuación es posible reemplazar en la expresión del trabajo interno (5.33) el valor de  $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y)\}$  de la expresión anterior, y la tensión dada por (5.32) resultando en:

$$\begin{aligned} W_{int} &= \int_V \{[\mathbf{B}] \{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}\}^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} dV \\ &= \int_V \{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} dV. \end{aligned}$$

Dado que tanto los desplazamientos virtuales como los desplazamientos nodales son constantes, éstos pueden salir de la integral con lo que se obtiene:

$$W_{int} = \{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}^T \left[ \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right] \{\mathbf{u}^{(e)}\}$$

Igualando el trabajo externo con el interno  $W_{ext} = W_{int}$ , se llega a:

$$\{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}^T \{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = \{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}^T \left[ \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.35)$$

y eliminando los desplazamientos virtuales de ambos miembros se obtiene la relación entre las fuerzas nodales y los desplazamientos nodales dentro del elemento:

$$\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = \left[ \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.36)$$

que de forma compacta queda como:

$$\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.37)$$

donde  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  es la matriz de rigidez del elemento, que es igual a:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV. \quad (5.38)$$

**Comentario 5.2** Es importante enfatizar que la matriz de rigidez de cualquier otro elemento tiene la misma estructura que la matriz de rigidez de la expresión (5.38). ■

Si se particulariza para el triángulo de deformación constante (CST) y se sustituye la matriz  $[\mathbf{B}]$  dada por la ecuación (5.27), queda de la siguiente manera:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_V \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_1]^T \\ \text{---} \\ [\mathbf{B}_2]^T \\ \text{---} \\ [\mathbf{B}_3]^T \end{bmatrix} [\mathbf{D}] [[\mathbf{B}_1]; [\mathbf{B}_2]; [\mathbf{B}_3]] dV, \quad (5.39)$$

que al multiplicar bloque a bloque queda como:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_V \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_1] & [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_2] & [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_3] \\ [\mathbf{B}_2]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_1] & [\mathbf{B}_2]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_2] & [\mathbf{B}_2]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_3] \\ [\mathbf{B}_3]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_1] & [\mathbf{B}_3]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_2] & [\mathbf{B}_3]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_3] \end{bmatrix} dV. \quad (5.40)$$

Adicionalmente, se puede descomponer la integral de volumen (5.38) en una integral de línea según la dirección del espesor del elemento (eje  $z$ ) y en una integral de área, con lo que la expresión de la matriz de rigidez queda como:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_z \left\{ \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dA \right\} dz, \quad (5.41)$$

de forma que si consideramos el espesor en todo el elemento constante ( $t$ ) resulta:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = t \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dA. \quad (5.42)$$

Es importante recalcar que la matriz  $[\mathbf{D}]$  es constante en todo el elemento para el caso de elasticidad lineal y depende del tipo de material, por contra, la matriz con las derivadas de las funciones de forma  $[\mathbf{B}]$  puede ser dependiente de las coordenadas  $(x, y)$  en función de la solución elegida para cada elemento. En estos casos la matriz de rigidez se puede obtener integrando analíticamente si las expresiones son sencillas, o mediante las técnicas de integración numérica revisadas en el la Sección 2.3 (página 50) en caso contrario.

Una de las ventajas del elemento CST es que la matriz  $[\mathbf{B}]$  es constante en todo el elemento, es decir, que las deformaciones son constantes. Por tanto la expresión (5.42) se puede simplificar considerablemente porque el producto de matrices, al ser constante, puede salir fuera de la integral con lo que se llega a la siguiente expresión:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = tA [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}], \quad (5.43)$$

donde  $A$  es el área del elemento finito.

**Comentario 5.3** Siempre que la numeración de los nodos dentro del elemento esté en sentido anti-horario, el área resultante del elemento será positivo ( $A > 0$ ). ■

Partiendo de la expresión (5.20), la matriz  $[\mathbf{B}]$  se puede expresar de la forma:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & | & b_2 & 0 & | & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & | & 0 & c_2 & | & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & | & c_2 & b_2 & | & c_3 & b_3 \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

donde los coeficientes  $b_i, c_i$ ;  $i = 1, 2, 3$ , vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} b_1 &= (y_2 - y_3); & b_2 &= (y_3 - y_1); & b_3 &= (y_1 - y_2); \\ c_1 &= (x_3 - x_2); & c_2 &= (x_1 - x_3); & c_3 &= (x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (5.45)$$

La matriz constitutiva elástica queda con la siguiente estructura:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

donde los parámetros  $D_1, D_2$  y  $D_3$  dependen de si el tipo de problema es de tensión o deformación plana (véase la Sección A.1.5, Apéndice A):

■ **Tensión plana:**

$$D_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad D_2 = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad D_3 = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.47)$$

■ **Deformación plana:**

$$D_1 = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad D_2 = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad D_3 = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.48)$$

Sustituyendo las expresiones (5.44) y (5.46) en la ecuación (5.43) se obtiene la matriz de rigidez del elemento triangular CST de espesor constante:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \frac{t}{4A} \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} & k_{15}^{(e)} & k_{16}^{(e)} \\ & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} & k_{25}^{(e)} & k_{26}^{(e)} \\ & & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} & k_{35}^{(e)} & k_{36}^{(e)} \\ & & & k_{44}^{(e)} & k_{45}^{(e)} & k_{46}^{(e)} \\ & Sim. & & & k_{55}^{(e)} & k_{56}^{(e)} \\ & & & & & k_{66}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

donde los coeficientes de la matriz son:

$$\begin{aligned} k_{11} &= c_1^2 D_3 + b_1^2 D_1; & k_{12} &= b_1 D_2 c_1 + c_1 D_3 b_1; & k_{13} &= b_1 D_1 b_2 + c_1 D_3 c_2; \\ k_{14} &= b_1 D_2 c_2 + c_1 D_3 b_2; & k_{15} &= b_1 D_1 b_3 + c_1 D_3 c_3; & k_{16} &= b_1 D_2 c_3 + c_1 D_3 b_3; \\ k_{22} &= c_2^2 D_1 + b_2^2 D_3; & k_{23} &= c_1 D_2 b_2 + b_1 D_3 c_2; & k_{24} &= c_1 D_1 c_2 + b_1 D_3 b_2; \\ k_{25} &= c_1 D_2 b_3 + b_1 D_3 c_3; & k_{26} &= c_1 D_1 c_3 + b_1 D_3 b_3; & k_{33} &= c_2^2 D_3 + b_2^2 D_1; \\ k_{34} &= b_2 D_2 c_2 + c_2 D_3 b_2; & k_{35} &= b_2 D_1 b_3 + c_2 D_3 c_3; & k_{36} &= b_2 D_2 c_3 + c_2 D_3 b_3; \\ k_{44} &= c_2^2 D_1 + b_2^2 D_3; & k_{45} &= c_2 D_2 b_3 + b_2 D_3 c_3; & k_{46} &= c_2 D_1 c_3 + b_2 D_3 b_3; \\ k_{55} &= c_3^2 D_3 + b_3^2 D_1; & k_{56} &= b_3 D_2 c_3 + c_3 D_3 b_3; & k_{66} &= c_3^2 D_1 + b_3^2 D_3. \end{aligned}$$

### 5.1.2. Vector de Fuerzas Externas Nodales Equivalente del Elemento CST

Dado que la relación fuerza-desplazamiento para el elemento CST viene dada por la ecuación (5.1), en la que intervienen el vector de fuerzas  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$ , es preciso definir cómo se obtiene ese vector de fuerzas para distintas acciones que puedan intervenir.

Previo paso a la obtención de ese vector de fuerzas se definen los tipos de fuerzas que vamos a considerar en el estudio:

1. **Fuerzas másicas.** En este grupo se engloban todas aquellas fuerzas que actúan en todo el volumen del elemento, tales como las fuerzas gravitacionales, fuerzas eléctricas, y las magnéticas. En el caso de Mecánica de Sólidos sólo se estudiarán los efectos provocados por las fuerzas másicas de tipo gravitatorio, que en el espacio bidimensional se representan de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{b}\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho b_x \\ \rho b_y \end{Bmatrix}, \quad (5.50)$$

donde  $p_x$  y  $p_y$  son fuerzas por unidad de volumen,  $b_x$  y  $b_y$  son fuerzas por unidad de masa y  $\rho$  es la densidad de masa del material.

2. **Fuerzas debido a deformaciones iniciales.** En este caso son fuerzas que actúan en el elemento debido a deformaciones iniciales  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$  independientes de las tensiones, que tienen su aparición por fenómenos de retracción, cristalización, variaciones de temperatura, etc. Son deformaciones que producen tensiones  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  cuya relación con las deformaciones viene dada por la siguiente expresión:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}, \quad (5.51)$$

donde  $[\mathbf{D}]$  es la matriz constitutiva.

3. **Fuerzas de superficie.** En este grupo se engloban todas aquellas fuerzas que actúan en las caras de los elementos. Se representan por la función  $[\mathbf{P}]$ .

El objetivo del método de los elementos finitos es transformar el problema continuo a discreto considerando sólo fuerzas y desplazamientos nodales, por tanto, es ineludible la transformación de las fuerzas, tanto másicas, como producidas por deformaciones iniciales, como superficiales, a fuerzas directamente aplicadas en los nodos. Para ello se trata de encontrar unas fuerzas nodales cuyo efecto sea equivalente al efecto de las anteriores. Ésto se consigue imponiendo que el trabajo de las fuerzas externas en ambos casos sea el mismo.

Supuestos unos desplazamientos y unas deformaciones virtuales ( $\{\bar{\mathbf{u}}(x, y)\}, \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ ) en el elemento, el trabajo de las fuerzas externas  $W_{ext}$ , mencionadas anteriormente, se obtiene de la siguiente manera:

$$W_{ext} = \int_V \{\bar{\mathbf{u}}(x, y)\}^T \{\mathbf{b}\} dV + \int_S \{\bar{\mathbf{u}}(x, y)\}^T \{\mathbf{P}\} dS + \int_V \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV. \quad (5.52)$$

Sustituyendo en la expresión anterior los desplazamientos y deformaciones virtuales por expresiones análogas a (5.18) y (5.28), respectivamente, el trabajo de las fuerzas externas queda como:

$$W_{ext} = \{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}^T \left[ \int_V [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\} dV + \int_S [\bar{\mathbf{N}}]^T \{\mathbf{P}\} dS + \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} dV \right], \quad (5.53)$$

donde  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}$  son los desplazamientos virtuales en los nodos. Esta expresión supone, al igual que para el cálculo de la matriz de rigidez, que los desplazamientos varían según una función que coincide con las funciones de forma  $[\mathbf{N}]$ .

La expresión (5.53) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$W_{ext} = \{\bar{\mathbf{u}}^{(e)}\}^T \left[ \{\mathbf{f}_b^{(e)}\} + \{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}^{(e)}\} + \{\mathbf{f}_t^{(e)}\} \right], \quad (5.54)$$

donde  $\{\mathbf{f}_b^{(e)}\}$ ,  $\{\mathbf{f}_{\epsilon_0}^{(e)}\}$  y  $\{\mathbf{f}_t^{(e)}\}$  son las fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas másicas, a las deformaciones iniciales, y a las fuerzas de superficie, respectivamente.

Conclusión, el vector de fuerzas nodales equivalente del elemento CST,  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$ , está constituido por las siguientes componentes:

$$\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = \{\mathbf{f}_b^{(e)}\} + \{\mathbf{f}_{\epsilon_0}^{(e)}\} + \{\mathbf{f}_t^{(e)}\} \quad (5.55)$$

En los apartados siguientes se obtienen expresiones explícitas particularizadas para el elemento CST.

### 5.1.2.1. Fuerzas Nodales Debido a las Fuerzas Másicas

La expresión del vector de fuerzas másicas equivalentes (véanse las ecuaciones (5.53) y (5.54)) es:

$$\{\mathbf{f}_b^{(e)}\} = \int_V [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\} dV, \quad (5.56)$$

y considerando el tipo de aproximación dado por la ecuación (5.17) se obtiene que:

$$\{\mathbf{f}_b^{(e)}\} = \int_V [\mathbf{A}^{-1}]^T [\mathbf{X}]^T \{\mathbf{b}\} dV. \quad (5.57)$$

Si el espesor del elemento es constante e igual a  $(t)$ , y dado que la matriz  $[\mathbf{A}]$  es constante en el elemento, la integral de volumen se transforma en una integral de área de la forma:

$$\{\mathbf{f}_b^{(e)}\} = t [\mathbf{A}^{-1}]^T \int_A [\mathbf{X}]^T \{\mathbf{b}\} dA \quad (5.58)$$

en la que sustituyendo la matriz  $[\mathbf{X}]^T$  por su valor:

$$\{\mathbf{f}_b^{(e)}\} = t [\mathbf{A}]^{-T} \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \\ y & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dA. \quad (5.59)$$

Integrando (5.59) y teniendo en cuenta que:

$$A = \int_A dA \quad ; \quad \int_A x dA = x_c A \quad ; \quad \int_A y dA = y_c A \quad (5.60)$$

donde  $A$  es el área del elemento, y  $(x_c, y_c)$  son las coordenadas del centroide (centro de gravedad) del elemento CST, dadas por:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

se llega a la expresión cerrada del vector de fuerzas másicas equivalente:

$$\{\mathbf{f}_b^{(e)}\} = t [\mathbf{A}^{-1}]^T \begin{bmatrix} p_x \\ x_c p_x \\ y_c p_x \\ p_y \\ x_c p_y \\ y_c p_y \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

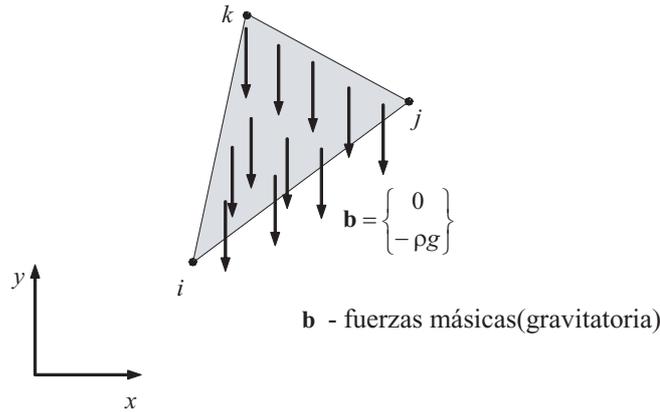


Figura 5.5: Fuerzas másicas gravitatorias que actúan en un elemento triangular.

o, en función de las coordenadas nodales:

$$\left\{ \mathbf{f}_{\mathbf{b}}^{(e)} \right\} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} (x_c(y_2 - y_3) + y_c(x_3 - x_2) + x_2 y_3 - y_2 x_3) p_x \\ (x_c(y_2 - y_3) + y_c(x_3 - x_2) + x_2 y_3 - y_2 x_3) p_y \\ (x_c(y_3 - y_1) + y_c(x_1 - x_3) - x_1 y_3 + y_1 x_3) p_x \\ (x_c(y_3 - y_1) + y_c(x_1 - x_3) - x_1 y_3 + y_1 x_3) p_y \\ (x_c(y_1 - y_2) + y_c(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - y_1 x_2) p_x \\ (x_c(y_1 - y_2) + y_c(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - y_1 x_2) p_y \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

Si se tienen en cuenta las coordenadas del centro de gravedad  $(x_c, y_c)$  y el área del triángulo (5.3), la expresión anterior queda como:

$$\left\{ \mathbf{f}_{\mathbf{b}}^{(e)} \right\} = \frac{tA}{3} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix}. \quad (5.63)$$

la fuerza másica que más se utiliza en ingeniería civil es la gravitacional (véase la Figura 5.5), que en las proximidades de la superficie de la tierra viene dada por la expresión:

$$\{\mathbf{b}\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix}, \quad (5.64)$$

donde  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  es la aceleración de la gravedad, la ecuación (5.63) se transforma en:

$$\left\{ \mathbf{f}_{\mathbf{b}}^{(e)} \right\} = \frac{tA}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \\ 0 \\ -\rho g \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

### 5.1.2.2. Fuerzas Nodales Debido a Deformaciones Iniciales

La expresión del vector de fuerzas nodales equivalentes debido a deformaciones iniciales (véanse las ecuaciones (5.53) y (5.54)) es:

$$\{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}^{(e)}\} = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} dV. \quad (5.66)$$

Generalmente, las deformaciones iniciales se deben a variaciones de temperatura, así el vector deformación inicial ( $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$ ) depende de si el problema es de tensión plana, o de deformación plana:

1. **Estado de deformación plana.** En este caso las deformaciones iniciales vienen dadas por:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \gamma_{xy_0} \end{Bmatrix} = (1 + \nu) \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.67)$$

donde  $\alpha(1/^\circ C)$  es el coeficiente de dilatación térmica,  $\Delta T$  es la variación de temperatura que sufre el cuerpo en grados centígrados ( $^\circ C$ ), y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson. Nótese que la variación de temperatura sólo produce deformaciones normales.

Reemplazando el valor de las matrices  $[\mathbf{B}]$  (véase la ecuación (5.44)), y  $[\mathbf{D}]$  para el caso de deformación plana (5.31) se llega:

$$\{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}^{(e)}\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} [\mathbf{D}] (1 + \nu) \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \int_V dV, \quad (5.68)$$

que al considerar el espesor constante queda como:

$$\{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}^{(e)}\} = \frac{Et\alpha\Delta T}{2(1+2\nu)} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

2. **Estado de tensión plana.** En este caso, las deformaciones iniciales producidas por un incremento de la temperatura vienen dadas por la expresión:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \gamma_{xy_0} \end{Bmatrix} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.70)$$

Reemplazando las deformaciones en la integral (5.66), y sustituyendo el valor de las matrices  $[\mathbf{B}]$  y  $[\mathbf{D}]$  para el caso de tensión plana se llega a la siguiente expresión:

$$\{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}^{(e)}\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} [\mathbf{D}] \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \int_V dV, \quad (5.71)$$

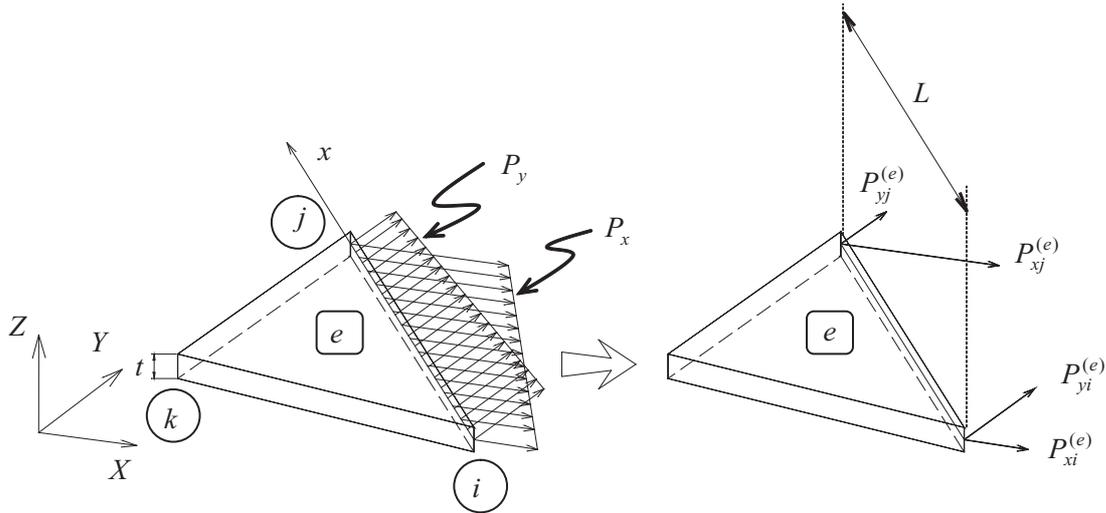


Figura 5.6: Fuerzas de superficie que actúan en un elemento triangular.

que al considerar el espesor constante queda como:

$$\left\{ \mathbf{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}^{(e)} \right\} = \frac{Et\alpha\Delta T}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}. \tag{5.72}$$

**5.1.2.3. Fuerzas Nodales Debido a las Fuerzas de Superficie**

El vector de fuerzas de superficie nodales (véanse las ecuaciones (5.53) y (5.54)) es:

$$\left\{ \mathbf{f}_t^{(e)} \right\} = \int_S [\bar{\mathbf{N}}]^T [\mathbf{P}] dS \tag{5.73}$$

donde la integral se extiende a lo largo de la superficie lateral del elemento, siendo  $[\bar{\mathbf{N}}]$  la función de forma que representa la variación de la fuerza en el contorno considerado. En este caso sólo se considera el caso en el que la fuerza de superficie varíe linealmente a lo largo de toda la superficie lateral en la que se aplica, tal y cómo se muestra en la Figura 5.6.

Si consideramos un nuevo sistema de referencia representado por  $x$ , colineal con el lado  $ij$  en el que se aplica la fuerza, y positivo en el sentido del nodo  $i$  al nodo  $j$ , podemos expresar el valor de las fuerzas de superficie ( $P_x, P_y$ ) en cualquier punto del lado  $ij$  en función del sistema local de coordenadas ( $x$ ) (polinomio de Lagrange lineal en una dimensión) mediante la relación:

$$\begin{cases} P_x(x) = \beta_1 + x\beta_2 \\ P_y(x) = \beta_3 + x\beta_4 \end{cases}, \tag{5.74}$$

donde  $\beta_i; i = 1, \dots, 4$ , son constantes a determinar. En forma matricial la expresión anterior

queda como:

$$\begin{Bmatrix} P_x(x) \\ P_y(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

Para obtener los coeficientes  $\beta_i$ ;  $i = 1, \dots, 4$ , se parte de los valores de las fuerzas de superficie en ambos extremos del contorno (datos). Como la relación (5.75) es válida para todo el contorno también es válida para los extremos, por tanto:

$$\begin{bmatrix} P_{x_i}^{(e)} \\ P_{y_i}^{(e)} \\ P_{x_j}^{(e)} \\ P_{y_j}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

donde  $L$  es la longitud del contorno  $ij$  considerado. Tomando la relación inversa se obtienen los valores de los coeficientes como:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \frac{-1}{L^2} \begin{bmatrix} -L^2 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & -L & 0 \\ 1 & -L^2 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_i}^{(e)} \\ P_{y_i}^{(e)} \\ P_{x_j}^{(e)} \\ P_{y_j}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Sustituyendo (5.77) en (5.75), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} = \frac{-1}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L^2 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & -L & 0 \\ 1 & -L^2 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_i}^{(e)} \\ P_{y_i}^{(e)} \\ P_{x_j}^{(e)} \\ P_{y_j}^{(e)} \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{N}}] \begin{Bmatrix} P_{x_i}^{(e)} \\ P_{y_i}^{(e)} \\ P_{x_j}^{(e)} \\ P_{y_j}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (5.78)$$

donde  $[\bar{\mathbf{N}}]$  contiene las funciones de forma supuesta una variación lineal de las fuerzas:

$$[\bar{\mathbf{N}}] = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(L-x)}{L} & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & \frac{(L-x)}{L} & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Sustituyendo el valor de la fuerza de superficie (5.78) en (5.73), se obtiene:

$$\{\mathbf{f}_t^{(e)}\} = \int_S \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & 0 \\ 0 & \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(L-x)}{L} & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & \frac{(L-x)}{L} & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_i}^{(e)} \\ P_{y_i}^{(e)} \\ P_{x_j}^{(e)} \\ P_{y_j}^{(e)} \end{bmatrix} dS, \quad (5.80)$$

que al multiplicar matricialmente suponiendo un espesor constante resulta en:

$$\{\mathbf{f}_t^{(e)}\} = t \int_0^L \begin{bmatrix} \bar{N}_1^2 P_{x_i}^{(e)} + \bar{N}_1 \bar{N}_2 P_{x_j}^{(e)} \\ \bar{N}_1^2 P_{y_i}^{(e)} + \bar{N}_1 \bar{N}_2 P_{y_j}^{(e)} \\ \bar{N}_1 \bar{N}_2 P_{x_i}^{(e)} + \bar{N}_2^2 P_{x_j}^{(e)} \\ \bar{N}_1 \bar{N}_2 P_{y_i}^{(e)} + \bar{N}_2^2 P_{y_j}^{(e)} \end{bmatrix} dx, \quad (5.81)$$

donde  $\bar{N}_1 = \frac{(L-x)}{L}$  y  $\bar{N}_2 = \frac{x}{L}$  son los polinomios de Lagrange  $l_1^{(0)}$  y  $l_2^{(0)}$ , respectivamente.

Integrando a lo largo del contorno en (5.81), se llega a :

$$\left\{ \mathbf{f}_t^{(e)} \right\} = \frac{tL}{6} \begin{bmatrix} 2P_{xi}^{(e)} + P_{xj}^{(e)} \\ 2P_{yi}^{(e)} + P_{yj}^{(e)} \\ P_{xi}^{(e)} + 2P_{xj}^{(e)} \\ P_{yi}^{(e)} + 2P_{yj}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

**Comentario 5.4** Nótese que las fuerzas superficiales están asociadas a contornos laterales del elemento. En caso de que haya varios contornos del elemento en los que actúan fuerzas, hay que sumar la contribución de cada uno de ellos. ■

## 5.2. Análisis de Estructuras Bidimensionales Elásticas

Una vez obtenidas las ecuaciones del MEF para problemas de elasticidad bidimensional particularizadas para un elemento y un tipo de aproximación, se ha de proceder a la resolución global del problema. Como ya se vio en el Capítulo 1, la resolución de un Problema de Valor de Contorno (PVC) mediante el método de los elementos finitos consta de las siguientes etapas (véase el diagrama de flujo mostrado en la Figura 5.7):

1. **Discretización del dominio.** El primero paso consiste en dividir el dominio de estudio en subdominios (elementos) en los cuales las ecuaciones en derivadas parciales son también válidas.
2. **Ecuaciones del MEF para el elemento.** Una vez seleccionado el tipo de elemento con el que discretizar, y la forma de la solución en el dominio del elemento, es preciso calcular tanto la matriz de rigidez del elemento ( $\{\mathbf{k}^{(e)}\}$ ), como el vector de fuerzas externas ( $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$ ). En las secciones anteriores se calcularon para determinados elementos.
3. **Obtención del sistema discreto.** Una vez obtenidas las matrices de rigidez de cada uno de los elementos y el vector de fuerzas externas, es preciso proceder al procedimiento de ensamblaje:

$$[\mathbf{K}] = \mathbf{A}_{e=1}^{nel} [\mathbf{k}^{(e)}] \quad ; \quad \{\mathbf{F}_{ext}\} = \{\mathbf{F}_c\} + \mathbf{A}_{e=1}^{nel} [\mathbf{f}_{ext}^{(e)}], \quad (5.83)$$

donde  $[\mathbf{K}]$  es la matriz de rigidez global del sistema,  $\{\mathbf{F}_{ext}\}$  es el vector de fuerzas externas global,  $\{\mathbf{F}_c\}$  es el vector de fuerzas externas aplicadas directamente en los nodos (véase la Figura 5.8).

Nótese que el símbolo  $\mathbf{A}$  representa el operador de ensamblaje. Siendo éste el mismo que el mostrado en la Sección 4.3, página 190. De esta forma es posible establecer una relación entre fuerzas externas nodales del sistema y los desplazamientos nodales de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{F}_{ext}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\}. \quad (5.84)$$

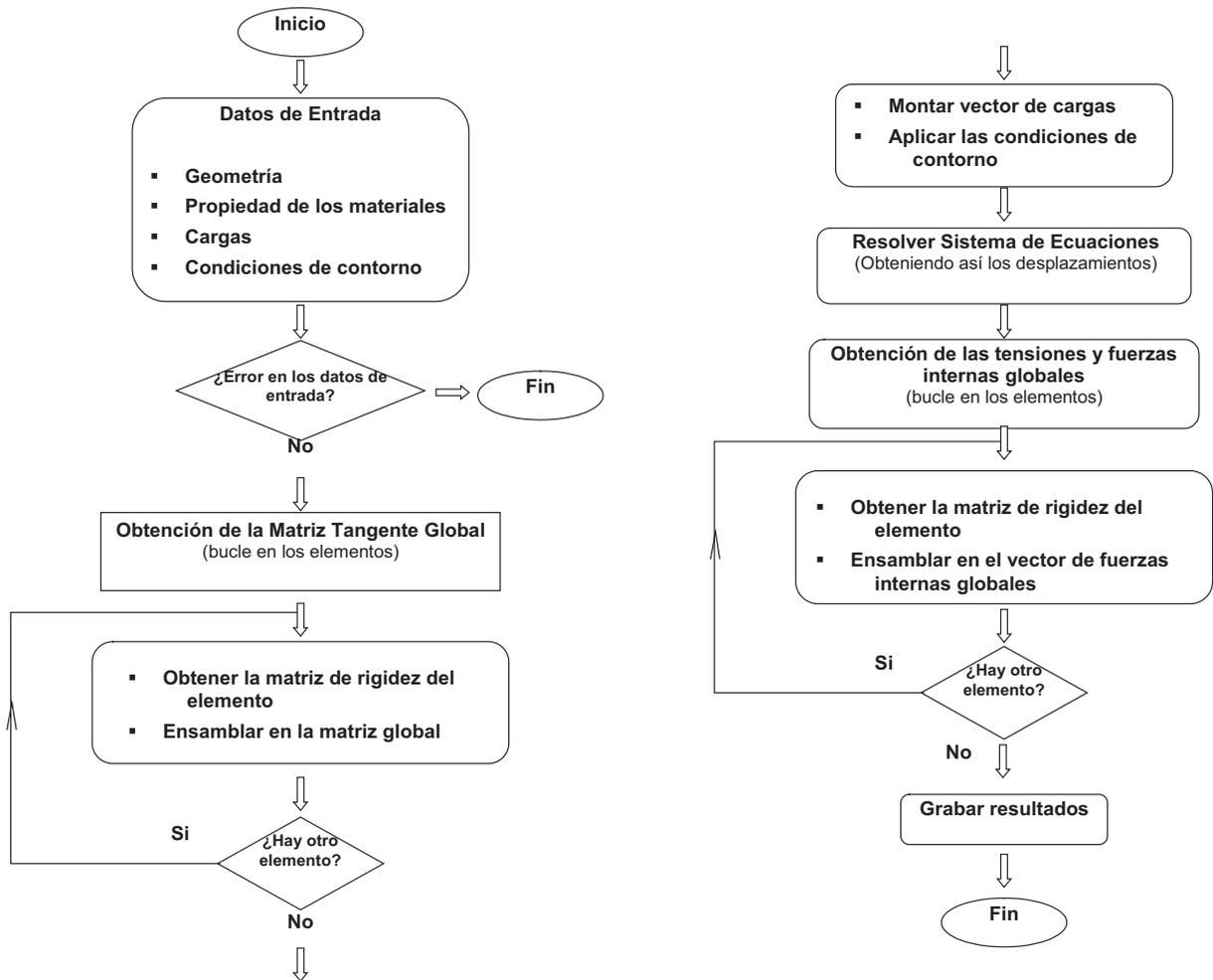


Figura 5.7: Diagrama de flujo del programa de elementos finitos (MEF) para resolver problemas de elasticidad bidimensional.

4. **Introducción de las condiciones de contorno.** Análogamente a lo que sucedía en los sistemas unidimensionales en el espacio bidimensional (Sección 4.2.7), la matriz de rigidez  $[K]$  efectivamente contiene la información del comportamiento deformacional elástico del sistema en equilibrio, pero si se trata de resolver el sistema (5.84) con los métodos tradicionales (Gauss, LU, Cholesky) aplicables sólo a sistemas compatibles determinados, no se podría resolver ya que se trata de un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones. Así pues, es preciso introducir las condiciones de contorno que garanticen el equilibrio e impidan el movimiento de sólido rígido del cuerpo, de esta forma el sistema (5.84) se transforma en un sistema compatible determinado con una única solución que se puede resolver mediante cualquiera de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales disponibles.

Afortunadamente, el procedimiento para modificar el sistema (5.84) de forma que se introduzca la información de las condiciones de contorno para elasticidad bidimensional es el mismo que en el caso de estructuras de barras en el espacio bidimensional (véase la Sección 4.2.7).

5. **Resolución del sistema.** Una vez modificado el sistema discreto se procede a su resolu-

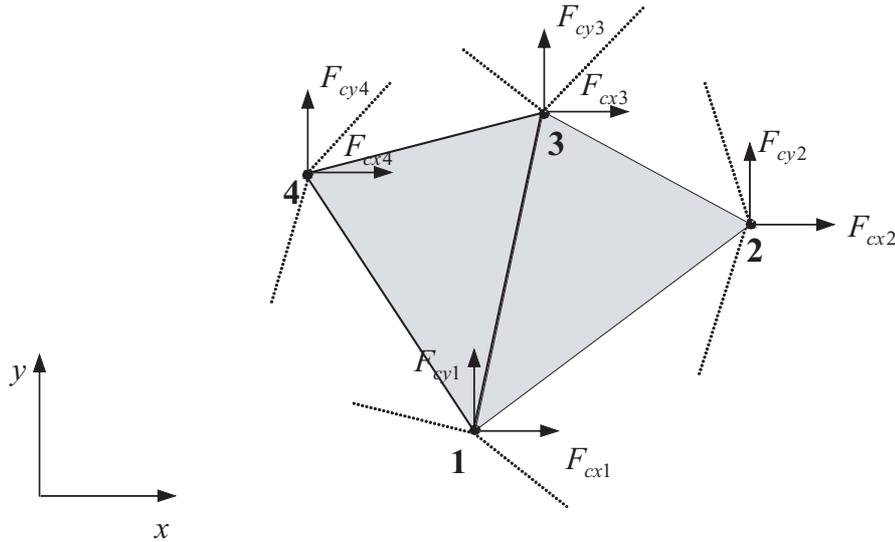


Figura 5.8: Representación gráfica de las fuerzas concentradas aplicadas directamente en los nodos de la discretización.

ción, con lo cual se obtienen los desplazamientos nodales solución:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{F}_{ext}\}. \quad (5.85)$$

6. **Cálculo de las tensiones y fuerzas internas globales.** Una vez obtenidos los desplazamientos nodales globales solución, se pueden calcular las tensiones en cada uno de los elementos en función de sus desplazamientos nodales mediante la relación:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(x, y)\} = [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} \quad (5.86)$$

Empleando la relación fuerzas nodales-desplazamientos nodales dada por la expresión (5.36), se pueden calcular las fuerzas internas nodales en cada uno de los elementos de la discretización de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}_{int}^{(e)}\} &= \left[ \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right] \{\mathbf{u}^{(e)}\} \\ &= \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} dV \\ &= \int_V [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}(x, y)\} dV. \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$(5.88)$$

para el cálculo de las fuerzas internas globales del sistema ( $\{\mathbf{F}_{int}\}$ ) basta con ensamblar las fuerzas internas de cada uno de los elementos:

$$\{\mathbf{F}_{int}\} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} \{\mathbf{f}_{int}^{(e)}\}. \quad (5.89)$$

Nodos	$x_i$	$y_i$
1	$\sqrt{3}$	1
2	$\sqrt{3}/2$	1
3	$\sqrt{3}/2$	1/2
4	0	0
5	0	1

Tabla 5.1: Coordenadas globales de los nodos del Ejemplo Computacional 5.1.

Elemento	Nodos Globales		
	Local i	Local j	Local k
1	1	2	3
2	5	3	2
3	5	4	3

Tabla 5.2: Conectividades de los elementos de la discretización del Ejemplo Computacional 5.1

7. **Cálculo del residuo.** Por último, se calcula el residuo o diferencia entre los vectores fuerzas externas globales y las fuerzas internas globales:

$$\{\Delta \mathbf{R}\} = \{\mathbf{F}_{ext}\} - \{\mathbf{F}_{int}\}. \quad (5.90)$$

**Comentario 5.5** *Nótese que para problemas elásticos, como es nuestro caso, el residuo es cero  $\{\Delta \mathbf{R}\} = \{\mathbf{0}\}$ .* ■

**Ejemplo ilustrativo 5.1 (Elasticidad bidimensional empleando elementos triangulares CST).** Considérese la viga de espesor constante e igual a  $t = 1,0$  mostrada en la Figura 5.9, que está constituida por un material elástico de propiedades  $E = 1,0$  y  $\nu = 0,3$ . La información de las conectividades de los elementos, así como las coordenadas de los nodos se muestran en las Tablas 5.1 y 5.2, respectivamente. Se pide:

1. Obtener la matriz de rigidez y el vector de fuerzas globales suponiendo que los elementos de la discretización son CST.
2. Calcular los desplazamientos nodales solución.
3. Obtener las tensiones, deformaciones, y fuerzas internas tanto en los elementos como en la viga. ¿Es el residuo nulo?

**Solución:**

El procedimiento de resolución teniendo en cuenta que se trata de un estado de tensión plana, consta de las siguientes etapas:

1. **Cálculo de las matrices de rigidez de cada elemento.** Para el cálculo de la matriz de rigidez de cada elemento, se utiliza la expresión (5.49), de esta forma para el **elemento 1**, las coordenadas de los nodos son:

Numeración local	$x$	$y$
1	$x_1 = \sqrt{3}$	$y_1 = 1$
2	$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$y_2 = 1$
3	$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$y_3 = \frac{1}{2}$

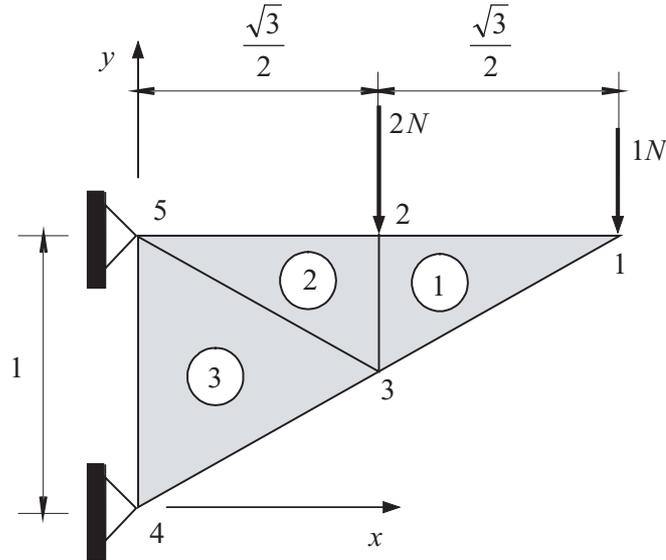


Figura 5.9: Discretización de una viga en elementos triangulares.

Por tanto los parámetros  $b_i, c_i; i = 1, 2, 3$  valen:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= (y_2 - y_3) = \frac{1}{2}; & b_2 &= (y_3 - y_1) = -\frac{1}{2}; & b_3 &= (y_1 - y_2) = 0; \\
 c_1 &= (x_3 - x_2) = 0; & c_2 &= (x_1 - x_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}; & c_3 &= (x_2 - x_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2},
 \end{aligned}$$

mientras que el área del elemento es  $A = 0,2165$ .

Los parámetros  $D_1, D_2$  y  $D_3$  de la viga, caso de tensión plana, se obtienen de (5.47), con lo que aplicando la fórmula (5.49) con todos estos valores se obtiene la matriz de rigidez del elemento 1:

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0,31723 & 0 & -0,31723 & 0,16484 & 0 & -0,16484 \\ & 0,11103 & 0,19231 & -0,11103 & -0,19231 & 0 \\ & & 0,65031 & -0,35714 & -0,33309 & 0,16484 \\ & & & 1,06271 & 0,19231 & -0,95168 \\ & Sim. & & & 0,33309 & 0 \\ & & & & & 0,95168 \end{bmatrix}.$$

La contribución de cada elemento de la matriz de rigidez 1 en la matriz de rigidez global, dada por la información de la conectividad (véase la Tabla 5.2), es en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ & & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ & & & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ Sim. & & & & (5,5) & (5,6) \\ & & & & & (6,6) \end{bmatrix}, \tag{5.91}$$

donde cada elemento indica la posición  $(i, j)$  de la matriz de rigidez global en la que se suma cada término de la matriz de rigidez del elemento.

Para el **elemento 2**, las coordenadas de los nodos son:

Numeración local	$x$	$y$
1	$x_5 = 0$	$y_5 = 1$
2	$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$y_3 = \frac{1}{2}$
3	$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$y_2 = 1$

Por tanto los parámetros  $b_i, c_i$ ;  $i = 1, 2, 3$  valen:

$$b_1 = (y_2 - y_3) = -\frac{1}{2}; \quad b_2 = (y_3 - y_1) = 0; \quad b_3 = (y_1 - y_2) = 1;$$

$$c_1 = (x_3 - x_2) = 0; \quad c_2 = (x_1 - x_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c_3 = (x_2 - x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

mientras que su área es  $A = 0,2165$ .

Aplicando la fórmula (5.49) con todos estos valores se obtiene la matriz de rigidez del elemento 2:

$$[\mathbf{k}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0,31723 & 0 & 0 & 0,16484 & -0,31723 & -0,16484 \\ & 0,11103 & 0,19231 & 0 & -0,19231 & -0,11103 \\ & & 0,33309 & 0 & -0,33309 & -0,19231 \\ & & & 0,95168 & -0,16484 & -0,95168 \\ & Sim. & & & 0,65031 & 0,35714 \\ & & & & & 1,06271 \end{bmatrix}.$$

La contribución de cada elemento de la matriz de rigidez 2 en la matriz de rigidez global, dada por la información de la conectividad (véase la Tabla 5.2), es en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (9,9) & (9,10) & (9,5) & (9,6) & (9,3) & (9,4) \\ & (10,10) & (10,5) & (10,6) & (10,3) & (10,4) \\ & & (5,5) & (5,6) & (5,3) & (5,4) \\ & & & (6,6) & (6,3) & (6,4) \\ & Sim. & & & (3,3) & (3,4) \\ & & & & & (4,4) \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

Por último, para el **elemento 3**, las coordenadas de sus nodos son:

Numeración local	$x$	$y$
1	$x_5 = 0$	$y_5 = 1$
2	$x_4 = 0$	$y_4 = 0$
3	$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$y_3 = \frac{1}{2}$

Los parámetros  $b_i, c_i$ ;  $i = 1, 2, 3$  valen:

$$b_1 = (y_2 - y_3) = -\frac{1}{2}; \quad b_2 = (y_3 - y_1) = -\frac{1}{2}; \quad b_3 = (y_1 - y_2) = 1;$$

$$c_1 = (x_3 - x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c_2 = (x_1 - x_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c_3 = (x_2 - x_1) = 0,$$

mientras que el área del elemento 3 es  $A = 0,43301$ .

Aplicando la fórmula (5.49) con todos estos valores se obtiene la matriz de rigidez del elemento 3:

$$[\mathbf{k}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0,32516 & -0,17857 & -0,00793 & -0,01374 & -0,31723 & 0,19231 \\ & 0,53135 & 0,01374 & -0,42032 & 0,16484 & -0,11103 \\ & & 0,32516 & 0,17857 & -0,31723 & -0,19231 \\ & & & 0,53135 & -0,16484 & -0,11103 \\ & Sim. & & & 0,63445 & 0 \\ & & & & & 0,22206 \end{bmatrix}$$

La contribución de cada elemento de la matriz de rigidez 3 en la matriz de rigidez global, dada por la información de la conectividad (véase la Tabla 5.2), es en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (9,9) & (9,10) & (9,7) & (9,8) & (9,5) & (9,6) \\ & (10,10) & (10,7) & (10,8) & (10,5) & (10,6) \\ & & (7,7) & (7,8) & (7,5) & (7,6) \\ & & & (8,8) & (8,5) & (8,6) \\ Sim. & & & & (5,5) & (5,6) \\ & & & & & (6,6) \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

2. Una vez obtenidas las matrices de rigidez de cada uno de los elementos se procede al ensamblaje de la matriz de rigidez global, y del vector de fuerzas nodales. Si se adoptan los símbolos:

- ⊗ - elementos de la matriz de rigidez 1
- Δ - elementos de la matriz de rigidez 2
- ♥ - elementos de la matriz de rigidez 3

y se ubican en la matriz de rigidez global en las posiciones indicadas por las matrices (5.91), (5.92) y (5.93), respectivamente, se obtiene la siguiente matriz:

$$[\mathbf{K}] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{bmatrix} \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & & & & & \\ & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & & & & & \\ & & \otimes \Delta & \otimes \Delta & \otimes \Delta & \otimes \Delta & & & & \Delta & \Delta \\ & & & \otimes \Delta & \otimes \Delta & \otimes \Delta & & & & \Delta & \Delta \\ & & & & \otimes \Delta \heartsuit & \otimes \Delta \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \Delta \heartsuit & \Delta \heartsuit \\ & & & & & \otimes \Delta \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \Delta \heartsuit & \Delta \heartsuit \\ & & & & & & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ & & Sim. & & & & & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ & & & & & & & & \Delta \heartsuit & \Delta \heartsuit \\ & & & & & & & & & \Delta \heartsuit \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

cuyos valores numéricos son:

$$\begin{bmatrix} 0,317226 & 0,000000 & -0,317226 & 0,164835 & 0,000000 & -0,164835 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 \\ 0,000000 & 0,111029 & 0,192308 & -0,111029 & -0,192308 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 \\ -0,317226 & 0,192308 & 1,300624 & 0,000000 & -0,666173 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & -0,317225 & -0,192308 \\ 0,164835 & -0,111029 & 0,000000 & 2,125409 & 0,000000 & -1,903352 & 0,000000 & 0,000000 & -0,164835 & -0,111029 \\ 0,000000 & -0,192308 & -0,666173 & 0,000000 & 1,300624 & 0,000000 & -0,317225 & -0,164835 & -0,317225 & 0,357143 \\ -0,164835 & 0,000000 & 0,000000 & -1,903352 & 0,000000 & 2,125409 & -0,192308 & -0,111029 & 0,357143 & -0,111029 \\ 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & -0,317225 & -0,192308 & 0,325156 & 0,178571 & -0,007931 & 0,013736 \\ 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & 0,000000 & -0,164835 & -0,111029 & 0,178571 & 0,531353 & -0,013736 & -0,420324 \\ 0,000000 & 0,000000 & -0,317225 & -0,164835 & -0,317225 & 0,357143 & -0,007931 & -0,013736 & 0,642381 & -0,178571 \\ 0,000000 & 0,000000 & -0,192308 & -0,111029 & 0,357143 & -0,111029 & 0,013736 & -0,420324 & -0,178571 & 0,642382 \end{bmatrix}$$

Análogamente se procede al ensamblaje del vector de fuerzas globales:

$$\begin{array}{c} \text{Grado de libertad} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}\}.$$

De esta forma ya se está en disposición de plantear el sistema discreto:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\}. \quad (5.94)$$

3. Previo paso a la resolución del sistema anterior, que tiene infinitas soluciones, es necesario introducir la información de las condiciones de contorno. En este caso los desplazamientos de los nodos 3 y 4 son nulos:

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si se eliminan las filas y columnas asociadas a los grados de libertad 7, 8, 9 y 10, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,317226 & 0,000000 & -0,317226 & 0,164835 & 0,000000 & -0,164835 \\ 0,000000 & 0,111029 & 0,192308 & -0,111029 & -0,192308 & 0,000000 \\ -0,317226 & 0,192308 & 1,300624 & 0,000000 & -0,666173 & 0,000000 \\ 0,164835 & -0,111029 & 0,000000 & 2,125409 & 0,000000 & -1,903352 \\ 0,000000 & -0,192308 & -0,666173 & 0,000000 & 1,300624 & 0,000000 \\ -0,164835 & 0,000000 & 0,000000 & -1,903352 & 0,000000 & 2,125409 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

cuya resolución permite obtener los desplazamientos nodales:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,712211 \\ -40,82468 \\ 6,541724 \\ -15,83581 \\ -2,68562 \\ -13,58321 \end{bmatrix}. \quad (5.95)$$

4. Una vez obtenidos los desplazamientos nodales globales solución, se pueden calcular las tensiones en cada uno de los elementos en función de los mismos mediante la relación (5.32) o (5.86). Nótese que en el elemento CST la deformación es constante en todo su dominio, por tanto la tensión también será constante. Si consideramos el **elemento 1** se tiene que:

$$[\mathbf{D}][\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1,268903 & 0,000000 & -1,268903 & 0,659341 & 0,000000 & -0,659341 \\ 0,380671 & 0,000000 & -0,380671 & 2,197802 & 0,000000 & -2,197802 \\ 0,000000 & 0,444116 & 0,769231 & -0,444116 & -0,769231 & 0,000000 \end{bmatrix},$$

además los nodos del elemento 1 son los nodos globales 1, 2 y 3, por tanto su vector de desplazamientos coincide con (5.95), así el producto matricial  $[\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{u}^{(e)}\}$  nos permite calcular las tensiones:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(1)} \\ \sigma_y^{(1)} \\ \tau_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0000 \\ -4,5052 \\ -4,0000 \end{Bmatrix}.$$

Análogamente, se pueden calcular las tensiones en los elementos 2 y 3, respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,8156 \\ -2,4605 \\ 0,0650 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(3)} \\ \sigma_y^{(3)} \\ \tau_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,4078 \\ -1,0223 \\ -6,0325 \end{Bmatrix}.$$

5. El siguiente paso es el empleo de la relación fuerzas-desplazamientos nodales dada por la expresión (5.36) para calcular las fuerzas internas nodales en cada uno de los elementos:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}^{(e)}\} &= \left[ \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right] \{\mathbf{u}^{(e)}\} \\ &= \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} dV \\ &= \int_V [\mathbf{B}]^T [\boldsymbol{\sigma}] dV \\ &= tA [\mathbf{B}]^T [\boldsymbol{\sigma}], \end{aligned}$$

que particularizando para cada elemento permite obtener:

$$\begin{aligned} f_{x_1}^{(1)} &= 0,000000; & f_{x_1}^{(2)} &= -1,703893; & f_{x_1}^{(3)} &= -1,760208; \\ f_{y_1}^{(1)} &= -1,000000; & f_{y_1}^{(2)} &= -0,016257; & f_{y_1}^{(3)} &= 1,065444; \\ f_{x_2}^{(1)} &= -1,732051; & f_{x_2}^{(2)} &= -0,028157; & f_{x_2}^{(3)} &= 3,464102; \\ f_{y_2}^{(1)} &= -0,950813; & f_{y_2}^{(2)} &= 1,065444; & f_{y_2}^{(3)} &= 1,950813; \\ f_{x_3}^{(1)} &= 1,732051; & f_{x_3}^{(2)} &= 1,732051; & f_{x_3}^{(3)} &= 1,703893; \\ f_{y_3}^{(1)} &= 1,950813; & f_{y_3}^{(2)} &= -1,049187; & f_{y_3}^{(3)} &= -3,016257. \end{aligned}$$

En la Figura 5.10 se muestra una interpretación gráfica de qué significa cada término.

Si sumamos la contribución en cada nodo de las fuerzas que actúan en cada elemento (véase la Figura 5.10) se obtienen los siguientes valores, para el nodo 1 sólo contribuye el elemento 1:

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= f_{x_1}^{(1)} = -3,1 \times 10^{-8} = 0 \\ F_{y_1} &= f_{y_1}^{(1)} = -0,9999998, \end{aligned}$$

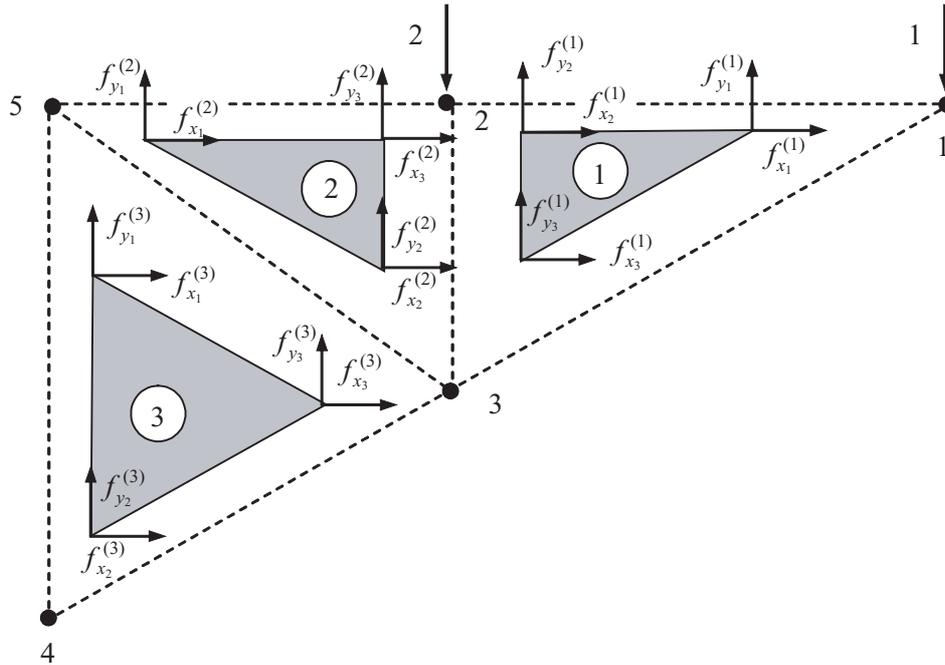


Figura 5.10: Fuerzas nodales internas de cada elemento.

para el elemento 2 contribuyen los elementos 1 y 2:

$$\begin{aligned} F_{x_2} &= f_{x_2}^{(1)} + f_{x_3}^{(2)} = 0 \\ F_{y_2} &= f_{y_2}^{(1)} + f_{y_3}^{(2)} = -2,000, \end{aligned}$$

mientras que en el nodo 3 contribuyen los elementos 1, 2 y 3:

$$\begin{aligned} F_{x_3} &= f_{x_3}^{(1)} + f_{x_2}^{(2)} + f_{x_3}^{(3)} = 0 \\ F_{y_3} &= f_{y_3}^{(1)} + f_{y_2}^{(2)} + f_{y_3}^{(3)} = 0, \end{aligned}$$

donde es lógico que la fuerza resultante sea cero en los nodos donde no haya fuerza concentrada ya que el cuerpo está en equilibrio y no hay ninguna carga aplicada en este nodo.

En el nodo 4, uno de los apoyos, sólo contribuye el elemento 3:

$$\begin{aligned} F_{x_4} &= f_{x_2}^{(3)} = 3,464103 \\ F_{y_4} &= f_{y_2}^{(3)} = 1,950814, \end{aligned}$$

y en el nodo 5, el segundo apoyo, contribuyen los elementos 2 y 3:

$$\begin{aligned} F_{x_5} &= f_{x_1}^{(2)} + f_{x_1}^{(3)} = -3,464103 \\ F_{y_5} &= f_{y_1}^{(2)} + f_{y_1}^{(3)} = 1,04919. \end{aligned}$$

Nótese que los valores  $F_{x_4}$ ,  $F_{y_4}$ ,  $F_{x_5}$  y  $F_{y_5}$  son las reacciones en los apoyos que aseguran el equilibrio de la viga.

■

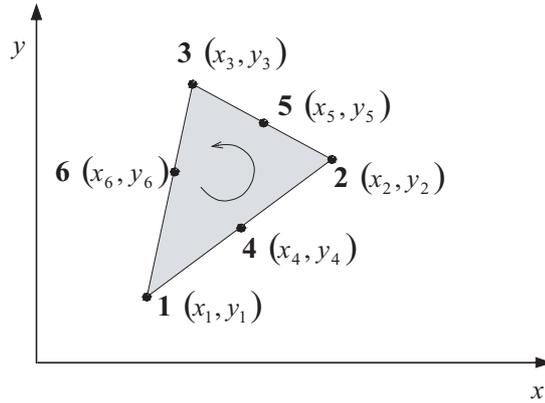


Figura 5.11: Elemento finito triangular de 6 nodos (LST).

### 5.3. Elemento Finito Triangular de 6 Nodos (LST)

El elemento finito LST (*Linear Strain Triangular*) presenta variación cuadrática en el campo de desplazamientos y por tanto, presenta una variación lineal en el campo de deformaciones. Está constituido por 6 nodos tal y como se muestra en la Figura 5.11.

Los vectores de desplazamientos nodales y de fuerzas nodales (Figura 5.12) vienen representados, respectivamente, por:

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ P_{y4} \\ P_{x5} \\ P_{y5} \\ P_{x6} \\ P_{y6} \end{Bmatrix}. \quad (5.96)$$

La siguiente expresión relaciona el vector de fuerzas nodales y el vector de desplazamientos nodales:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}. \quad (5.97)$$

La matriz de rigidez, para un elemento de espesor constante, podrá ser obtenida directamente utilizando la expresión:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = t \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dA. \quad (5.98)$$

Para obtener la matriz de rigidez del elemento finito LST, donde la matriz constitutiva ( $[\mathbf{D}]$ ) es la misma dada por (5.46), ya que el problema elástico es el mismo que el planteado para el

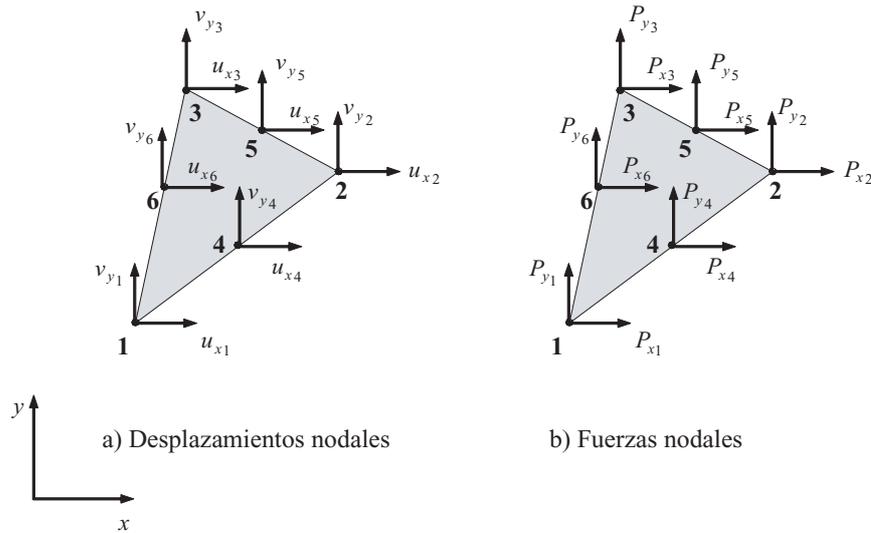


Figura 5.12: Desplazamientos y fuerzas nodales del elemento finito LST.

elemento finito CST. La diferencia radica en la matriz  $[\mathbf{B}]$  que en este caso se define como:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [\mathbf{N}],$$

donde la matriz  $[\mathbf{N}]$  contiene las funciones de forma del elemento finito LST:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix}. \quad (5.99)$$

Nótese que las funciones de forma  $N_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, 6$ , son las vistas en el capítulo de funciones de forma (Capítulo 3) para el elemento triangular de 6 nodos en coordenadas de área:

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \quad (5.100)$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_6 = 4L_1L_3.$$

Y por tanto la matriz  $[\mathbf{B}]$  viene dada por:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (5.101)$$

o de forma más compacta:

$$[\mathbf{B}] = [ [\mathbf{B}_1] \mid [\mathbf{B}_2] \mid [\mathbf{B}_3] \mid [\mathbf{B}_4] \mid [\mathbf{B}_5] \mid [\mathbf{B}_6] ]. \quad (5.102)$$



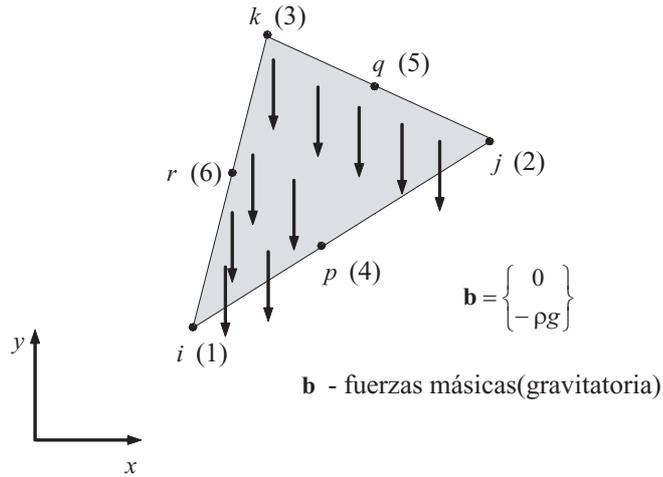


Figura 5.13: Fuerzas másicas elemento LST.

### 5.3.1. Vector de Fuerzas Externas Nodales Equivalente del Elemento LST

La relación fuerza-desplazamiento para el elemento LST se calcula de forma análoga al caso del elemento CST. Sin embargo en este caso, únicamente se trabaja con dos tipos de fuerzas:

1. **Fuerzas másicas.:**

$$\{\mathbf{b}\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho b_x \\ \rho b_y \end{Bmatrix}, \quad (5.122)$$

donde  $p_x$  y  $p_y$  son fuerzas por unidad de volumen,  $b_x$  y  $b_y$  son las fuerzas por unidad de masa (ver Figura 5.13) y  $\rho$  es la densidad del material.

2. **Fuerzas de superficie.** En este grupo se engloban todas aquellas fuerzas que actúan en las caras de los elementos (unidad de fuerza por unidad de superficie). Se representan por la función  $[\mathbf{P}]$  (véase la Figura 5.14). La variación de la fuerza en la cara del elemento se considera lineal, igual que para el elemento CST.

Teniendo en cuenta estas dos acciones, el vector de fuerzas nodales equivalente para el elemento LST,  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$ , viene dado por:

$$\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = \{\mathbf{f}_b^{(e)}\} + \{\mathbf{f}_t^{(e)}\} \quad (5.123)$$

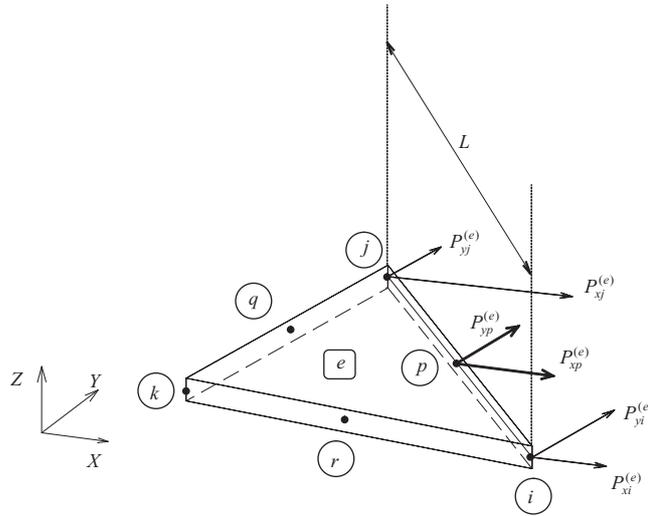


Figura 5.14: Fuerzas de superficie (cara 1) del elemento LST.

Dado que la deducción es análoga a la obtenida para el elemento CST, sólo se expone el resultado final:

$$\left\{ \mathbf{f}_t^{(e)} \right\} = \frac{tL}{3} \begin{bmatrix} 2P_{xi}^{(e)} + P_{xp}^{(e)} \\ 2P_{yi}^{(e)} + P_{yp}^{(e)} \\ P_{xp}^{(e)} + 2P_{xj}^{(e)} \\ P_{yp}^{(e)} + 2P_{yj}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ P_{xi}^{(e)} + 4P_{xp}^{(e)} + P_{xj}^{(e)} \\ P_{yi}^{(e)} + 4P_{yp}^{(e)} + P_{yj}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.124}$$

donde únicamente se presentan las fuerzas de superficies en la cara 1 formada por los nodos  $(1(i) - 4(p) - 2(j))$ . El mismo procedimiento se aplica para las caras 2 (nodos  $2(j) - 5(q) - 3(k)$ ) y 3 (nodos  $3(k) - 6(r) - 1(i)$ ).

### 5.4. Matriz de Rigidez del Elemento Rectangular de 4 Nodos

En esta Sección se procede a la obtención de la matriz de rigidez del elemento rectangular de cuatro nodos. Inicialmente se considera el caso regular, es decir, un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes  $x, y$  (coordenadas globales), tal y como se muestra en la Figura 5.15 (a), esto nos permite obtener la matriz de rigidez exacta integrando analíticamente. Posteriormente se considera el caso de un elemento cuadrangular de cuatro nodos cualquiera (véase la Figura 5.15 (b)), cuya matriz de rigidez se obtiene mediante técnicas de integración numérica.

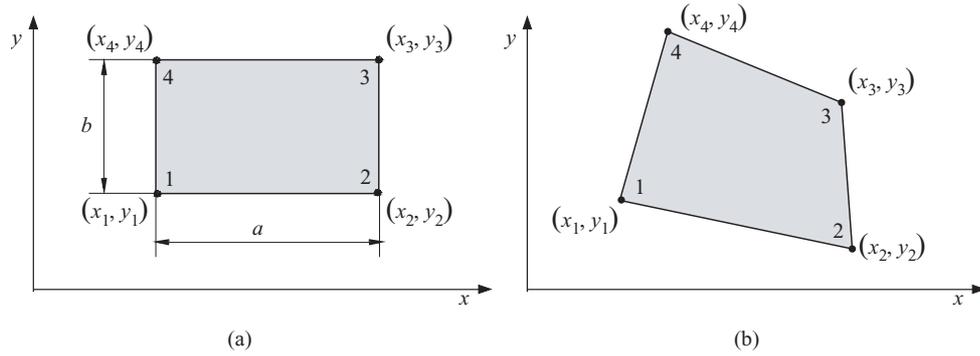


Figura 5.15: Elemento rectangular de 4 nodos: (a) Caso regular, (b) Caso irregular.

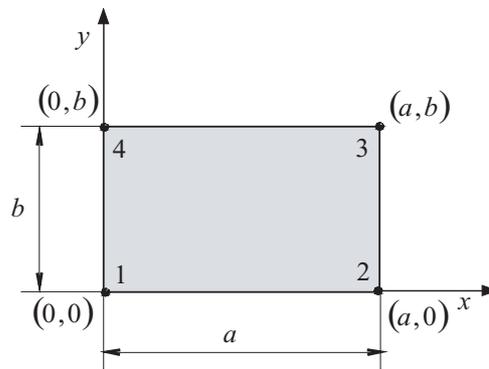


Figura 5.16: Elemento rectangular de 4 nodos.

#### 5.4.1. Matriz de Rigidez del Elemento Rectangular Regular

Partiendo del elemento de cuatro nodos regular de la Figura 5.16 se seguirán los mismos pasos que para la obtención de la matriz de rigidez del elemento CST (véase la Sección 5.1.1, página 195):

- Paso 1: Identificación del problema.** El primer paso, común para cualquier elemento utilizado, es la selección del sistema de coordenadas y la identificación tanto del número de nodos del elemento ( $n_{ne}$ ), como del número de grados de libertad por nodo ( $n_{gn}$ ).

El sistema de coordenadas globales y la numeración de los nodos del elemento se muestran en la Figura 5.16. Nótese que la numeración de los nodos se realiza en sentido anti-horario.

Los desplazamientos para cada punto dentro del elemento están representados por el vector  $\{\mathbf{u}\}$ , que consta de dos componentes asociadas a una traslación horizontal ( $u$ ) y a una vertical ( $v$ ), respectivamente. Por tanto el número de grados de libertad o incógnitas por nodo es igual a dos, tal como se muestra en la Figura 5.17, con lo cual cada nodo del elemento tiene dos parámetros nodales. Análogamente, para el caso de las fuerzas en los nodos, toda fuerza se puede expresar en función de dos componentes también asociadas a los grados de libertad, con lo cual el vector de desplazamientos nodales  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$  y el vector de fuerzas externas nodales  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$  vienen representados, respectivamente, por las siguientes expresiones:

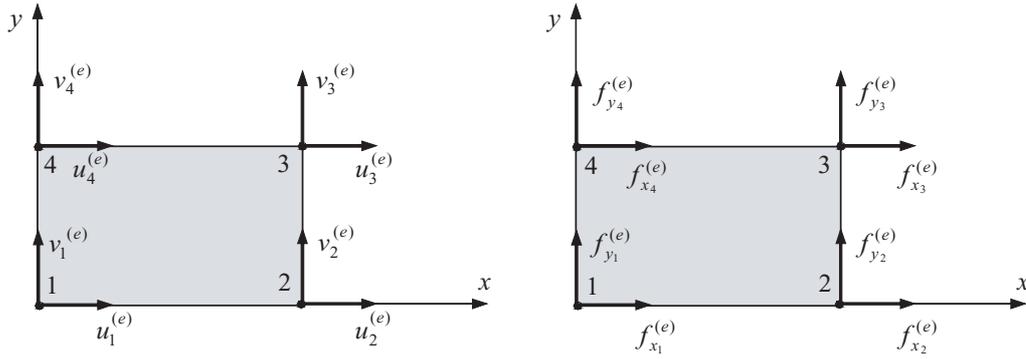


Figura 5.17: Desplazamientos y fuerzas nodales del elemento rectangular de 4 nodos.

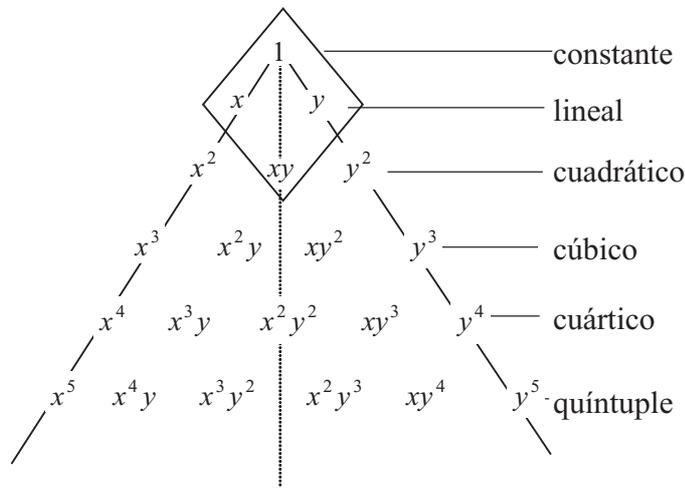


Figura 5.18: Polinomio de Pascal en dos dimensiones y términos empleados para el caso del elemento rectangular de cuatro nodos.

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \\ u_4^{(e)} \\ v_4^{(e)} \end{Bmatrix} ; \quad \{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} f_{x1}^{(e)} \\ f_{y1}^{(e)} \\ f_{x2}^{(e)} \\ f_{y2}^{(e)} \\ f_{x3}^{(e)} \\ f_{y3}^{(e)} \\ f_{x4}^{(e)} \\ f_{y4}^{(e)} \end{Bmatrix} . \tag{5.125}$$

- Paso 2: Selección de la función de desplazamientos  $\{\mathbf{u}(x, y)\}$ .** En lo que se refiere a la selección dentro de cada elemento del tipo de solución que se va a adoptar, en este caso se considera un polinomio con los términos del *Polinomio de Pascal* mostrados en la Figura 5.18, que se puede apreciar que sólo posee el polinomio completo de grado 1.

Las funciones que representan el campo de desplazamientos son lineales y tienen la siguiente

forma:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \quad (5.126)$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) son constantes a determinar.

Las expresiones en (5.126) quedan en forma matricial como:

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [\mathbf{X}] \{\boldsymbol{\alpha}\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}. \quad (5.127)$$

- **Paso 3: Representación de los desplazamientos dentro del elemento.** En esta etapa se pretende representar los desplazamientos dentro del elemento,  $\{\mathbf{u}(x, y)\}$ , en función de los desplazamientos nodales,  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$ , es decir, que los parámetros  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  de la ecuación (5.127) quedan en función de los desplazamientos nodales.

Partiendo de que la solución adoptada (5.127) es válida para todos los puntos del elemento, a continuación se particulariza la función de los desplazamientos en las coordenadas de los cuatro nodos del elemento. Agrupando las ecuaciones obtenidas de forma matricial se llega a:

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \\ u_4^{(e)} \\ v_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{u}^{(e)}\} = [\mathbf{A}] \{\boldsymbol{\alpha}\} \quad (5.128)$$

y su forma inversa:

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.129)$$

donde la inversa de  $[\mathbf{A}]$  es igual a:

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

donde  $a$  y  $b$  son el ancho y el alto del rectángulo, respectivamente, ver Figura 5.16.

Reemplazando la expresión (5.129) en la ecuación (5.127) se llega a la siguiente expresión:

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = [\mathbf{X}][\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.131)$$

de donde se deduce que:

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{X}][\mathbf{A}]^{-1}, \quad (5.132)$$

y por tanto, los desplazamientos quedan como:

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}. \quad (5.133)$$

Nótese que la matriz  $[\mathbf{N}]$  nos proporciona los desplazamientos en cualquier punto dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales, y contiene las funciones de forma del elemento:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (5.134)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{ab}(ab - bx - ay + xy); & N_2 &= \frac{1}{ab}(bx - xy); \\ N_3 &= \frac{xy}{ab}; & N_4 &= \frac{1}{ab}(ay - xy). \end{aligned} \quad (5.135)$$

En la Figura 5.19 se muestra una representación gráfica de cada una de las funciones de forma. En ella se puede observar cómo las funciones de forma son superficies regladas en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$ , que valen 1 en el nodo  $i$ -ésimo y cero en los demás. Además se cumple que la suma de las mismas es  $\sum_{i=1}^4 N_i = 1$  en todos los puntos del dominio del elemento.

**Comentario 5.6** *Nótese que  $N_1, N_2, N_3$  y  $N_4$  se pueden obtener a partir del producto de las funciones interpoladoras de Lagrange  $l_i^{(n-1)}(x)l_i^{(n-1)}(y)$  de grado  $(n-1) = 1$  en cada dimensión, cuyas expresiones genéricas se dan en (2.80).*

■

- **Paso 4: Establecimiento de la relación deformación-desplazamiento dentro del elemento.** En la teoría de la elasticidad lineal, para problemas tanto de tensión plana como de deformación plana la expresión que permiten relacionar las deformaciones  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\}$  con los desplazamientos es la siguiente:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (5.136)$$

h

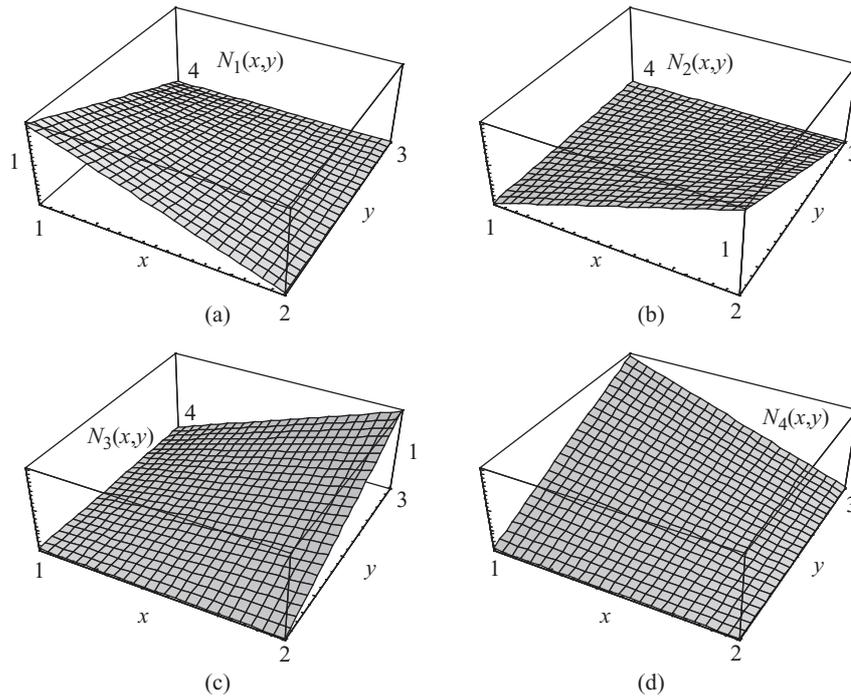


Figura 5.19: Funciones de forma del elemento de cuatro nodos: (a)  $N_1(x, y)$ , (b)  $N_2(x, y)$ , (c)  $N_3(x, y)$ , y (d)  $N_4(x, y)$ .

que de forma matricial queda como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \quad (5.137)$$

Sustituyendo el vector desplazamiento  $\{\mathbf{u}(x, y)\}$  por  $[\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}$  (véase la ecuación (5.133)) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.138)$$

por tanto:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.139)$$

donde la matriz con las derivadas de las funciones de forma se la denota como  $[\mathbf{B}] = [\mathbf{B}_1 ; \mathbf{B}_2 ; \mathbf{B}_3 ; \mathbf{B}_4]$ , explícitamente representada por:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} (y-b) & 0 & (b-y) & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & (x-a) & 0 & -x & 0 & x & 0 & (a-x) \\ (x-a) & (y-b) & -x & (b-y) & x & y & (a-x) & -y \end{bmatrix}, \quad (5.140)$$

que nos permite expresar las deformaciones dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales.

Los pasos 5 y 6 se van a omitir por ser exactamente los mismos que los del elemento CST, éstos nos permitirían llegar a la siguiente expresión de la matriz de rigidez del elemento de cuatro nodos:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV. \quad (5.141)$$

Una de las ventajas del elemento de cuatro nodos regular mostrado en la Figura 5.16, en caso de que tenga un espesor constante ( $t$ ) es que se puede plantear la integración analítica de la siguiente manera:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = t \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dx dy. \quad (5.142)$$

Integrando la expresión anterior y considerando (5.46) y que la matriz  $[\mathbf{B}]$  vienen dada por la expresión (5.140) se llega a:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = t \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} & k_{15}^{(e)} & k_{16}^{(e)} & k_{17}^{(e)} & k_{18}^{(e)} \\ & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} & k_{25}^{(e)} & k_{26}^{(e)} & k_{27}^{(e)} & k_{28}^{(e)} \\ & & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} & k_{35}^{(e)} & k_{36}^{(e)} & k_{37}^{(e)} & k_{38}^{(e)} \\ & & & k_{44}^{(e)} & k_{45}^{(e)} & k_{46}^{(e)} & k_{47}^{(e)} & k_{48}^{(e)} \\ & & & & k_{55}^{(e)} & k_{56}^{(e)} & k_{57}^{(e)} & k_{58}^{(e)} \\ & & & & & k_{66}^{(e)} & k_{67}^{(e)} & k_{68}^{(e)} \\ & & & & & & k_{77}^{(e)} & k_{78}^{(e)} \\ & & & & & & & k_{88}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (5.143)$$

donde los términos de la matriz de rigidez son:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{bD_1}{3a} + \frac{aD_3}{3b}; & k_{12} &= \frac{D_2+D_3}{4}; & k_{13} &= -\frac{bD_1}{3a} + \frac{aD_3}{6b}; \\ k_{14} &= \frac{D_2-D_3}{4}; & k_{15} &= -\frac{bD_1}{6a} - \frac{aD_3}{6b}; & k_{16} &= -k_{12}; \\ k_{17} &= \frac{bD_1}{6a} - \frac{aD_3}{3b}; & k_{18} &= -k_{14}; & k_{22} &= \frac{aD_1}{3b} + \frac{bD_3}{3a}; \\ k_{23} &= -k_{14}; & k_{24} &= \frac{aD_1}{6b} - \frac{bD_3}{3a}; & k_{25} &= -k_{12}; \\ k_{26} &= -\frac{aD_1}{6b} - \frac{bD_3}{6a}; & k_{27} &= -k_{14}; & k_{28} &= -\frac{aD_1}{3b} + \frac{bD_3}{6a}; \\ k_{33} &= k_{11}; & k_{34} &= -k_{12}; & k_{35} &= k_{17}; \\ k_{36} &= k_{14}; & k_{37} &= k_{15}; & k_{38} &= k_{12}; \\ k_{44} &= k_{22}; & k_{45} &= -k_{14}; & k_{46} &= k_{28}; \\ k_{47} &= k_{12}; & k_{48} &= k_{26}; & k_{55} &= k_{11}; \\ k_{56} &= k_{12}; & k_{57} &= k_{13}; & k_{58} &= k_{14}; \\ k_{66} &= k_{22}; & k_{67} &= -k_{14}; & k_{68} &= k_{24}; \\ k_{77} &= k_{11}; & k_{78} &= -k_{12}; & k_{88} &= k_{22}. \end{aligned}$$

**Comentario 5.7** *Nótese que la matriz de rigidez dada por la expresión (5.143) es válida para rectángulos regulares paralelos con los ejes coordenados independientemente de la coordenada de la esquina inferior izquierda  $(x_1, y_1)$  porque la matriz sólo depende del ancho  $a$  y del alto  $b$ .* ■

La rutina de MATLAB para implementar la matriz de rigidez exacta del elemento de cuatro nodos regular se llama **rigidRL2Dexact.m**:

```
function [ke] = rigidRL2Dexact(x,E,nu,e)
%
% Funcion que obtiene la matriz de rigidez de un elemento de cuatro
% nodos de forma exacta (lados paralelos a los ejes principales)
% numeracion de los nodos: 4-----3
%           |           |
%           |           |
%           |           |
%           1-----2
% Salida:
% ke->Matriz de rigidez del elemento de cuatro nodos
%
% Recibe como datos:
% x-> matriz con las coordenadas de los nodos del elemento
% E-> modulo de elasticidad del elemento
% nu-> coeficiente de Poisson del elemento
% e-> espesor asociado al material del elemento
%
if nargin < 3, error('Numero de argumentos del elemento incorrecto'); end
if nargin < 4, e = 1; end
% Obtengo el numero de nodos del elemento y la dimension del problema
[nne,dim] = size(x);
if x(1,1) ~= x(4,1) | x(2,1) ~= x(3,1) | x(1,2) ~= x(2,2) | x(3,2) ~= x(4,2),
    error('La matriz exacta no es valida para este elemento');
end
% Obtengo la matriz constitutiva del elemento, con la subrutina MCONS
Dn = mcons(E,nu);
% Calculo los parametros necesarios (alto, ancho)
a = x(2,1)-x(1,1);
b = x(4,2)-x(1,2);
d1 = Dn(1,1);
d2 = Dn(1,2);
d3 = Dn(3,3);
% Obtengo matricialmente la matriz de rigidez
ke = zeros(nne*dim);
% Valores de cada elemento de la matriz de rigidez (triangular superior)
% Primera fila
ke(1,1) = b*d1/(3*a) + a*d3/(3*b);
ke(1,2) = (d2+d3)/4;
ke(1,3) = -b*d1/(3*a) + a*d3/(6*b);
ke(1,4) = (d2-d3)/4;
ke(1,5) = -b*d1/(6*a) - a*d3/(6*b);
ke(1,6) = -ke(1,2);
ke(1,7) = b*d1/(6*a) - a*d3/(3*b);
ke(1,8) = -ke(1,4);
% Segunda fila
ke(2,2) = a*d1/(3*b) + b*d3/(3*a);
ke(2,3) = -ke(1,4);
ke(2,4) = a*d1/(6*b) - b*d3/(3*a);
```

```

ke(2,5) = -ke(1,2);
ke(2,6) = -a*d1/(6*b) - b*d3/(6*a);
ke(2,7) = ke(1,4);
ke(2,8) = -a*d1/(3*b) + b*d3/(6*a);
% Tercera fila
ke(3,3) = ke(1,1);
ke(3,4) = -ke(1,2);
ke(3,5) = ke(1,7);
ke(3,6) = ke(1,4);
ke(3,7) = ke(1,5);
ke(3,8) = ke(1,2);
% Cuarta fila
ke(4,4) = ke(2,2);
ke(4,5) = -ke(1,4);
ke(4,6) = ke(2,8);
ke(4,7) = ke(1,2);
ke(4,8) = ke(2,6);
% Quinta fila
ke(5,5) = ke(1,1);
ke(5,6) = ke(1,2);
ke(5,7) = ke(1,3);
ke(5,8) = ke(1,4);
% Sexta fila
ke(6,6) = ke(2,2);
ke(6,7) = -ke(1,4);
ke(6,8) = ke(2,4);
% Septima fila
ke(7,7) = ke(1,1);
ke(7,8) = -ke(1,2);
% Octava fila
ke(8,8) = ke(2,2);
% Parte simetrica
ke = e*(triu(ke)+triu(ke,1)');

```

**Ejemplo computacional 5.1 (Matriz de rigidez exacta).** Considérese un elemento rectangular regular de espesor  $e = 1$  de un material cuyos módulos de elasticidad y coeficientes de Poisson son  $E = 1$  y  $\nu = 0,3$ , respectivamente. Si las coordenadas de los nodos en metros son:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 3 \\ 7 & 8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calcular la matriz de rigidez del elemento suponiendo que se va a emplear para resolver un problema de tensión plana.

**Solución:**

Para obtener la matriz de rigidez basta con emplear la rutina **rigidRL2Dexact.m** tecleando los siguientes comandos:

```

x = [2 3;7 3;7 8;2 8];
E = 1;

```

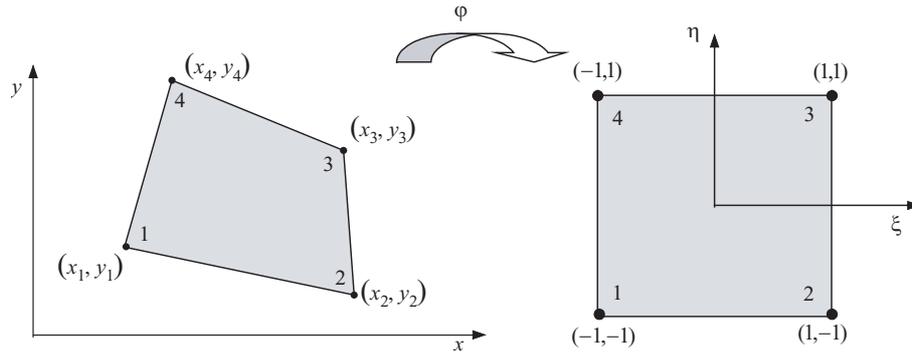


Figura 5.20: Cambio de coordenadas iniciales  $(x, y)$  a coordenadas naturales.

```

nu = 0.3;
global typo;
typo = 'tp';
[ke] = rigidRL2Dexact(x,E,nu,1)

```

Con lo que se obtiene la matriz de rigidez  $[\mathbf{k}^{(e)}]$ :

```

ke =
0.4945    0.1786   -0.3022   -0.0137   -0.2473   -0.1786    0.0549    0.0137
0.1786    0.4945    0.0137    0.0549   -0.1786   -0.2473   -0.0137   -0.3022
-0.3022    0.0137    0.4945   -0.1786    0.0549   -0.0137   -0.2473    0.1786
-0.0137    0.0549   -0.1786    0.4945    0.0137   -0.3022    0.1786   -0.2473
-0.2473   -0.1786    0.0549    0.0137    0.4945    0.1786   -0.3022   -0.0137
-0.1786   -0.2473   -0.0137   -0.3022    0.1786    0.4945    0.0137    0.0549
0.0549   -0.0137   -0.2473    0.1786   -0.3022    0.0137    0.4945   -0.1786
0.0137   -0.3022    0.1786   -0.2473   -0.0137    0.0549   -0.1786    0.4945

```

### 5.4.2. Matriz de Rigidez del Elemento Cuadrangular

En esta sección se procede a la obtención de la matriz de rigidez del elemento de cuatro nodos genérico mostrado en la Figura 5.15 (b). Uno de los condicionantes de este elemento es que si se trata de obtener la expresión analítica de su matriz de rigidez tal y como se vio en la sección anterior, las expresiones y su integración son extremadamente dificultosas. Ese es el motivo de que en este caso se opte por una integración numérica de la expresión (5.141).

Dado que se va a emplear integración mediante el método de Gauss-Legendre visto en la Sección 2.3.12, y para facilitar el proceso de integración se procede a un cambio de coordenadas, tal y como se muestra en la Figura 5.20, de forma que las coordenadas iniciales  $(x, y)$  se transforman en las coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$ . Así, la integral se realiza en el dominio regular de las coordenadas naturales. Para definir la transformación de coordenadas se va a recurrir a las mismas funciones de forma con las que se aproximan los desplazamientos, de forma que la coordenadas  $(x, y)$  se relacionan con las coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$  de la siguiente manera:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i. \quad (5.144)$$

Para la integración se emplean los puntos de Gauss en el dominio dado en coordenadas naturales, pero es necesario conocer las derivadas de las funciones de forma en el correspondiente punto transformado del espacio  $(x, y)$ , para ello se necesita obtener una expresión que ligue las derivadas de las funciones de forma en ambos espacios. Así, aplicando la regla de la cadena se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (5.145)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad (5.146)$$

que expresada en forma matricial queda como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.147)$$

$$= [J^{(e)}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.148)$$

donde  $[J^{(e)}]$  es la matriz Jacobiana de la transformación (5.144), de coordenadas naturales a cartesianas. La relación inversa viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^{(e)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.149)$$

que también puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J^{(e)}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.150)$$

Nótese que a la hora de integrar tras un cambio de coordenadas, para que el resultado sea el mismo se ha de cumplir que:

$$\int_y \int_x dx dy = \int_\eta \int_\xi |J^{(e)}| d\xi d\eta, \quad (5.151)$$

por tanto para proceder a la integración es imprescindible el cálculo del Jacobiano y de su determinante.

Para el cálculo del Jacobiano se parte de la la expresión (5.147) cuyos elementos se obtienen derivando en la expresión (5.144):

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad (5.152)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \quad (5.153)$$

por tanto la expresión del Jacobiano queda como:

$$[J^{(e)}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (5.154)$$

Si particularizamos el Jacobiano para el elemento regular estudiado en la sección anterior se cumple que:

$$[J^{(e)}] = \begin{bmatrix} a/2 & 0 \\ 0 & b/2 \end{bmatrix} ; \quad |J^{(e)}| = ab/4. \quad (5.155)$$

Una vez obtenido tanto el Jacobiano como su determinante se procede a plantear la integración numérica considerando el espesor del elemento constante ( $t$ ):

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}^{(e)}] &= \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \\ &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))] |J^{(e)}| d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (5.156)$$

que utilizando el método de Gauss-Legendre queda como:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = t \sum_{j=1}^n W_j^{(n)} \left( \sum_{i=1}^n W_i^{(n)} ([\mathbf{B}(x_i, y_j)]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}(x_i, y_j)]) |J^{(e)}| \right), \quad (5.157)$$

donde es importante recalcar que los valores de las derivadas de las funciones de forma  $[\mathbf{B}(x_i, y_j)]$  se han de evaluar en el espacio original de las coordenadas cartesianas  $(x_i, y_i)$  transformadas de los puntos de Gauss  $(\xi_i, \eta_j)$ . La función  $[\mathbf{B}(x, y)]$  se obtiene mediante la expresión (5.149) para cada punto de integración.

**Comentario 5.8** *Nótese que la metodología de integración explicada sólo es válida si las funciones de forma para realizar el cambio de variable para pasar de coordenadas cartesianas a naturales, son las mismas que las funciones de forma para aproximar los desplazamientos en el elemento. En estos casos los elementos se conocen con el nombre de **isoparamétricos**.* ■

Para la implementación del cálculo de la matriz de rigidez del elemento de cuatro nodos genérico se emplean dos funciones: **bmatrixRL2D.m** que se encarga del cálculo de la matriz con las derivadas de forma en el espacio cartesiano original en el punto  $(x_i, y_i)$  que se corresponde con el punto  $(\xi_i, \eta_i)$  en coordenadas naturales, y **rigidRL2D.m** que calcula la matriz de rigidez mediante la integración gaussiana a través de la fórmula (5.157).

```
function [bm,detJ] = bmatrixRL2D(x,z)
%
% BMATRIXRL2D obtiene la matriz B, que contiene las derivadas de
% las funciones de forma para el rectangulo de cuatro nodos
% con variacion lineal, y el determinante del jacobiano detJ
% numeracion de los nodos: 4-----3
%           |           |
%           |           |
```

```

%          |          |
%          1-----2
%
% Salida:
%  bm->Matriz con las derivadas de las funciones de forma
%  detJ->determinante del Jacobiano de la transformacion
%
% Recibe como datos:
%  x-> matriz con las coordenadas de los nodos del elemento
%  z-> coordenadas del punto dentro del rectangulo [-1 -1 1 1]
%      coincidentes con los puntos de Gauss
%
if nargin ~= 2,
    error('Numero de argumentos incorrecto');
end
% Obtengo el numero de nodos del elemento y la dimension del problema
[nne,dim] = size(x);
% Derivadas de Ni con respecto a las coordenadas naturales "z1" y "z2":
dN_i = [(z(2)-1) (-z(2)+1) (1+z(2)) (-1-z(2));
        (z(1)-1) (-z(1)-1) (1+z(1)) (1-z(1))]/4;
% Matriz Jacobiana:
J = dN_i*x;
detJ = det(J);
if detJ <= 0,
    error('Jacobiano negativo, numeracion incorrecta');
end
% Derivadas de Ni con respecto a las coordenadas "x" y "y":
dN_xy = J\dN_i;
% Genero la matriz bm
bm = sparse(3,nne*dim);
bm(1,1:dim:nne*dim) = dN_xy(1,:);
bm(2,2:dim:nne*dim) = dN_xy(2,:);
bm(3,1:dim:nne*dim) = dN_xy(2,:);
bm(3,2:dim:nne*dim) = dN_xy(1,:);

function [ke] = rigidRL2D(x,E,nu,e)
%
% Funcion que obtiene la matriz de rigidez de un elemento de cuatro
% nodos integrando mediante Gauss-Legendre
% numeracion de los nodos: 4-----3
%          |          |
%          |          |
%          |          |
%          1-----2
%
% Salida:
%  ke->Matriz de rigidez del elemento de cuatro nodos
%
% Recibe como datos:
%  x-> matriz con las coordenadas de los nodos del elemento
%  E-> modulo de elasticidad del elemento
%  nu-> coeficiente de Poisson del elemento
%  e-> espesor asociado al material del elemento
%
if nargin < 3, error('Numero de argumentos del elemento incorrecto'); end

```

```

if nargin < 4, e = 1; end
% Obtengo el numero de nodos del elemento y la dimension del problema
[nne,dim] = size(x);
% Obtengo la matriz constitutiva del elemento, con la subrutina MCONS
Dn = mcons(E,nu);
% En primer lugar se obtienen los pesos y las abscisas para dos puntos de
% Gauss
z = [sqrt(3)/3];
w = 1;
z=[z ; -z];
w=[w ; w];
n = length(z);
% Reserva de espacio en memoria
ke = (zeros(nne*dim));
for i=1:n,
    for j=1:n,
% Derrivadas de las funciones de forma y jacobiano de la transformacion
        [bm,detJ] = bmatrixRL2D(x,[z(i) z(j)]);
% Suma de la matriz de rigidez
        ke = ke+w(i)*w(j)*bm'*Dn*bm*detJ;
    end
end
% Multiplicacion por el espesor
ke = ke*e;

```

**Comentario 5.9** *En el caso del rectángulo de cuatro nodos la integración mediante el método de cuadratura de Gauss-Legendre es exacta si se emplean dos puntos de Gauss por cada dimensión.* ■

**Ejemplo computacional 5.2 (Matriz de rigidez mediante integración).** Considérese el mismo elemento que el del Ejemplo Computacional 5.1. Obtener la matriz de rigidez empleando la integración Gaussiana y comprobar que el resultado coincide con el exacto.

**Solución:**

Para obtener la matriz de rigidez basta con emplear la rutina **rigidRL2D.m** tecleando los siguientes comandos:

```

x = [2 3;7 3;7 8;2 8];
E = 1;
nu = 0.3;
global typo;
typo = 'tp';
[ke] = rigidRL2D(x,E,nu,1)

```

Con lo que se obtiene la matriz de rigidez  $[\mathbf{k}^{(e)}]$ :

```

ke =

    0.4945    0.1786   -0.3022   -0.0137   -0.2473   -0.1786    0.0549    0.0137
    0.1786    0.4945    0.0137    0.0549   -0.1786   -0.2473   -0.0137   -0.3022
   -0.3022    0.0137    0.4945   -0.1786    0.0549   -0.0137   -0.2473    0.1786
   -0.0137    0.0549   -0.1786    0.4945    0.0137   -0.3022    0.1786   -0.2473

```

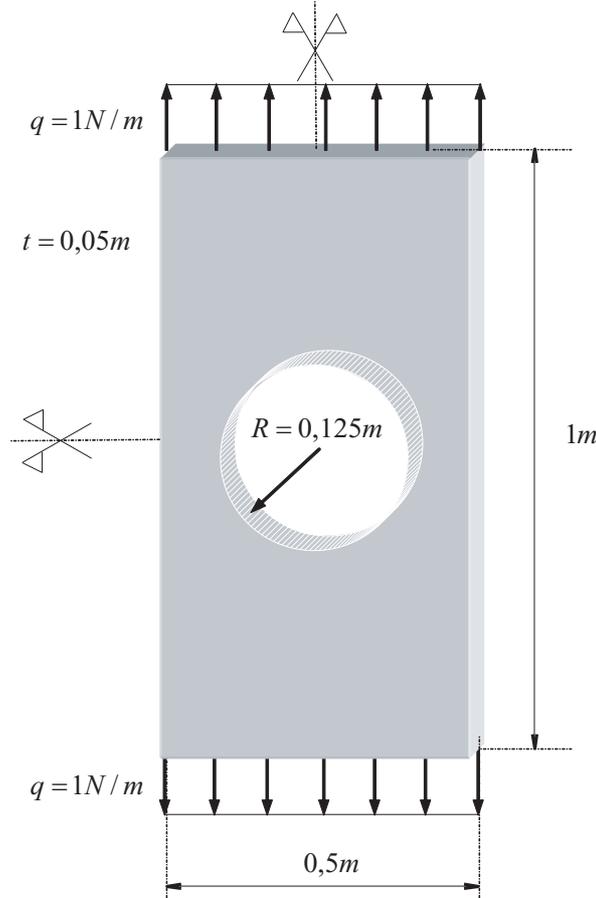


Figura 5.21: Placa rectangular sometida a tracción del Ejercicio 5.1.

-0.2473	-0.1786	0.0549	0.0137	0.4945	0.1786	-0.3022	-0.0137
-0.1786	-0.2473	-0.0137	-0.3022	0.1786	0.4945	0.0137	0.0549
0.0549	-0.0137	-0.2473	0.1786	-0.3022	0.0137	0.4945	-0.1786
0.0137	-0.3022	0.1786	-0.2473	-0.0137	0.0549	-0.1786	0.4945

Que coincide con el resultado exacto.



**Ejercicio 5.1 (Placa agujereada).** Considérese una placa de espesor  $t = 0,05 m$  mostrada en la Figura 5.21 con un agujero en el centro de la misma. El material que constituye la placa tiene como propiedades elásticas  $E = 70 Pa$ ,  $\nu = 0,2$ . Obtener su estado tensional si se somete a la misma a una sobrecarga uniformemente distribuida  $q$  en los extremos.

**Nota:** Considérese la simetría de la placa.



**Ejercicio 5.2 (Sensibilidad de las mallas).** Hacer un estudio de sensibilidad de refinamiento de la malla de elementos finitos considerando distinto número de elementos, para la viga de gran canto mostrada en la Figura 5.22, cuya sección transversal es rectangular con las características siguientes  $a = 13 cm$ ,  $b = 38 cm$ ,  $t = 3 cm$ ,  $q = 2,8 \times 10^5 N/m$ ,  $E = 3 \times 10^{11} N/m^2$ , y  $\nu = 0,3$ .

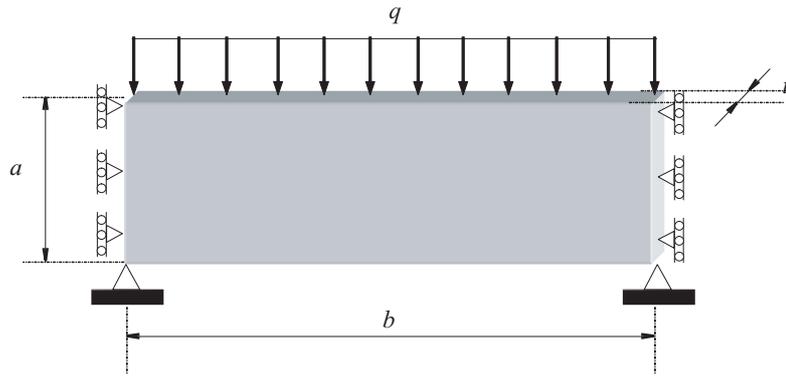


Figura 5.22: Viga de gran canto del Ejercicio 5.2.

**Nota:** Considerar la deflexión de la viga como parámetro para analizar la sensibilidad de las distintas mallas. ■

## 5.5. Elementos Tridimensionales (3D)

Es práctica generalizada en muchos problemas de ingeniería tratar de aprovechar ciertas características de los problemas a tratar asociadas a la geometría, a las características de los materiales, o de las cargas, que permiten simplificar el problema tratado modelándolo como si fuera uni o bidimensional. Pero en determinadas ocasiones estas simplificaciones no son posibles y es necesario un tratamiento tridimensional del problema.

Para poder hacer un estudio en tres dimensiones es imprescindible contar con elementos que permitan discretizar sólidos tridimensionales. A continuación se estudiará el elemento tetraédrico de cuatro nodos.

### 5.5.1. Elemento Tetraédrico de 4 Nodos

El procedimiento de obtención de la matriz de rigidez del elemento tetraédrico de cuatro nodos es totalmente análogo al procedimiento mostrado en la Sección 5.1. El objetivo final es llegar a una expresión como la (5.1) que relaciona los desplazamientos nodales del elemento  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$  con las fuerzas equivalentes en los nodos  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$ . Debido a su similitud los pasos se van a describir de forma sucinta.

Los pasos para la obtención de la matriz de rigidez  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  del elemento CST para resolver problemas de elasticidad bidimensional son:

- **Paso 1: Identificación del problema.** En este caso el número de nodos por elemento ( $n_{n_e}$ ) es igual a 4, y el número de grados de libertad por nodos ( $n_{g_n}$ ) es igual a 3.

El sistema de coordenadas globales y la numeración de los nodos del elemento se muestran en la Figura 5.23.

Los desplazamientos para cada punto dentro del elemento están representados por el vector  $\{\mathbf{u}(x, y, z)\}$  que consta de tres componentes asociadas, respectivamente, a dos traslaciones horizontales ( $u, v$ ) y una vertical ( $w$ ). Los vectores de desplazamientos nodales y de fuerzas

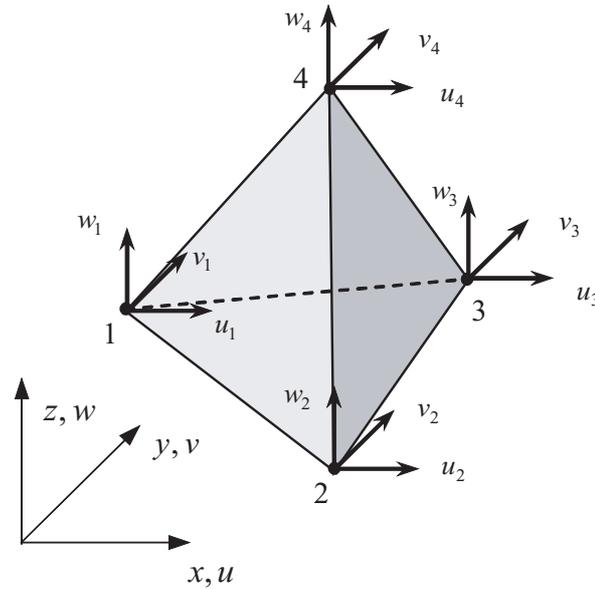


Figura 5.23: Componentes del elemento tetraédrico de 4 nodos.

vienen dados por las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}^{(e)}\} &= \{ u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ u_4 \ v_4 \ w_4 \}^T \\ \{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} &= \{ f_{x_1}^{(e)} \ f_{y_1}^{(e)} \ f_{z_1}^{(e)} \ f_{x_2}^{(e)} \ f_{y_2}^{(e)} \ f_{z_2}^{(e)} \ f_{x_3}^{(e)} \ f_{y_3}^{(e)} \ f_{z_3}^{(e)} \ f_{x_4}^{(e)} \ f_{y_4}^{(e)} \ f_{z_4}^{(e)} \}^T. \end{aligned}$$

- **Paso 2: Selección de la función de desplazamientos  $\{\mathbf{u}(x, y, z)\}$ .** En el caso de que las funciones que representan el campo de desplazamientos sean lineales tienen la siguiente forma:

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (5.158)$$

$$v(x, y, z) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \quad (5.159)$$

$$w(x, y, z) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \quad (5.160)$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$ ;  $i = 1, \dots, 12$  son constantes a determinar. Nótese que la aproximación posee el polinomio completo de grado 1, tal y como se muestra en el *polinomio de Pascal* mostrado en la Figura 5.24.

Las expresiones (5.158)-(5.160) se pueden expresar matricialmente como:

$$\{\mathbf{u}(x, y, z)\} = [\mathbf{X}] \{\boldsymbol{\alpha}\}, \quad (5.161)$$

expresión análoga a la ecuación (5.11).

- **Paso 3: Representación de los desplazamientos dentro del elemento.** En esta etapa se pretende representar los desplazamientos dentro del elemento,  $\{\mathbf{u}(x, y, z)\}$ , en función de los desplazamientos nodales,  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$ , es decir, que los parámetros  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  de la ecuación (5.161) quedan en función de los desplazamientos nodales.

Partiendo de que la solución adoptada es válida para todos los puntos del elemento, se puede particularizar la función de los desplazamientos en las coordenadas de los cuatro

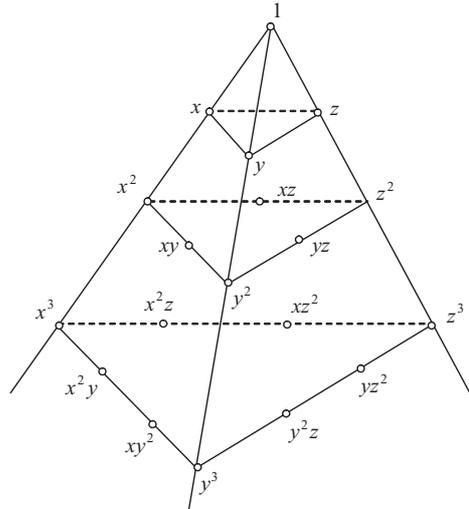


Figura 5.24: Polinomio de Pascal en tres dimensiones.

nodos del elemento obteniendo la expresión:

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = [\mathbf{A}] \{\boldsymbol{\alpha}\}. \tag{5.162}$$

Reemplazando la expresión de  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  dada por la ecuación (5.162) en la ecuación (5.161) se obtiene:

$$\{\mathbf{u}(x, y, z)\} = [\mathbf{X}][\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{u}^{(e)}\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}. \tag{5.163}$$

La matriz  $[\mathbf{N}]$  contiene las funciones de forma que nos proporcionan los desplazamientos en cualquier punto dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales, y cuya expresión es:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}. \tag{5.164}$$

La expresión analítica que nos permite calcular las funciones de forma  $N_i$ ; se obtienen empleando las coordenadas volumétricas, análogas a las coordenadas de área y empleando la ecuación (5.23) de obtención del volumen de un símplice:

$$N_i = \frac{V_i}{V} = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + h_i z); \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{5.165}$$

donde  $V$  es el volumen del tetraedro que se calcula como:

$$V = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \tag{5.166}$$

mientras que los coeficientes  $a_i, b_i, c_i, h_i$  se calculan a través de los volúmenes de los tetraedros generados por un punto genérico dentro del tetraedro inicial  $(x, y, z)$  y los tres nodos

correspondientes a la cara opuesta al punto respecto al cual se desea calcular la función de forma. Para ello basta tener en cuenta que el volumen  $V_i$  se calcula mediante la expresión (5.166) sin más que sustituir las coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  por las coordenadas del punto genérico  $(x, y, z)$ . Así por ejemplo, el volumen que permite calcular la función de forma asociada al nodo 2 se obtiene como:

$$V_2 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

donde se ha sustituido en la segunda fila de la expresión (5.166) el punto  $(x_2, y_2, z_2)$  por el punto genérico  $(x, y, z)$ . Desarrollando el determinante partiendo de la fila con el punto genérico  $(x, y, z)$  se pueden obtener los coeficientes  $a_i, b_i, c_i, h_i$ .

- **Paso 4: Establecimiento de la relación deformación-desplazamiento dentro del elemento.** En la teoría de la elasticidad lineal en tres dimensiones la expresión que permite relacionar las deformaciones  $\{\varepsilon(x, y, z)\}$  con los desplazamientos es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [\mathbf{L}] \{\mathbf{u}\}$$

Sustituyendo el vector desplazamiento  $\{\mathbf{u}(x, y, z)\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}. \quad (5.167)$$

Si en la expresión anterior, a la matriz que contiene las derivadas de las funciones de forma se la denota como  $[\mathbf{B}] = [\mathbf{B}_1 ; \mathbf{B}_2 ; \mathbf{B}_3 ; \mathbf{B}_4]$ , donde cada una de las submatrices queda como:

$$[\mathbf{B}_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & h_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & h_i & c_i \\ h_i & 0 & b_i \end{bmatrix}. \quad (5.168)$$

- **Paso 5: Establecimiento de la relación desplazamiento-tensión dentro del elemento.** Si se considera un material homogéneo, isótropo, elástico y lineal, la relación

tensión-deformación viene dada por la siguiente expresión:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)\} = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)\}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (5.169)$$

donde la *matriz constitutiva elástica* con las propiedades elásticas del material  $[\mathbf{D}]$ , tal y como se muestra en Apéndice A, viene dada por la expresión:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (5.170)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé, que están reacionadas con el módulo de Young  $E$  y con el coeficiente de Poisson  $\nu$  mediante las siguientes expresiones:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.171)$$

- **Paso 6: Establecimiento de la relación fuerzas-desplazamientos nodales.** La relación entre las fuerzas  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$  y los desplazamiento  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$  nodales se obtiene aplicando el *Teorema del Trabajo Virtual*, con lo que se llega a la expresión:

$$\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = \left[ \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.172)$$

que de forma compacta queda como:

$$\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}, \quad (5.173)$$

donde  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  es la matriz de rigidez del elemento, que es igual a:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV, \quad (5.174)$$

donde el elemento  $[\mathbf{k}_{ij}^{(e)}]$  de la matriz de rigidez se obtiene como:

$$[\mathbf{k}_{ij}^{(e)}] = V [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_j]; \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (5.175)$$

que al reemplazar por las expresiones (5.168)-(5.170) queda como:

$$[\mathbf{k}_{ij}^{(e)}] = \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} b_i d_1 b_j + c_i d_2 c_j + h_i d_2 h_j & b_i d_3 c_j + c_i d_2 b_j & b_i d_3 h_j + h_i d_2 b_j \\ c_i d_3 b_j + b_i d_2 c_j & c_i d_1 c_j + b_i d_2 b_j + h_i d_2 h_j & c_i d_3 h_j + h_i d_2 c_j \\ h_i d_3 b_j + b_i d_2 h_j & h_i d_3 c_j + c_i d_2 h_j & h_i d_1 h_j + c_i d_2 c_j + b_i d_2 b_j \end{bmatrix}.$$

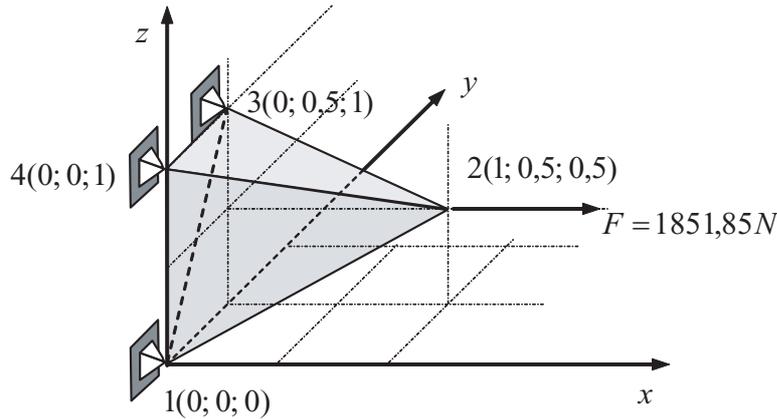


Figura 5.25: Elemento tetraédrico del Ejemplo Ilustrativo 5.2.

**Comentario 5.10** Es importante recalcar que la utilización de la expresión (5.166) para el cálculo del volumen, así como las ecuaciones análogas que permiten el cálculo de los volúmenes  $V_i$ , pueden dar resultado positivo o negativo. Este hecho no altera el resultado correcto para la obtención de las funciones de forma porque si  $V < 0$  entonces  $V_i < 0$  y viceversa, de tal manera que las funciones de forma siempre son positivas, como tienen que ser. Ahora bien, a la hora de calcular la matriz de rigidez usando la expresión (5.175) el volumen resultante de la integración ha de ser positivo. ■

**Ejemplo ilustrativo 5.2 (Matriz de rigidez de un elemento tetraédrico de cuatro nodos).** Considérese el elemento tetraédrico mostrado en la Figura 5.25 con coordenadas nodales son:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y cuyas propiedades elásticas  $E = 20000 \text{ Pa}$  y  $\nu = 0,2$ . Obtener la matriz de rigidez del elemento y los desplazamientos y esfuerzos suponiendo que actúa la siguiente carga puntual en el nodo 2:  $\mathbf{P} = [2; 1851,85; 0; 0] \text{ N}$  y que los nodos en el plano  $y - z$  no se mueven.

**Nota:** El fichero de datos en MATLAB se llama **data3d.m**.

**Solución:**

El procedimiento de resolución consta de las siguientes etapas:

1. **Cálculo de la matriz de rigidez de la estructura (elemento).** El primer paso para el cálculo de la matriz de rigidez es la obtención del volumen del elemento  $V$  y la matriz  $[\mathbf{B}]$  con las derivadas de las funciones de forma mediante las expresiones (5.166)-(5.168), respectivamente. Además, para el cálculo de la matriz  $[\mathbf{B}]$  es necesario obtener los coeficientes  $b_i, c_i, h_i; i = 1, \dots, 4$  que permiten calcular las derivadas de las funciones de forma del nodo  $i$  con respecto a  $x, y$  y  $z$ , respectivamente. El valor del volumen en este caso

concreto es de  $V = -1/12 \approx -0,0833$ , mientras que los valores de estos coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,25; & c_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,00; & h_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,50; \\
 b_2 &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -0,50; & c_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,00; & h_2 &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,00; \\
 b_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,50; & c_3 &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,00; & h_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,00; \\
 b_4 &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -0,25; & c_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,00; & h_4 &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{vmatrix} = -0,50.
 \end{aligned}$$

por tanto la matriz  $[\mathbf{B}]$  es igual a:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & -1,0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,0 & 0 & 0 & -2,0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0 & 1,0 & 0 & 2,0 & -1,0 & 0 & -2,0 & 0,5 & 0 \\ 0 & -1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,0 & 0 & 1,0 & -2,0 \\ -1,0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 & -1,0 & 1,0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

A continuación se necesita la matriz constitutiva, que empleando las expresiones (5.170)-(5.171) queda como:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 22222,22 & 5555,56 & 5555,56 & 0 & 0 & 0 \\ 5555,56 & 22222,222 & 5555,56 & 0 & 0 & 0 \\ 5555,56 & 5555,56 & 22222,22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8333,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8333,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8333,33 \end{bmatrix}.$$

Y por último, la expresión de la matriz de rigidez empleando la ecuación (5.174) queda como:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 1157,4 & 0 & 578,7 & -925,93 & 0 & -694,44 & 925,93 & -462,96 & 694,44 & -1157,4 & 462,96 & -578,7 \\ 0 & 868,06 & 0 & 0 & -347,22 & 0 & -694,44 & 347,22 & -1388,9 & 694,44 & -868,06 & 1388,9 \\ 578,7 & 0 & 2025,5 & -462,96 & 0 & -347,22 & 462,96 & -925,93 & 347,22 & -578,7 & 925,93 & -2025,5 \\ -925,93 & 0 & -462,96 & 1851,9 & 0 & 0 & -1851,9 & 925,93 & 0 & 925,93 & -925,93 & 462,96 \\ 0 & -347,22 & 0 & 0 & 694,44 & 0 & 1388,9 & -694,44 & 0 & -1388,9 & 347,22 & 0 \\ -694,44 & 0 & -347,22 & 0 & 0 & 694,44 & 0 & 0 & -694,44 & 694,44 & 0 & 347,22 \\ 925,93 & -694,44 & 462,96 & -1851,9 & 1388,9 & 0 & 4629,6 & -2314,8 & 0 & -3703,7 & 1620,4 & -462,96 \\ -462,96 & 347,22 & -925,93 & 925,93 & -694,44 & 0 & -2314,8 & 8101,9 & 0 & 1851,9 & -7754,6 & 925,93 \\ 694,44 & -1388,9 & 347,22 & 0 & 0 & -694,44 & 0 & 0 & 3472,2 & -694,44 & 1388,9 & -3125 \\ -1157,4 & 694,44 & -578,7 & 925,93 & -1388,9 & 694,44 & -3703,7 & 1851,9 & -694,44 & 3935,2 & -1157,4 & 578,7 \\ 462,96 & -868,06 & 925,93 & -925,93 & 347,22 & 0 & 1620,4 & -7754,6 & 1388,9 & -1157,4 & 8275,5 & -2314,8 \\ -578,7 & 1388,9 & -2025,5 & 462,96 & 0 & 347,22 & -462,96 & 925,93 & -3125 & 578,7 & -2314,8 & 4803,2 \end{bmatrix}.$$

- Una vez obtenida la matriz de rigidez de la estructura se procede al ensamblaje del vector de fuerzas nodales:

$$\{\mathbf{F}\} = [0 \ 0 \ 0 \ 1851,85 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

De esta forma ya se está en disposición de plantear el sistema discreto:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\}. \quad (5.176)$$

3. Previo paso a la resolución del sistema anterior, que tiene infinitas soluciones, es necesario introducir la información de las condiciones de contorno. En este caso los desplazamientos de los nodos 1, 3 y 4 son nulos:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si se eliminan las filas y columnas asociadas a los grados de libertad 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11 y 12, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1851,85 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1851,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0694,44 & 0 \\ 0 & 0 & 0694,44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

cuya resolución permite obtener los desplazamientos nodales:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.177)$$

4. Una vez obtenidos los desplazamientos nodales globales solución, se pueden calcular las tensiones en cada uno de los elementos en función de los mismos mediante de la relación  $[\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(1)} \\ \sigma_y^{(1)} \\ \sigma_z^{(1)} \\ \tau_{xy}^{(1)} \\ \tau_{yz}^{(1)} \\ \tau_{xz}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,2222 \\ 0,5556 \\ 0,5556 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^4.$$

5. El siguiente paso es el empleo de la relación fuerzas-desplazamientos nodales para calcular las fuerzas internas nodales en cada uno de los elementos dada por la expresión (5.172):

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}^{(e)}\} &= \left[ \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right] \{\mathbf{u}^{(e)}\} \\ &= \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} dV \\ &= \int_V [\mathbf{B}]^T [\boldsymbol{\sigma}] dV \\ &= V [\mathbf{B}]^T [\boldsymbol{\sigma}], \end{aligned}$$

que particularizando para el elemento permite obtener:

$$\{\mathbf{f}^{(1)}\} = 10^3 \times [-0,9259 \ 0 \ -0,4630 \ 1,8519 \ 0 \ 0 \ -1,8519 \ 0,9259 \ 0 \ 0,9259 \ -0,9259 \ 0,4630].$$

Nótese que las componentes 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 son las reacciones en los apoyos que aseguran el equilibrio del elemento. ■

### 5.5.2. Vector de Fuerzas Nodales Equivalentes en el Elemento Tetraédrico

Dado que la relación fuerza-desplazamiento nodal para el elemento tetraédrico viene dada por la ecuación (5.1), en la que interviene el vector de fuerzas  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$ , es preciso definir cómo se obtiene ese vector de fuerzas. En este caso, el vector de fuerzas nodales equivalente considerado,  $\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\}$ , está constituido por las siguientes componentes:

$$\{\mathbf{f}_{ext}^{(e)}\} = \{\mathbf{f}_b^{(e)}\} + \{\mathbf{f}_t^{(e)}\} \quad (5.178)$$

donde  $\{\mathbf{f}_b^{(e)}\}$  y  $\{\mathbf{f}_t^{(e)}\}$  son los vectores de fuerzas equivalentes asociados a fuerzas másicas, y fuerzas superficiales, respectivamente. En los apartados siguientes se obtienen expresiones particulares para estas dos acciones.

Adicionalmente, se podría considerar también el vector de fuerzas debido a deformaciones iniciales  $\{\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^{(e)}\}$ .

#### 5.5.2.1. Fuerzas Nodales Debido a las Fuerzas Másicas

La expresión del vector de fuerzas másicas equivalentes viene dada (véanse las ecuaciones (5.53) y (5.54)) por:

$$\{\mathbf{f}_b^{(e)}\} = \int_V [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\} dV, \quad (5.179)$$

y considerando el tipo de aproximación dado por la ecuación (5.163) se obtiene que:

$$\{\mathbf{f}_{b_i}^{(e)}\} = \frac{V}{4} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}. \quad (5.180)$$

Dado que la fuerza másica que más se utiliza en ingeniería civil es la gravitacional, y según el sistema adoptado en la Figura 5.26, queda como:

$$\{\mathbf{b}_i\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix}, \quad (5.181)$$

donde  $g = 9,81m/s^2$  es la aceleración de la gravedad, la ecuación (5.180) se transforma en:

$$\{\mathbf{f}_b^{(e)}\} = \frac{V}{4} [0 \ 0 \ -\rho g \ 0 \ 0 \ -\rho g \ 0 \ 0 \ -\rho g \ 0 \ 0 \ -\rho g]^T. \quad (5.182)$$

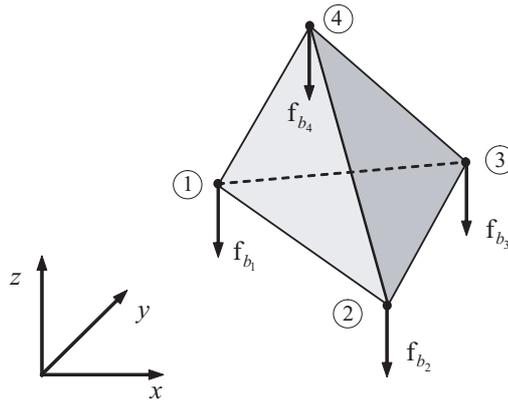


Figura 5.26: Fuerzas másicas nodales.

### 5.5.2.2. Fuerzas Nodales Debido a las Fuerzas de Superficie

Las fuerzas de superficie pueden estar aplicadas en cualquiera de las cuatro caras del elemento. Inicialmente las fuerzas equivalentes se calculan para la cara definida por los nodos  $\widehat{ijl} = \widehat{124}$ , tal y cómo se muestra en la Figura 5.27, el estudio se puede extender para las demás caras sin más que permutar cíclicamente los índices.

Respecto a las fuerzas de superficie, el vector  $\{\mathbf{t}\}$  lo componen tres componentes nodales aplicadas en cada uno de los nodos de la cara, y se supone una variación lineal:

$$\{\mathbf{t}\} = \left\{ t_i^{(x)} \quad t_i^{(y)} \quad t_i^{(z)} \quad t_j^{(x)} \quad t_j^{(y)} \quad t_j^{(z)} \quad t_l^{(x)} \quad t_l^{(y)} \quad t_l^{(z)} \right\}^T. \quad (5.183)$$

Las fuerzas nodales equivalentes debido al vector  $\{\mathbf{t}\}$  vienen dadas por la expresión:

$$\{\mathbf{f}_t^{(e)}\} = \int_A [\bar{\mathbf{N}}]^T \{\mathbf{t}\} dA, \quad (5.184)$$

donde  $A^{(\widehat{124})}$  es el área de la cara donde se aplica la fuerza de superficie. Para simplificar los cálculos se distribuye el cálculo del vector de fuerzas equivalentes en las componentes asociadas a cada eje coordenado. Si se toman las fuerzas de superficie según el eje  $x$ ,  $\mathbf{t}^{(x)}$ , y se representan las funciones de forma  $\bar{\mathbf{N}}$  en función de las coordenadas de área  $L_1$ ,  $L_2$ , y  $L_3$ , se podrá representar una variación lineal entre las fuerzas superficiales aplicadas en la cara del elemento de la siguiente manera:

$$\mathbf{t}^{(x)} = \begin{bmatrix} L_i & L_j & L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i^{(x)} \\ t_j^{(x)} \\ t_l^{(x)} \end{bmatrix}. \quad (5.185)$$

Por tanto, el vector de fuerzas nodales asociadas al eje  $x$ , se calcula como:

$$\left\{ f_{\mathbf{t}}^{(e)} \right\}^x = \begin{Bmatrix} P_{x_i}^{(e)} \\ P_{x_j}^{(e)} \\ P_{x_l}^{(e)} \end{Bmatrix} = \int_A [\bar{\mathbf{N}}]^T \left\{ \mathbf{t}^{(x)} \right\} dA = \quad (5.186)$$

$$= \int_A \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i^{(x)} \\ t_j^{(x)} \\ t_l^{(x)} \end{bmatrix} dA = \quad (5.187)$$

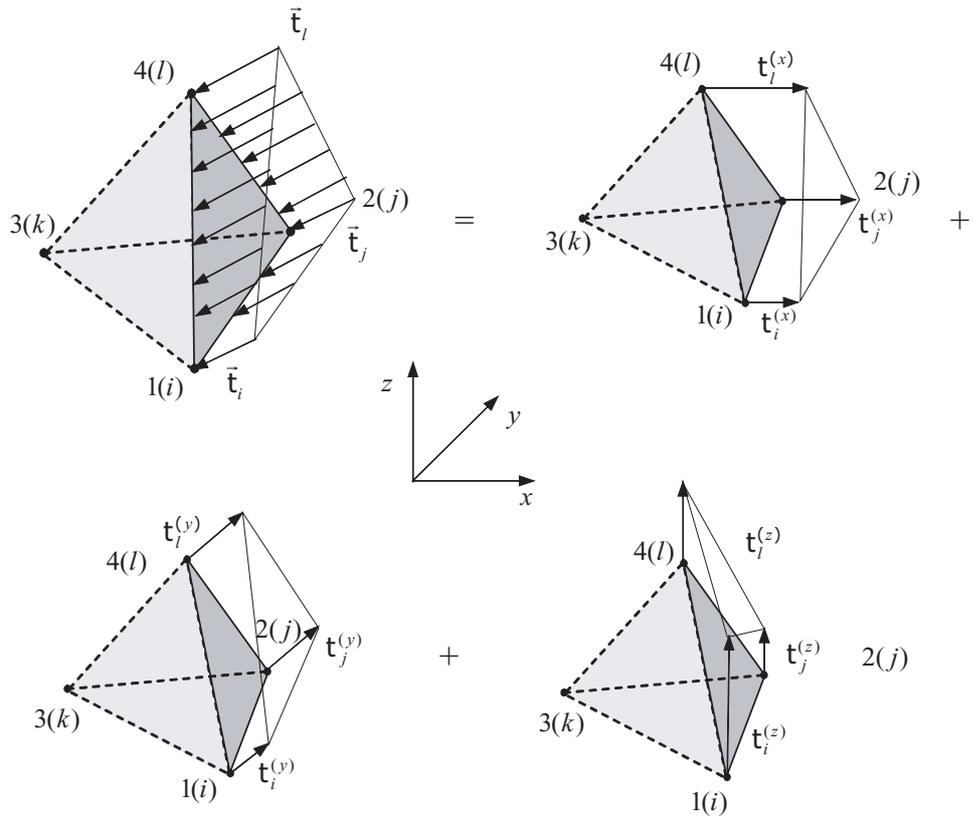


Figura 5.27: Fuerzas de superficie aplicadas en la cara  $\widehat{ijl} = \widehat{124}$ .

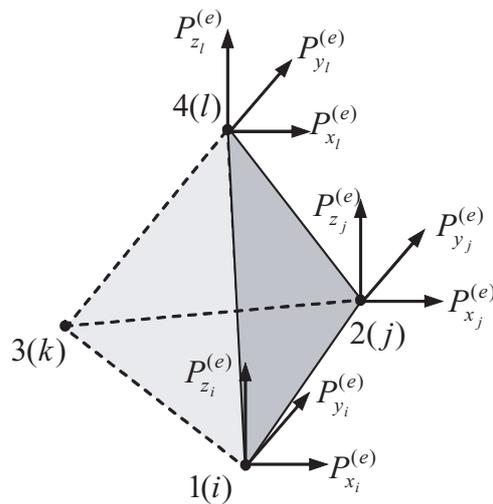


Figura 5.28: Componentes del vector  $\{f_t^{(e)}\}$  que contiene las fuerzas nodales equivalentes debido a las fuerzas de superficie en la cara  $\widehat{ijl} = \widehat{124}$ .

$$= \int_A \begin{bmatrix} L_1 L_1 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2 L_2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3 L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i^{(x)} \\ t_j^{(x)} \\ t_l^{(x)} \end{bmatrix} dA = \quad (5.188)$$

$$= \int_A \begin{bmatrix} L_1^2 t_i^{(x)} + L_1 L_2 t_j^{(x)} + L_1 L_3 t_l^{(x)} \\ L_1 L_2 t_i^{(x)} + L_2^2 t_j^{(x)} + L_2 L_3 t_l^{(x)} \\ L_1 L_3 t_i^{(x)} + L_2 L_3 t_j^{(x)} + L_3^2 t_l^{(x)} \end{bmatrix} dA. \quad (5.189)$$

Se pueden obtener expresiones analíticas de las integrales de las funciones de forma en función de las coordenadas de área sin más que emplear la expresión (3.67), de forma que las cargas equivalentes asociadas al eje  $x$  quedan como:

$$\begin{aligned} P_{x_i}^{(e)} &= \int_A L_1^2 t_i^{(x)} + L_1 L_2 t_j^{(x)} + L_1 L_3 t_l^{(x)} dA = \\ &= \frac{A}{6} t_i^{(x)} + \frac{A}{12} t_j^{(x)} + \frac{A}{12} t_l^{(x)} \end{aligned} \quad (5.190)$$

$$\begin{aligned} P_{x_j}^{(e)} &= \int_A L_1 L_2 t_i^{(x)} + L_2^2 t_j^{(x)} + L_2 L_3 t_l^{(x)} dA = \\ &= \frac{A}{12} t_i^{(x)} + \frac{A}{6} t_j^{(x)} + \frac{A}{12} t_l^{(x)} \end{aligned} \quad (5.191)$$

$$\begin{aligned} P_{x_l}^{(e)} &= \int_A L_1 L_3 t_i^{(x)} + L_2 L_3 t_j^{(x)} + L_3^2 t_l^{(x)} dA = \\ &= \frac{A}{12} t_i^{(x)} + \frac{A}{12} t_j^{(x)} + \frac{A}{6} t_l^{(x)}. \end{aligned} \quad (5.192)$$

Análogamente se procede para las fuerzas equivalentes en la dirección del eje  $y$  y del  $z$ . Por tanto, el vector de fuerzas nodales equivalentes en la cara  $\widehat{ijl} = \widehat{124}$  queda como:

$$\left\{ \mathbf{f}_t^{(e)} \right\} = \begin{Bmatrix} P_{x_i}^{(e)} \\ P_{y_i}^{(e)} \\ P_{z_i}^{(e)} \\ P_{x_j}^{(e)} \\ P_{y_j}^{(e)} \\ P_{z_j}^{(e)} \\ P_{x_k}^{(e)} \\ P_{y_k}^{(e)} \\ P_{z_k}^{(e)} \\ P_{x_l}^{(e)} \\ P_{y_l}^{(e)} \\ P_{z_l}^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{A}{12} \begin{Bmatrix} 2t_i^{(x)} + t_j^{(x)} + t_l^{(x)} \\ 2t_i^{(y)} + t_j^{(y)} + t_l^{(y)} \\ 2t_i^{(z)} + t_j^{(z)} + t_l^{(z)} \\ t_i^{(x)} + 2t_j^{(x)} + t_l^{(x)} \\ t_i^{(y)} + 2t_j^{(y)} + t_l^{(y)} \\ t_i^{(z)} + 2t_j^{(z)} + t_l^{(z)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_i^{(x)} + t_j^{(x)} + 2t_l^{(x)} \\ t_i^{(y)} + t_j^{(y)} + 2t_l^{(y)} \\ t_i^{(z)} + t_j^{(z)} + 2t_l^{(z)} \end{Bmatrix}. \quad (5.193)$$

Si se desea calcular las fuerzas equivalentes  $\left\{ \mathbf{f}_t^{(e)} \right\}$  debido a fuerzas superficiales aplicadas en las caras  $\widehat{ijk} = \widehat{123}$ ,  $\widehat{ikl} = \widehat{134}$  y  $\widehat{jkl} = \widehat{234}$  basta realizar una simple permutación de índices

obteniéndose las siguientes expresiones:

$$\frac{A}{12} \begin{pmatrix} 2t_i^{(x)} + t_j^{(x)} + t_k^{(x)} \\ 2t_i^{(y)} + t_j^{(y)} + t_k^{(y)} \\ 2t_i^{(z)} + t_j^{(z)} + t_k^{(z)} \\ t_i^{(x)} + 2t_j^{(x)} + t_k^{(x)} \\ t_i^{(y)} + 2t_j^{(y)} + t_k^{(y)} \\ t_i^{(z)} + 2t_j^{(z)} + t_k^{(z)} \\ t_i^{(x)} + t_j^{(x)} + 2t_k^{(x)} \\ t_i^{(y)} + t_j^{(y)} + 2t_k^{(y)} \\ t_i^{(z)} + t_j^{(z)} + 2t_k^{(z)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{A}{12} \begin{pmatrix} 2t_i^{(x)} + t_k^{(x)} + t_l^{(x)} \\ 2t_i^{(y)} + t_k^{(y)} + t_l^{(y)} \\ 2t_i^{(z)} + t_k^{(z)} + t_l^{(z)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_i^{(x)} + 2t_k^{(x)} + t_l^{(x)} \\ t_i^{(y)} + 2t_k^{(y)} + t_l^{(y)} \\ t_i^{(z)} + 2t_k^{(z)} + t_l^{(z)} \\ t_i^{(x)} + t_k^{(x)} + 2t_l^{(x)} \\ t_i^{(y)} + t_k^{(y)} + 2t_l^{(y)} \\ t_i^{(z)} + t_k^{(z)} + 2t_l^{(z)} \end{pmatrix}; \frac{A}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2t_j^{(x)} + t_k^{(x)} + t_l^{(x)} \\ 2t_j^{(y)} + t_k^{(y)} + t_l^{(y)} \\ 2t_j^{(z)} + t_k^{(z)} + t_l^{(z)} \\ t_j^{(x)} + 2t_k^{(x)} + t_l^{(x)} \\ t_j^{(y)} + 2t_k^{(y)} + t_l^{(y)} \\ t_j^{(z)} + 2t_k^{(z)} + t_l^{(z)} \\ t_j^{(x)} + t_k^{(x)} + 2t_l^{(x)} \\ t_j^{(y)} + t_k^{(y)} + 2t_l^{(y)} \\ t_j^{(z)} + t_k^{(z)} + 2t_l^{(z)} \end{pmatrix}. \quad (5.194)$$

**Ejemplo ilustrativo 5.3 (Fuerzas nodales de superficie equivalentes).** Considérese el elemento tetraédrico mostrado en la Figura 5.25 en el que se aplica una sobrecarga sobre la cara  $\widehat{234}$  cuyo vector  $\{\mathbf{t}\}$  (5.183) correspondiente es:

$$\{\mathbf{t}\} = \{ 0 \ 0 \ -1000 \ 0 \ 0 \ -1000 \ 0 \ 0 \ -1000 \}^T.$$

Obtener el vector de fuerzas equivalentes  $\{\mathbf{f}_t^{(e)}\}$ .

**Solución:**

Dado que la cara cargada es la  $\widehat{234}$  tanto en numeración local como global, el vector de fuerzas equivalentes se obtiene mediante la última expresión de la ecuación (5.194), y dado que el área es igual a  $A = 0,8660253 \text{ m}^2$  queda como:

$$\{\mathbf{f}_t^{(e)}\} = \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -288,6751 \ 0 \ 0 \ -288,6751 \ 0 \ 0 \ -288,6751 \}.$$

■

### 5.5.2.3. Fuerzas Nodales Debido a la Presión Hidrostática

Un caso particular de fuerzas superficiales son las fuerzas debido a la presión hidrostática, muy empleado en todas las estructuras que están en contacto con agua, como por ejemplo, presas, muros, diques, etc.

En este caso las fuerzas de superficie actúan siempre perpendiculares a la cara del elemento (o según dirección y sentido contrario de la normal definido por la cara del elemento). Una vez conocidas las presiones en cada nodos  $\mathbf{p} = \{p_i, p_j, p_l\}$ , tal y cómo se muestra en la Figura 5.29, y dado que la presión del agua varía de forma lineal la expresión (5.193) es válida para este tipo de fuerzas.

El primer paso para calcular la fuerza equivalente es transformar la fuerza  $\{\mathbf{p}\}$  en la fuerza mostrada en la expresión (5.183) mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} t_i^{(x)} &= -\widehat{n}_x p_i; & t_i^{(y)} &= -\widehat{n}_y p_i; & t_i^{(z)} &= -\widehat{n}_z p_i; \\ t_j^{(x)} &= -\widehat{n}_x p_j; & t_j^{(y)} &= -\widehat{n}_y p_j; & t_j^{(z)} &= -\widehat{n}_z p_j; \\ t_l^{(x)} &= -\widehat{n}_x p_l; & t_l^{(y)} &= -\widehat{n}_y p_l; & t_l^{(z)} &= -\widehat{n}_z p_l, \end{aligned} \quad (5.195)$$

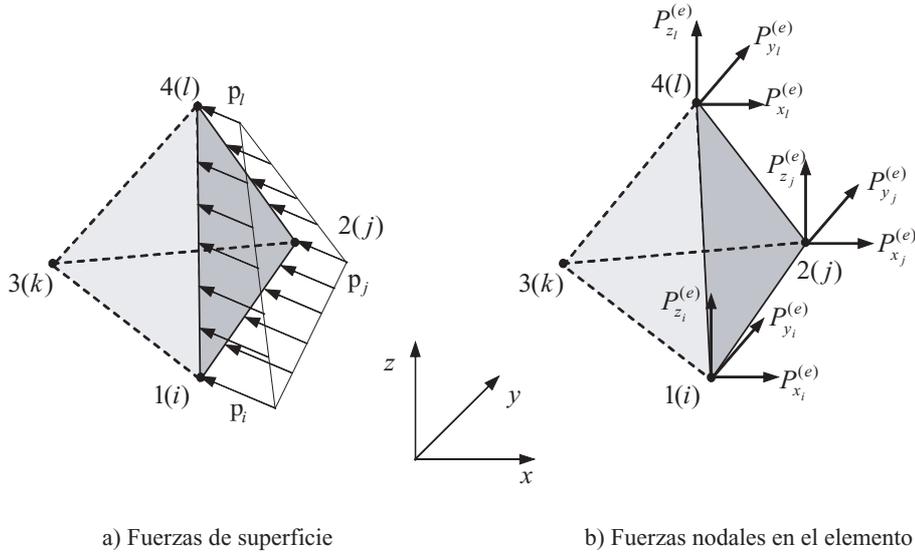


Figura 5.29: Fuerza de superficie debido a la presión del agua en la cara  $\widehat{ijl} = \widehat{124}$  del tetraedro de 4 nodos y cargas nodales equivalentes.

donde  $\widehat{n}_x, \widehat{n}_y$  y  $\widehat{n}_z$  son las proyecciones del vector normal unitario sobre los ejes coordenados, y el signo menos se debe a que la presión siempre tienen signo contrario al vector (vector normalizado) normal a la superficie que sale del elemento.

Para el cálculo de esos versores es imprescindible obtener el vector normal, para ello se emplea el producto vectorial de los vectores según dirección  $\overrightarrow{ij}$  y el vector según dirección  $\overrightarrow{il}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{n}} &= \overrightarrow{ij} \wedge \overrightarrow{il} \\ &= \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ (x_j - x_i) & (y_j - y_i) & (z_j - z_i) \\ (x_l - x_i) & (y_l - y_i) & (z_l - z_i) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (5.196)$$

que de forma simplificada queda como:

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} = n_x \widehat{\mathbf{i}} + n_y \widehat{\mathbf{j}} + n_z \widehat{\mathbf{k}},$$

donde  $\widehat{\mathbf{i}}, \widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{k}}$ , son los versores (vectores unitarios) según las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente. El siguiente paso es normalizar el vector:

$$\widehat{\mathbf{n}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{n}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{n}}\|}, \quad (5.197)$$

donde  $\|\overrightarrow{\mathbf{n}}\|$  es el módulo del vector y viene dado por la expresión  $\|\overrightarrow{\mathbf{n}}\| = \sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2}$ , de forma que:

$$\widehat{\mathbf{n}} = \frac{n_x}{\|\overrightarrow{\mathbf{n}}\|} \widehat{\mathbf{i}} + \frac{n_y}{\|\overrightarrow{\mathbf{n}}\|} \widehat{\mathbf{j}} + \frac{n_z}{\|\overrightarrow{\mathbf{n}}\|} \widehat{\mathbf{k}} \quad (5.198)$$

$$= \widehat{n}_x \widehat{\mathbf{i}} + \widehat{n}_y \widehat{\mathbf{j}} + \widehat{n}_z \widehat{\mathbf{k}}. \quad (5.199)$$

### 5.5.3. Ejemplo de una Presa en Arco

En este apartado se plantea un ejemplo de aplicación del Método de los Elementos Finitos a partir de los códigos implementados en los capítulos anteriores. Se analiza una presa de arco-gravedad, para dos tipos de carga: la correspondiente al peso propio de la estructura, y la debida al empuje hidrostático.

#### 5.5.3.1. Presa Scalere

La presa Scalere es una gran estructura en arco, realizada en hormigón y localizada en el centro-norte de Italia. Los trabajos de construcción se llevaron a cabo entre 1910 y 1911. El cimientado de roca, excelente en todos los aspectos, consiste en areniscas estratificadas del Eoceno. Debido a la gran impermeabilidad de la estructura, las superficies de la presa están realizadas en hiladas regulares. La presa no está provista de juntas de retracción. El sistema de drenaje no cumple los requerimientos de las actuales Normas italianas, por lo que no se considera una reducción de las presiones intersticiales.

Los principales parámetros son:

- Cota de coronación: 830,50 *m* sobre el nivel del mar.
- Altura sobre el plano principal de cimentación: 34,00 *m*.
- Longitud de coronación: 158,00 *m*.
- Volumen de la presa: 40000,00 *m*<sup>3</sup>
- Parámetros físico-mecánicos:
  - Hormigón:
    - Módulo de elasticidad: 20000,00 *MPa*.
    - Densidad: 2300 *kg/m*<sup>3</sup>.
    - Coeficiente de Poisson: 0,2
    - Resistencia a la compresión 11,6 *MPa*.
    - Resistencia a tracción: 1 *MPa*.
  - Cimentación en roca:
    - Módulo de elasticidad: 10000-15000 *MPa* (se ha tomado para el cálculo 12500,00 *MPa*)
    - Resistencia a la compresión: 10-15 *MPa*.

A partir de todos los datos mencionados anteriormente, así como de la geometría de la estructura, se ha realizado la discretización de la presa en el programa GID, tal y como se puede ver en la Figura 5.33.

El primer cálculo se realiza considerando exclusivamente el peso propio de la estructura y de la cimentación rocosa. El resultado obtenido en deformaciones se muestra en la Figura 5.34. El resultado en tensiones es el que puede observarse en la Figura 5.35(a) y 5.35(b).

Como se puede ver en las figuras 5.35(a) y 5.35(b), las tensiones máximas obtenidas son de 2,10 *MPa*, del orden de una sexta parte de la resistencia del hormigón. Este dato puede parecer desmesurado pero conviene recordar que las presas de hormigón (y especialmente las de gravedad como ésta) tienen su factor más limitante en la resistencia al deslizamiento, para la cual es fundamental el peso de la estructura. Es decir, este tipo de construcciones masivas resisten gracias a su masa, no a las características mecánicas del material.

En cuanto a las deformaciones, resulta muy llamativa la forma que adoptan, con una fuerte



Figura 5.30: Presa Scalere (Italia).

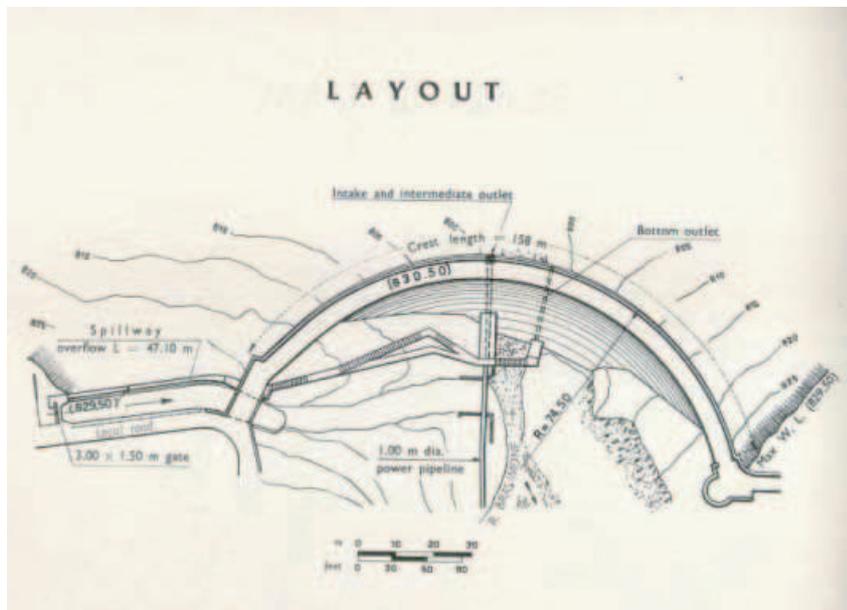


Figura 5.31: Planta de la presa.

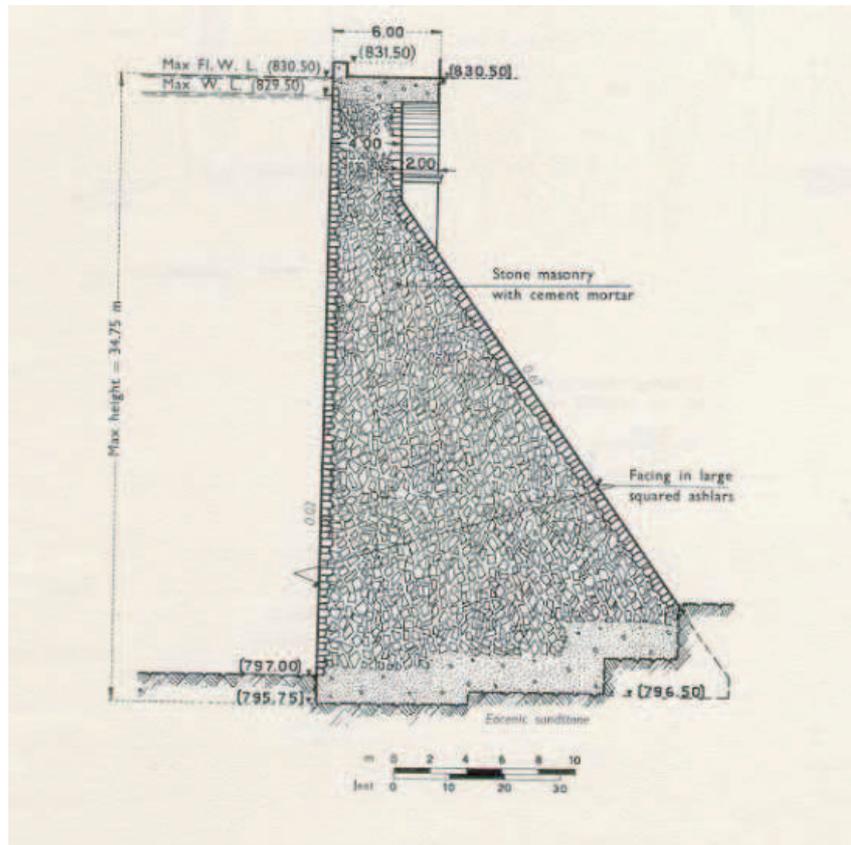


Figura 5.32: Sección de la presa.

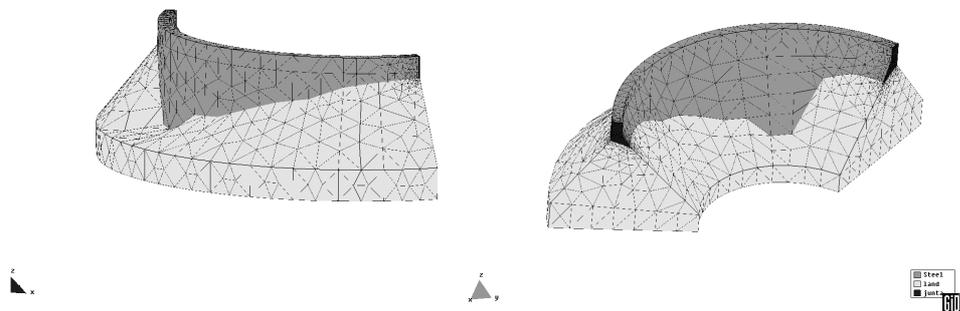


Figura 5.33: Discretización de la presa en elementos tetraédricos (GID-CIMNE).

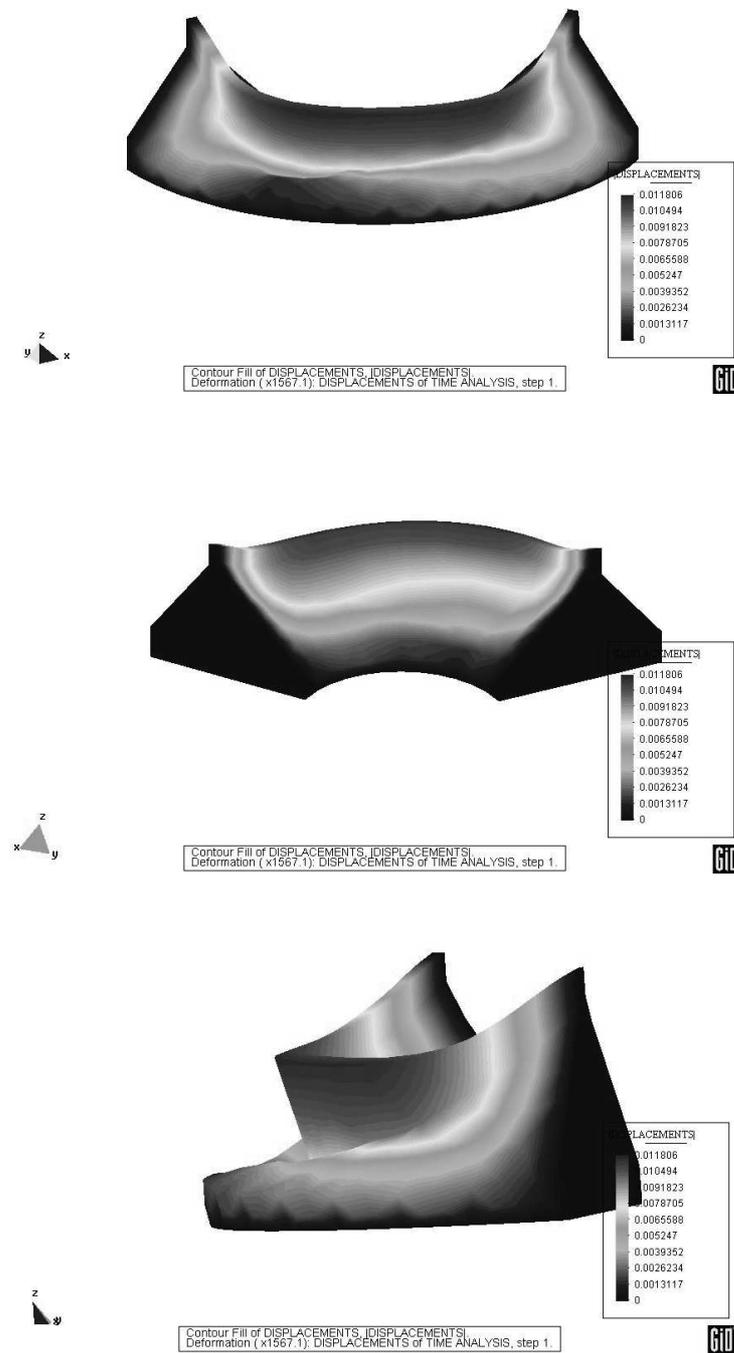


Figura 5.34: Desplazamientos producidos bajo la carga exclusiva del peso propio en el paramento de aguas arriba, aguas abajo y estribo, respectivamente.

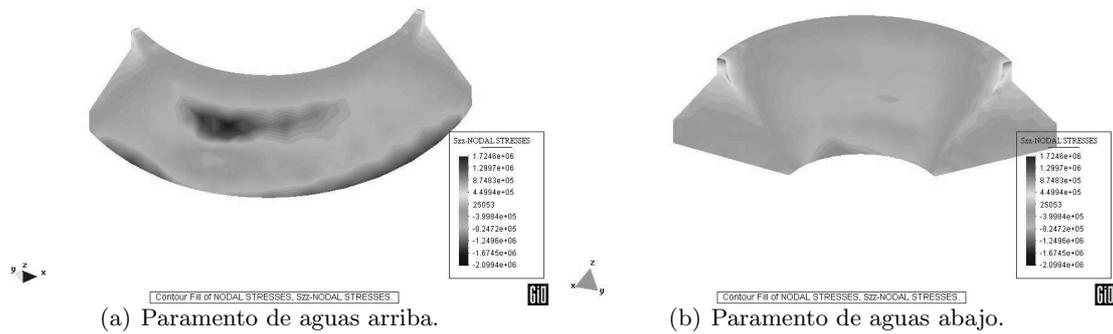


Figura 5.35: Tensiones verticales debidas al peso propio.

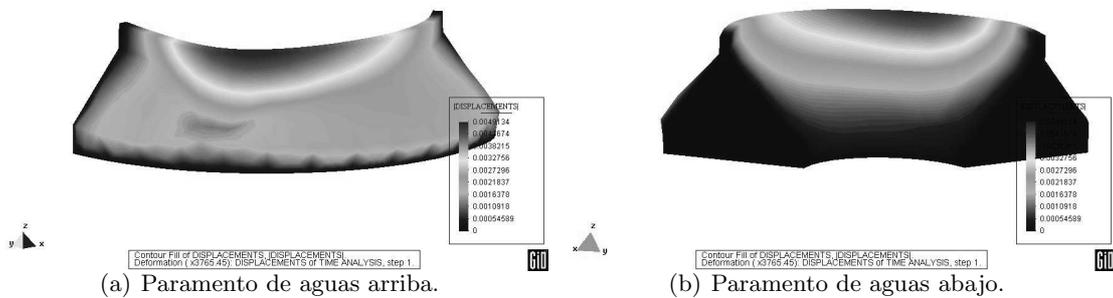


Figura 5.36: Desplazamientos producidos por la presión hidrostática del agua.

deflexión en el centro, siendo nulas en los estribos. Esto se debe a que en el modelo, los estribos de la presa se modelizan como empotramientos, lo que conlleva que los movimientos sean nulos en estos puntos. Sin embargo, esto se ajusta poco a la realidad por dos motivos fundamentales:

- La roca de cimentación no es indeformable. De hecho, como se puede comprobar en los datos ofrecidos anteriormente, la deformabilidad de ambos materiales es muy parecida.
- El proceso constructivo implica la carga progresiva de la estructura y la cimentación, por lo que las nuevas hiladas se van construyendo sobre la estructura ya deformada. Por lo tanto, las deformaciones son mucho más uniformes en la realidad. Ahora bien, ¿qué se podría hacer para modelizar de forma más fiable los movimientos? Parece claro que habría que actuar sobre las condiciones de contorno que se imponen para reproducir la deformación de los estribos. Una solución puede consistir en incluir unos muelles elásticos en los extremos, con una rigidez similar a la de la roca, de tal manera que estos puntos no sean fijos, sino que desciendan junto con el resto de la estructura.

En el segundo cálculo realizado se aplica exclusivamente la presión hidrostática del agua, que es creciente con la profundidad. Al igual que en el caso anterior, se muestran las soluciones en deformaciones y en tensiones.

Como se puede ver en las figuras, el desplazamiento debido a la presión hidrostática se encuentra mucho más concentrado en la parte central superior de la presa, que es lugar donde ésta tiene una rigidez menor, y va disminuyendo al aproximarse a la cimentación y a los estribos. Las tensiones debidas a la presión hidrostática, son aún menores que las debidas a peso propio.

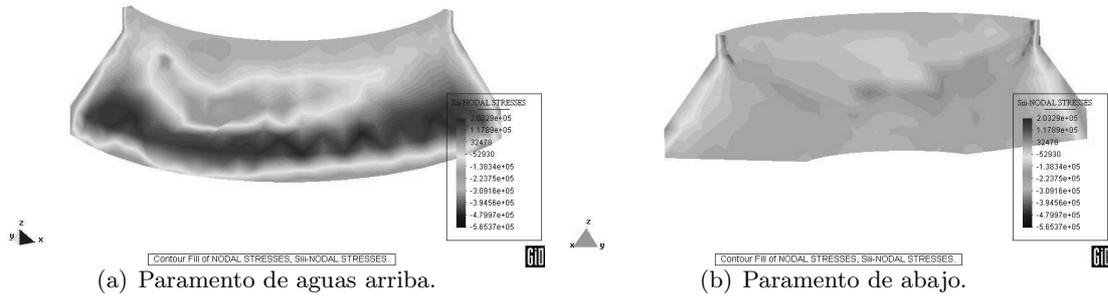


Figura 5.37: Tensiones principales producidas por la presión hidrostática del agua.

En las figuras 5.37(a) y 5.37(b) se muestra la tensión principal mayor que alcanza un valor máximo de 0,5 MPa en compresión y 0,2 MPa en tracción. Ambos valores se encuentran por debajo de los máximos determinados para los materiales de que está compuesta la presa.

---

## Capítulo 6

# Aplicación del MEF a Forjados

---

En este capítulo se muestra la aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF) para resolver forjados. Los forjados son elementos estructurales como el mostrado en la Figura 6.1, compuestos de tres elementos: (a) una zona horizontal denominada placa o losa sobre la que actúan cargas predominantemente verticales que se caracteriza por tener una dimensión (canto) mucho menor que las otras dos, (b) unas vigas, que son elementos longitudinales caracterizados por tener una dimensión (largo) mucho mayor que las otras dos (ancho y canto), y que se disponen horizontalmente para recoger los esfuerzos de la placa y distribuirlos a los (c) pilares, que son elementos estructurales longitudinales dispuestos verticalmente, que transmiten las cargas de las losas al resto de los pilares hasta llegar a la cimentación.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la Sección 6.1 se muestra la discretización del forjado para su posterior tratamiento, en la Sección 6.4 se estudia la aplicación del MEF al estudio de placas sometidas a flexión, y por último, en la Sección 6.5 se desarrolla la teoría que permite aplicar el MEF a las vigas.

### 6.1. Discretización del Forjado

Previo paso al estudio de los forjados en sí, y teniendo en cuenta que éstos están constituidos por tres elementos con una forma de trabajar diferente, se comprueba si es posible discretizar el forjado. Para ello se considera la energía de deformación almacenada por cada uno de los elementos:

- Energía de deformación del elemento placa o losa ( $U_p$ ), que viene dada por la expresión:

$$U_p = \frac{1}{2} [\delta_p]^T [\mathbf{K}_p] [\delta_p], \quad (6.1)$$

donde  $[\delta_p]$  son los desplazamientos de la placa.

- Energía de deformación de la viga ( $U_v$ ), que es igual a:

$$U_v = \frac{1}{2} [\delta_v]^T [\mathbf{K}_v] [\delta_v]. \quad (6.2)$$

donde  $[\delta_v]$  son los desplazamientos de la viga.

- Y por último, la energía de deformación del pilar ( $U_m$ ), que es igual a:

$$U_m = \frac{1}{2} [\delta_m]^T [\mathbf{K}_m] [\delta_m], \quad (6.3)$$

donde  $[\delta_m]$  son los desplazamientos de la placa.

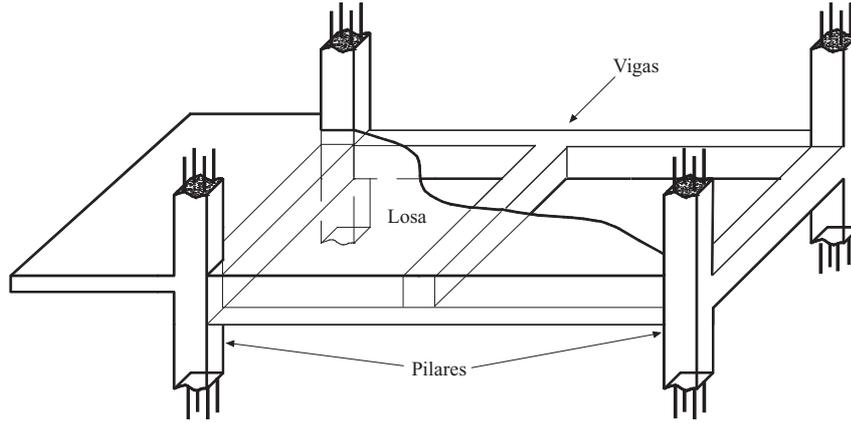


Figura 6.1: Forjado correspondiente a la planta de un edificio compuesto por: (a) losas, (b) vigas y (c) pilares.

Teniendo en cuenta que tanto placas ( $p$ ), como vigas ( $v$ ), como pilares ( $m$ ) forman parte del forjado ( $f$ ), los desplazamientos de los distintos elementos han de ser compatibles en los lugares de confluencia de los distintos elemento, y por tanto, el desplazamiento vertical y las rotaciones en esos lugares han de ser iguales:

$$[\delta_f] = [\delta_p] = [\delta_v] = [\delta_m]. \quad (6.4)$$

La energía de deformación del forjado se obtiene como la suma de las energías de sus elementos:

$$U_f = U_p + U_v + U_m, \quad (6.5)$$

con lo cual, si se sustituyen las expresiones (6.1)-(6.3) en la ecuación anterior se obtiene:

$$U_f = \frac{1}{2} [\delta_p]^T [\mathbf{K}_p] [\delta_p] + \frac{1}{2} [\delta_v]^T [\mathbf{K}_v] [\delta_v] + \frac{1}{2} [\delta_m]^T [\mathbf{K}_m] [\delta_m], \quad (6.6)$$

expresión que teniendo en cuenta (6.4) queda como:

$$U_f = \frac{1}{2} [\delta_f]^T \{[\mathbf{K}_p] + [\mathbf{K}_v] + [\mathbf{K}_m]\} [\delta_f], \quad (6.7)$$

de donde se deduce que la matriz de rigidez del forjado viene dada por la suma de las matrices de rigidez de sus componentes:

$$[\mathbf{K}_f] = \{[\mathbf{K}_p] + [\mathbf{K}_v] + [\mathbf{K}_m]\}, \quad (6.8)$$

donde  $[\mathbf{K}_f]$  es la rigidez del forjado. Nótese que las vigas ( $v$ ) y los pilares ( $m$ ) actúan como elementos rigidizadores de la placa ( $p$ ).

De esta manera queda claro que un forjado puede discretizarse en tres elementos, tal y cómo se muestra en la Figura 6.2, una placa o losa trabajando a flexión, vigas también trabajando a flexión en el plano horizontal, y pilares trabajando a flexión y compresión en dirección normal al plano de la losa. Nótese que para facilitar la modelación, los pilares pueden ser considerados como rigidizadores actuando cómo muelles, en los que se desprecia el desplazamiento vertical (deformación por compresión).

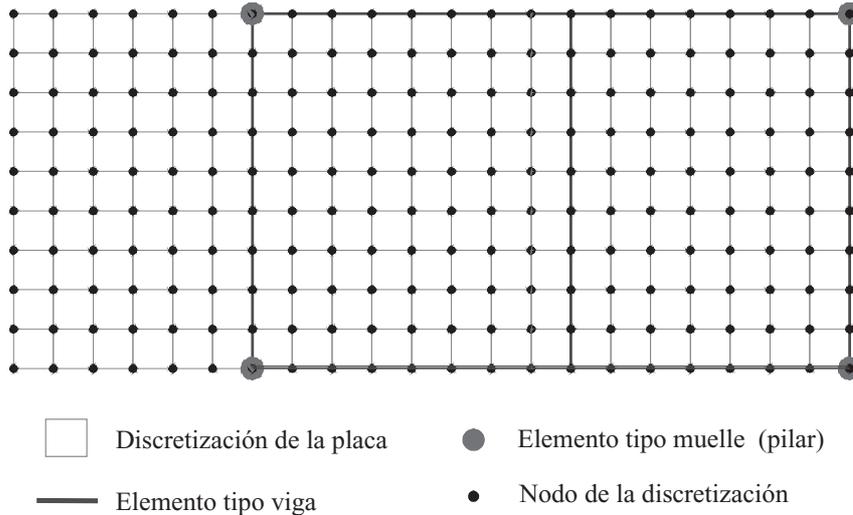


Figura 6.2: Discretización del forjado en elemento de vigas y de placas.

**Comentario 6.1** *Es importante recalcar la diferencia entre la discretización del forjado en tres elementos: losa, viga, y pilar (o muelle, véase la Figura 6.3), y la discretización de cada uno de ellos para su aproximación mediante el método de los elementos finitos. Así en la Figura 6.2, se muestra claramente como la losa se discretiza en elementos planos, mientras que las vigas se discretizan en elementos lineales.*

■

### 6.1.1. Hipótesis de Partida

Teniendo en cuenta la discretización del forjado en tres elementos claramente diferenciados (losa o placa, viga y pilar) es necesario tener una serie de consideraciones para que la aproximación mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) sea correcta:

- Existen diferentes teorías para el estudio de placas sometidas a flexión: la Teoría de Reissner, la de Reissner-Mindlin y la Teoría de Kirchhoff. A la hora de hacer la aproximación mediante el MEF es imprescindible tener en cuenta que teoría describe mejor el comportamiento real de la placa que se quiere modelar. En este libro se emplea la teoría de Kirchhoff, que es una aproximación muy buena a la solución real siempre y cuando se trabaje con placas delgadas.
- Otra simplificación importante desde el punto de vista de la discretización, es la consideración de que el eje neutro de la viga coincide con la superficie neutra de la placa, cuando puede que no sea así, tal y como se muestra en las Figuras 6.4 (a) y (b). Esta aproximación es válida cuando la distancia entre ambos ejes no es excesivamente grande.

A continuación, se procede a obtener la aproximación del MEF para el estudio del comportamiento de cada uno de los elementos en los que hemos discretizado el forjado, es decir, para la losa y para las vigas.

## 6.2. Teoría de Placas a Flexión

Las placas se definen como cuerpos limitados por dos superficies generalmente planas. La distancia entre estas dos superficies se denomina espesor ( $t$ ), que en este caso se considera

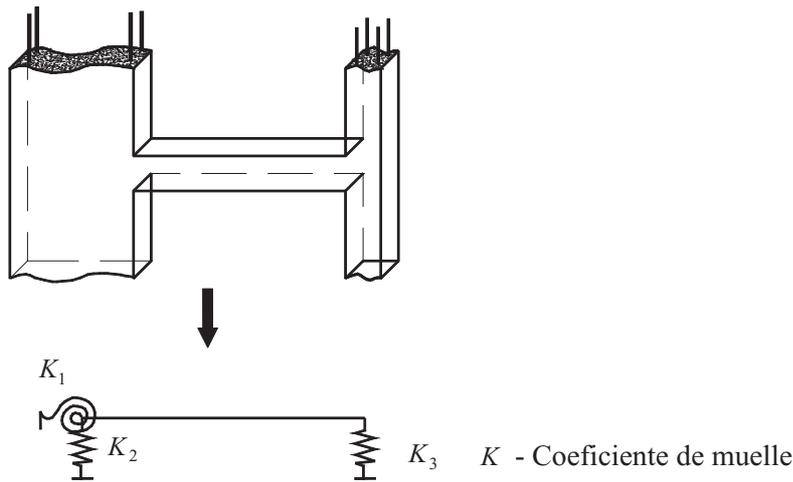


Figura 6.3: Tratamiento de los pilares en el forjado.

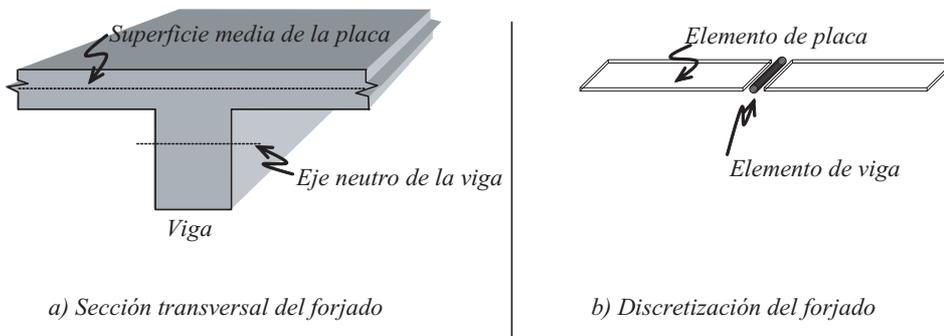


Figura 6.4: Caracterización de la unión viga-losa: (a) situación real y (b) aproximación.

constante, y esta dimensión es pequeña cuando se compara con las otras dos dimensiones, véase la Figura 6.5. La carga ( $q$ ) se aplica perpendicular a la superficie media.

El objetivo de la teoría de placas a flexión que se va a emplear es transformar el problema tridimensional en un problema bidimensional en la superficie media de la placa. La diferencia básica entre las distintas teorías de placas (Kirchhoff, Reissner-Mindlin, etc.) reside en como se deforma la superficie normal al plano medio, representada por la sección  $m-n$  de la Figura 6.6.

En la Figura 6.7 se puede apreciar la diferencia de deformación entre la teoría de Kirchhoff y la de Reissner-Mindlin. En este capítulo se desarrolla únicamente la formulación de la teoría de placas de Kirchhoff, aunque se presenta la matriz de rigidez explícita del elemento DKT (Discrete Kirchhoff Theory), cuya formulación tiene en consideración las deformaciones tangenciales, que son despreciadas por la teoría de Kirchhoff.

### 6.2.1. Hipótesis Básicas

Para el desarrollo de las ecuaciones básicas, se tienen en cuenta las siguientes hipótesis básicas:

- El material que constituye la placa es **homogéneo** (la materia está distribuida de forma

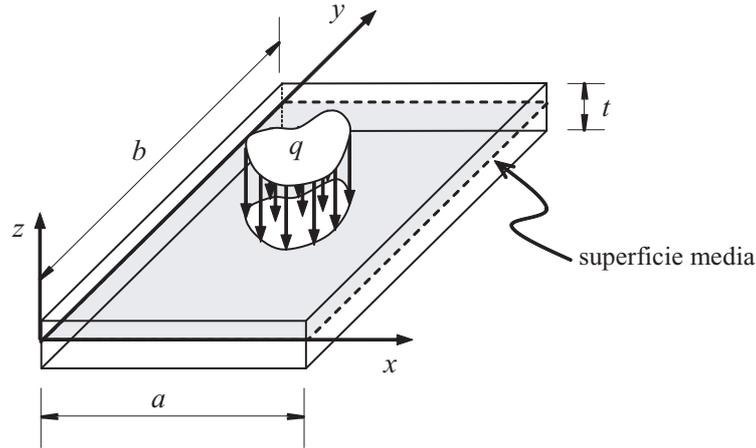
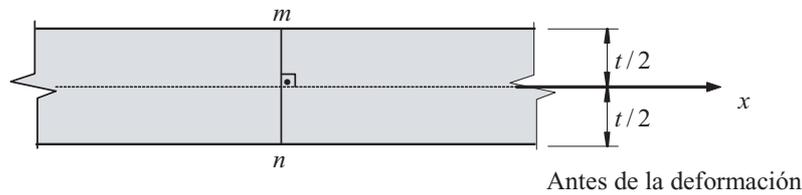


Figura 6.5: Placa sometida a flexión.

Figura 6.6: Sección  $(m - n)$  normal al plano medio de la placa.

homogénea), **elástico** (hay conservación de energía en los procesos de carga y descarga), **lineal** (la relación tensión-deformación es lineal) e **isótropo** (tensor constitutivo elástico es independiente de la orientación).

- Los desplazamientos en el plano medio de la placa son nulos, es decir,  $u = 0$  y  $v = 0$ . Esto implica que los puntos del plano medio sólo se desplazan verticalmente.
- Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical (en la dirección  $z$ ). Esta hipótesis es equivalente a considerar que los desplazamientos verticales del plano medio son muy pequeños con respecto al espesor de la placa.
- Las tensiones normales a la superficie media son despreciables en comparación con las tensiones en planos paralelos a la misma (plano  $x-y$ , tal y cómo se muestra en la Figura 6.5, y se pueden considerar nulos  $\sigma_z \approx 0$ . La relación entre ambas puede llegar a  $10^{-4}$  para placas muy delgadas (véase la Figura 6.8).

### 6.2.2. Campo de Desplazamientos

Considerando la sección  $m-n$  de la Figura 6.6, ésta permanece recta tras la deformación. Por tanto, se pueden representar los desplazamientos  $u$ ,  $v$ , y  $w$ , tal y como se indica en la Figura 6.9. En esta figura también se indican los valores positivos de la deflexión de la superficie media ( $w$ ) y de las rotaciones  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ .

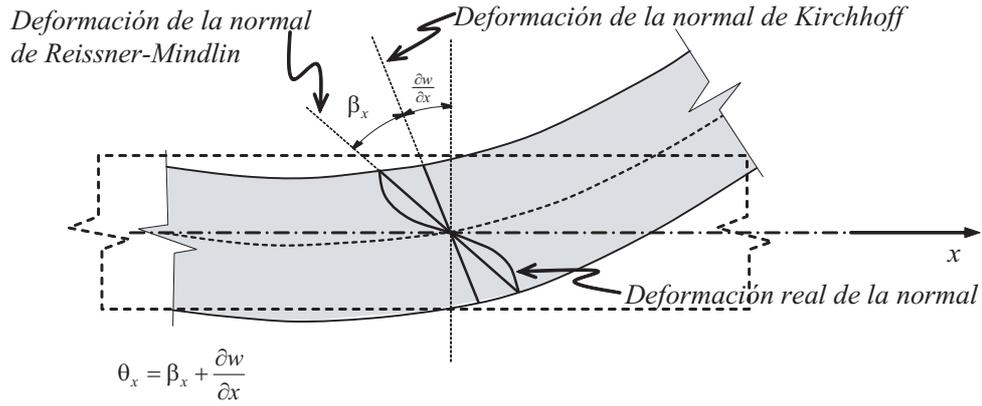


Figura 6.7: Plano medio deformado según teoría de Kirchhoff y Reissner-Mindlin.

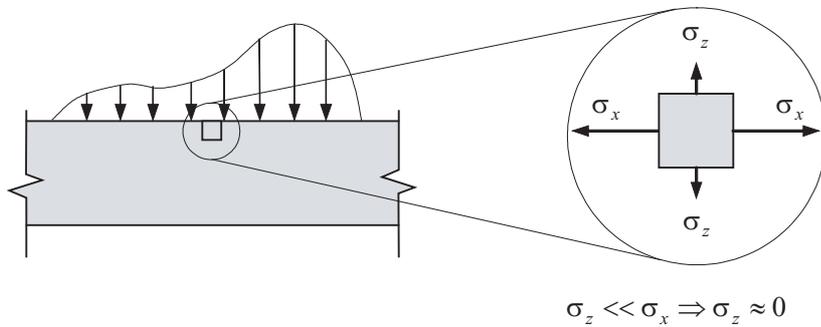


Figura 6.8: Relación entre las tensiones normales y paralelas al plano medio de la placa.

Con estas consideraciones se pueden representar los desplazamientos como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_x \\ z\theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix} \tag{6.9}$$

### 6.2.3. Campo de Deformaciones

El campo de deformaciones (véase el Apéndice A) se relaciona con los desplazamientos según la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{6.10}$$

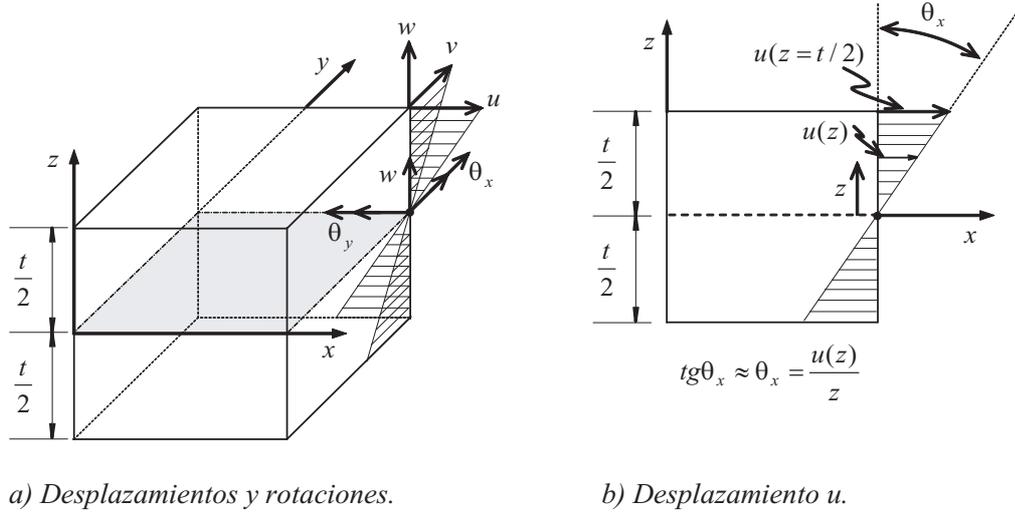


Figura 6.9: Desplazamientos y rotaciones positivas ( $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ) en un punto genérico de la placa.

Nótese que el desplazamiento vertical de todos los puntos perpendiculares a la placa es constante e igual a  $w$ . Lo que implica que se asume que la deformación según esta dirección es muy pequeña ( $\varepsilon_z \approx 0$ ). Reemplazando la ecuación (6.9) en la expresión anterior, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z\theta_x \\ z\theta_y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\frac{\partial\theta_x}{\partial x} \\ z\frac{\partial\theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ 2z\frac{\partial\theta_x}{\partial y} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

#### 6.2.4. Relación Tensión-Deformación

Teniendo en cuenta las hipótesis sobre el comportamiento del material que constituye la placa, es decir, que es un material elástico, lineal e isótropo, la relación deformación-tensión viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Además como la deformación  $\varepsilon_z \approx 0$ , la tensión  $\sigma_z$  despreciarse con respecto a las demás tensiones (véase la Figura 6.8, y por lo tanto, se puede simplificar la relación deformación-tensión

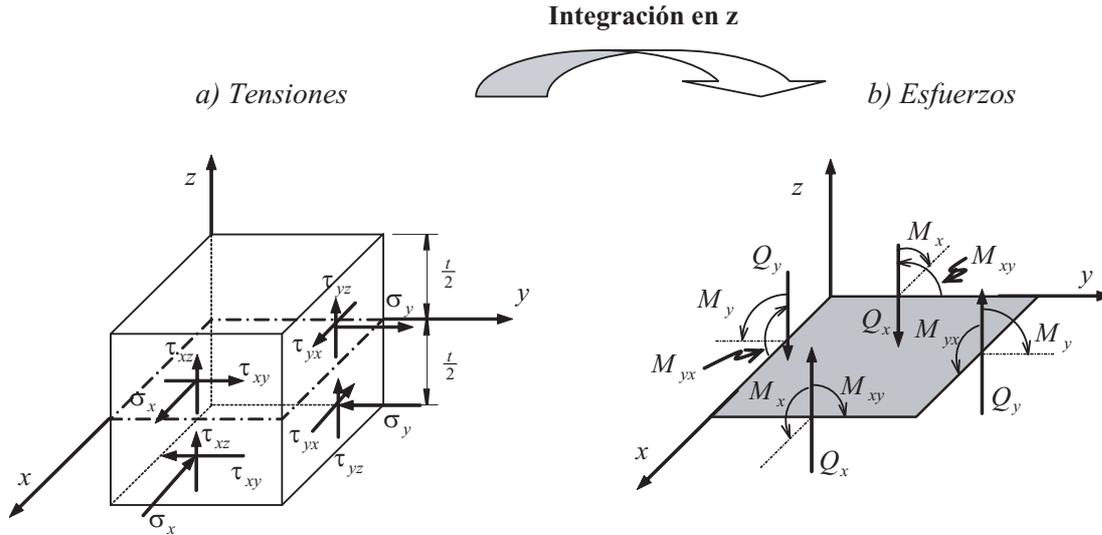


Figura 6.10: Esfuerzos actuantes en un punto (elemento infinitesimal) de la placa.

de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (6.13)$$

Invirtiendo la expresión (6.13) se obtiene la relación tensión-deformación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (6.14)$$

La Figura 6.10 (a) muestra las tensiones actuantes en un punto de la placa. Para tratar el problema tridimensional como un problema bidimensional es conveniente transformar las tensiones en esfuerzos actuantes en el plano medio de la placa (véase la Figura 6.10 (b)).

Los momentos representados en la Figura 6.10 (b) se obtienen a través de las siguientes integrales a lo largo del espesor:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz \quad ; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz \quad ; \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy} dz, \quad (6.15)$$

mientras que los esfuerzos cortantes se obtienen como:

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad ; \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \quad (6.16)$$

### 6.3. Teoría de Kirchhoff para Placas Delgadas

Como ya se explicó anteriormente, la teoría de Kirchhoff es únicamente válida para placas delgadas, es decir, cuando la relación entre el espesor  $t$  y el ancho medio (media de las otras dos dimensiones) cumple la siguiente relación:

$$\frac{t}{(a+b)/2} \leq 0,1. \quad (6.17)$$

En caso de que no se cumpla, la teoría de Reissner-Mindlin constituye una mejor aproximación a la deformación real de la placa. En caso de que el espesor sea muy grande puede ser incluso necesario emplear la teoría de elasticidad tridimensional. Para más detalles sobre la formulación de elementos finitos según la teoría de Reissner-Midlin véase [Oñate, 1992], o [Zienkiewicz and Taylor, 2004b].

Además de las hipótesis básicas vistas en el apartado anterior, la teoría de Kirchhoff asume que:

- Cualquier recta perpendicular a la superficie media de la placa (por ejemplo sección  $m-n$  de la Figura 6.11) permanece *recta* tras la deformación y *perpendicular* a la deformada del plano medio, tal y como se muestra en la Figura 6.11 (b).

Esta hipótesis garantiza que las deformaciones tangenciales  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  son nulas, con lo cual, según la expresión (6.11) se concluye que:

$$\gamma_{xz} = 0 \implies \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (6.18)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \implies \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6.19)$$

La aproximación de elementos finitos siguiendo la Teoría de Kirchhoff consta de las siguientes etapas:

- **Paso 1: Descripción del campo de desplazamientos.** Los desplazamientos  $u$ ,  $v$ , y  $w$  en cualquier punto de la placa, concordantes con los ejes  $x$ ,  $y$ , y  $z$ , se pueden expresar en función de la flecha (deflexión) de la placa y de las rotaciones de la superficie media ( $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ) (véase la Figura 6.9). Teniendo en cuenta que  $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$ , y  $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ , la expresión (6.9) del campo de desplazamientos según la teoría de Kirchhoff queda como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_x \\ z\theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\frac{\partial w}{\partial x} \\ -z\frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{Bmatrix}. \quad (6.20)$$

En la Figura 6.11 se puede apreciar la componente  $u$  del campo de desplazamientos.

El *campo de desplazamientos* de la placa se puede expresar de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ -z\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y) \end{Bmatrix}. \quad (6.21)$$

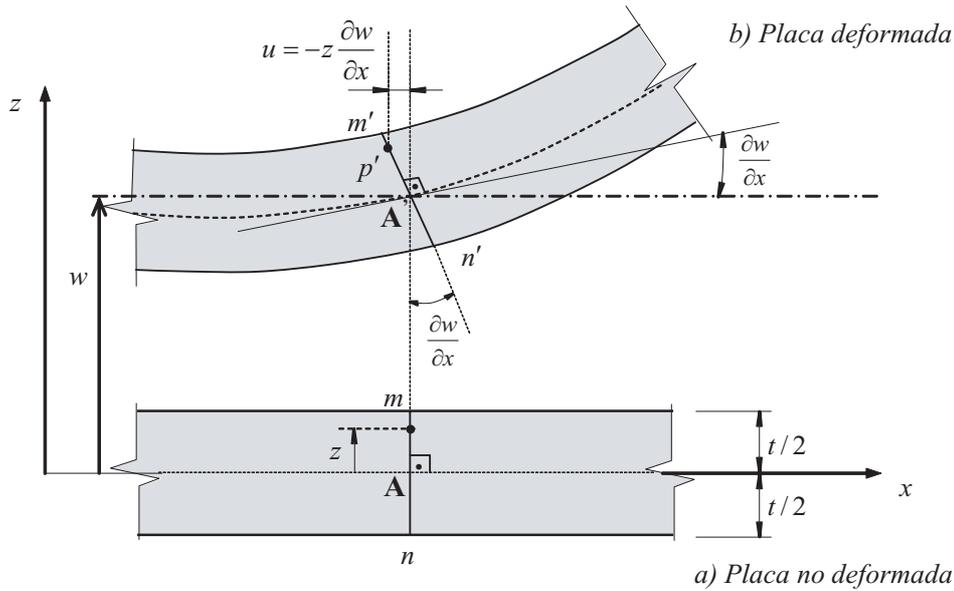


Figura 6.11: Corte transversal (x-y) de la placa antes y después de la deformación.

- Paso 2: Obtención del campo de deformaciones.** La relación del campo de deformaciones se obtuvo en la sección 6.2.3, página 266. Teniendo en cuenta que según la teoría de Kirchhoff se cumple que  $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ , y  $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$ , el campo de deformaciones es igual a:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 2z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{Bmatrix} = -z \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}}_{\{\hat{\varepsilon}\}} = -z \{\hat{\varepsilon}\}. \tag{6.22}$$

Nótese que dado que  $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ , las tensiones correspondientes  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  no contribuyen en el estado deformacional de la placa, pese a que estas tensiones no son despreciables. Posteriormente se comprueba que estas tensiones se pueden obtener a través de las ecuaciones de equilibrio.

- Paso 3: Descripción del campo de tensiones.** Teniendo en cuenta la relación (6.14) y que  $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ , se obtiene la siguiente relación para el campo de tensiones:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{6.23}$$

que es exactamente el mismo campo de tensiones que se emplea para el estado de tensión plana en el problema de elasticidad bidimensional (véase la expresión (A.10)).

**Comentario 6.2** Es importante recalcar que para obtener la expresión anterior se consideró que las tensiones  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{xz}$  no contribuyen significativamente a las deformaciones

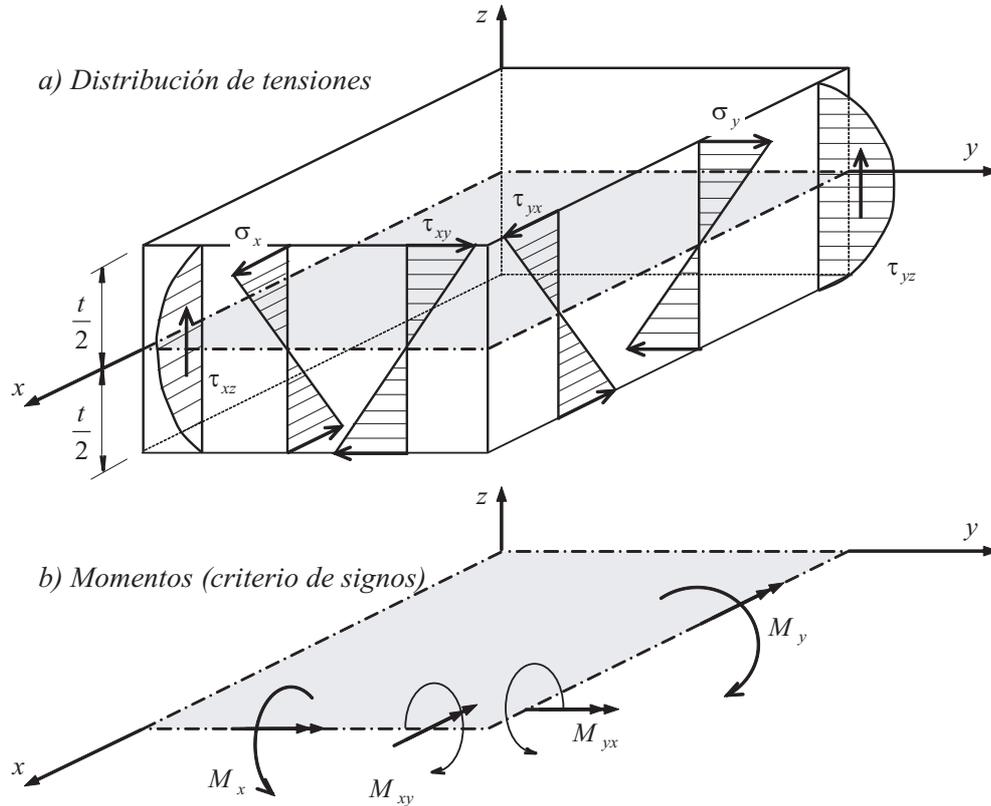


Figura 6.12: Distribución de tensiones en la placa y criterio de signos para los momentos flectores.

de la placa. Lo que no quiere decir que esas tensiones sean nulas o despreciables. Dicho valor se puede obtener a posteriori utilizando las ecuaciones de equilibrio entre momentos flectores y esfuerzos cortantes.

■

Reemplazando el vector deformación dado por la expresión (6.22) en la expresión (6.23) se obtienen los valores de las tensiones en la placa:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (6.24)$$

En la Figura 6.12(a) se muestra la interpretación gráfica de las tensiones que actúan en la placa, mientras que en la Figura 6.12(b) se muestran el criterio de signos empleado para los momentos.

- **Paso 4: Obtención de los esfuerzos en la placa.** Los esfuerzos actuantes en la placa se obtienen a partir de la integración de las tensiones a lo largo de todo el espesor de la

placa. Así pues, considerando un elemento infinitesimal de placa en el plano  $x-y$  como el mostrado en la Figura 6.10 (a), se obtienen los momentos flectores  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{xy}$  (véase la Figura 6.10 (b)) a partir de las siguientes expresiones:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz \quad ; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy} dz. \quad (6.25)$$

Sustituyendo los valores de las tensiones dadas en la ecuación (6.24) e integrando, se obtiene:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (6.26)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (6.27)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6.28)$$

donde  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  es la denominada *rigidez a flexión de la placa*.

La expresión anterior en forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{M}\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{D}_K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}}_{\{\hat{\varepsilon}\}} \quad (6.29)$$

$$\{\mathbf{M}\} = -[\mathbf{D}_K] \{\hat{\varepsilon}\} \quad (6.30)$$

donde  $\{\hat{\varepsilon}\}$  es el *vector de deformaciones generalizadas de flexión* o *vector de curvaturas*, y  $[\mathbf{D}_K]$  es la matriz constitutiva de la placa a flexión.

- **Paso 5: Obtención de la ecuación diferencial de la placa.** Dado el elemento diferencial de placa mostrado en la Figura 6.13. El equilibrio de fuerzas en el elemento cuando sobre este actúa una sobrecarga uniformemente distribuida ( $q$ ) vienen dado por la siguiente expresión:

$$q dx dy - Q_y dx - Q_x dy + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx = 0, \quad (6.31)$$

que simplificando queda como:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (6.32)$$

A continuación se establece el equilibrio de momentos con respecto al eje  $x$ :

$$M_y dx + M_{xy} dy - \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} \quad (6.33)$$

$$- \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx dy \quad (6.34)$$

$$- Q_x dy \frac{dy}{2} + q dx dy \frac{dy}{2} = 0,$$

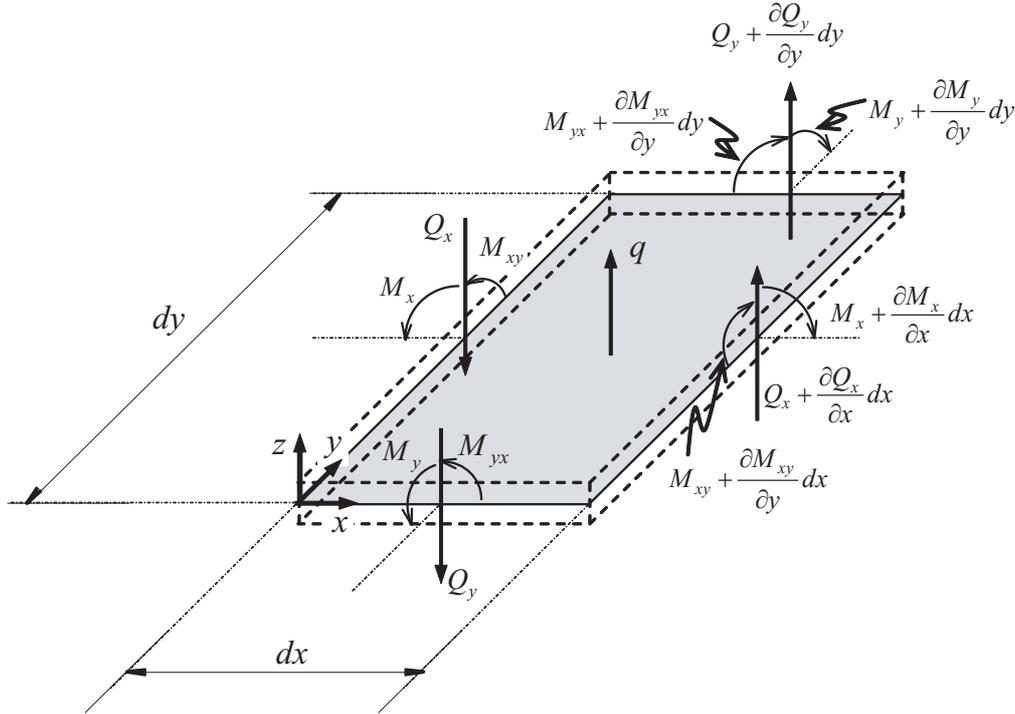


Figura 6.13: Esfuerzos actuantes en un elemento diferencial de placa ( $dxdy$ ).

expresión que tras simplificar y despreciar infinitésimos de tercer orden ( $dxdydz$ ) queda como:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (6.35)$$

Una expresión análoga se puede obtener si se plantea el equilibrio de momentos con respecto al eje  $y$ :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (6.36)$$

Sustituyendo los valores de los momentos  $M_x$  y  $M_{xy}$ , dados por las ecuaciones (6.26) y (6.28), respectivamente, en la ecuación (6.36) se llega a la siguiente expresión para el esfuerzo cortante  $Q_x$ :

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\ &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Reemplazando los momentos  $M_y$  y  $M_{xy}$ , dados por las ecuaciones (6.27) y (6.28), respectivamente, en la ecuación (6.35), llegamos a la siguiente expresión para el esfuerzo cortante  $Q_y$ :

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (6.38)$$

Sustituyendo (6.37) y (6.38) en la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales (6.32) se obtiene:

$$-D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -q, \quad (6.39)$$

que reagrupando términos queda como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (6.40)$$

Expresión que constituye la ecuación diferencial de la placa en función de los desplazamientos verticales. Si se expresa en función del Laplaciano queda como:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} \quad \text{ó} \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D}. \quad (6.41)$$

## 6.4. Resolución de Placas Empleando el MEF

### 6.4.1. Elemento Finito ACM para Placas Delgadas

Una vez obtenidas las ecuaciones básicas que rigen el comportamiento de una placa delgada, se va a proceder a obtener la expresión de la matriz de rigidez,  $[\mathbf{k}^{(e)}]$ , de un elemento de cuatro nodos denominado ACM (Adini-Clough-Melosh), y el vector de fuerzas externas nodales  $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$  de tal manera que se cumpla que:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)}] \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}. \quad (6.42)$$

Nótese que se va a desarrollar este elemento por su sencillez, ya que desde el punto de vista práctico no proporciona buenos resultados si lo comparamos con otros tipos de elementos. Los pasos para la obtención de la matriz de rigidez  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  del elemento ACM para resolver problemas de placas delgadas son:

- **Paso 1: Identificación del problema.** El primer paso, común para cualquier elemento utilizado, es la selección del sistema de coordenadas y la identificación tanto del número de nodos del elemento ( $n_{n_e}$ ), como del número de grados de libertad por nodo ( $n_{g_n}$ ).

El sistema de coordenadas globales y la numeración de los nodos del elemento se muestran en la Figura 6.14, en la que se puede apreciar que una de sus limitaciones es la de ser un rectángulo (lados perpendiculares).

Los desplazamientos en cada nodo del elemento están representados por una traslación vertical ( $w$ ) y dos giros, uno con respecto a  $x$  y otro con respecto a  $y$ . Por tanto el número de grados de libertad o incógnitas por nodo es igual a tres, tal como se muestra en la Figura 6.15, con lo cual cada nodo del elemento tiene tres parámetros nodales. Es importante mencionar que el vector desplazamiento adoptado para este elemento es el siguiente:

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ \bar{\theta}_x = -\theta_y = -\left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \bar{\theta}_y = \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right\}, \quad (6.43)$$

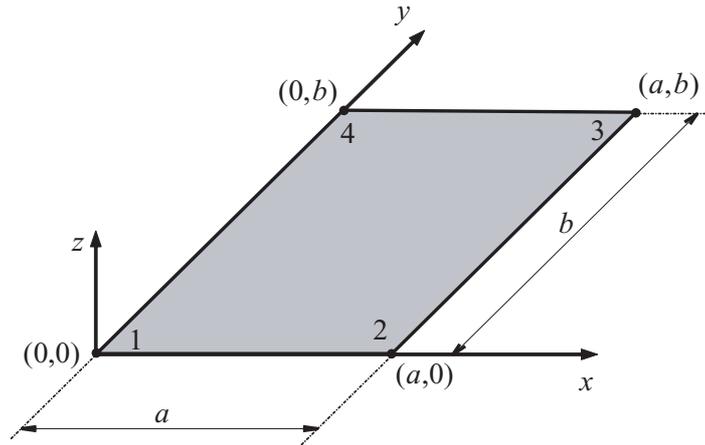


Figura 6.14: Elemento finito ACM para el estudio de placas delgadas.

donde  $\theta_x$  y  $\theta_y$  siguen la convención de signos presentada en la Figura 6.9. Se adopta este orden en el vector desplazamientos para facilitar el acoplamiento con las vigas.

Análogamente, para el caso de las fuerzas en los nodos, toda fuerza se puede expresar en función de tres componentes también asociadas a los grados de libertad, con lo cual el vector de desplazamientos nodales  $\{\delta^{(e)}\}$  y el vector de fuerzas externas nodales  $\{f^{(e)}\}$  vienen representados (véanse las Figuras 6.15 (a) y (b)), respectivamente, por las siguientes expresiones:

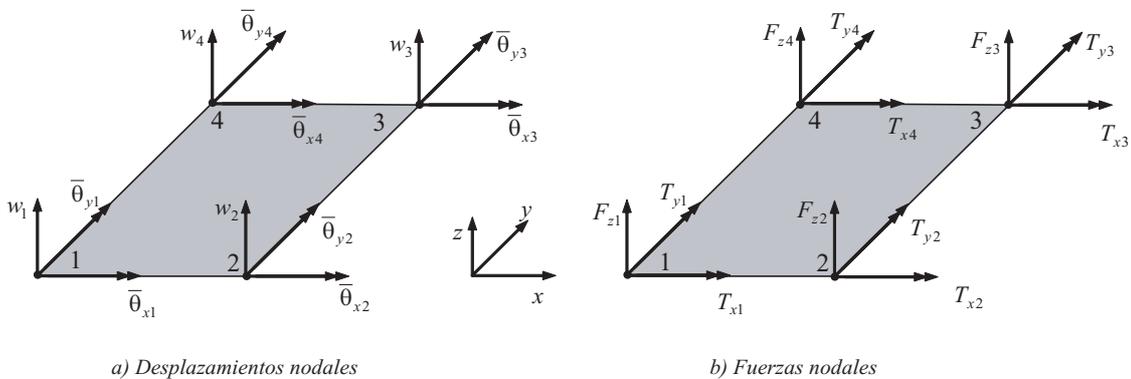


Figura 6.15: Componentes de los vectores de desplazamientos y de fuerzas externas nodales del elemento de cuatro nodos (ACM).

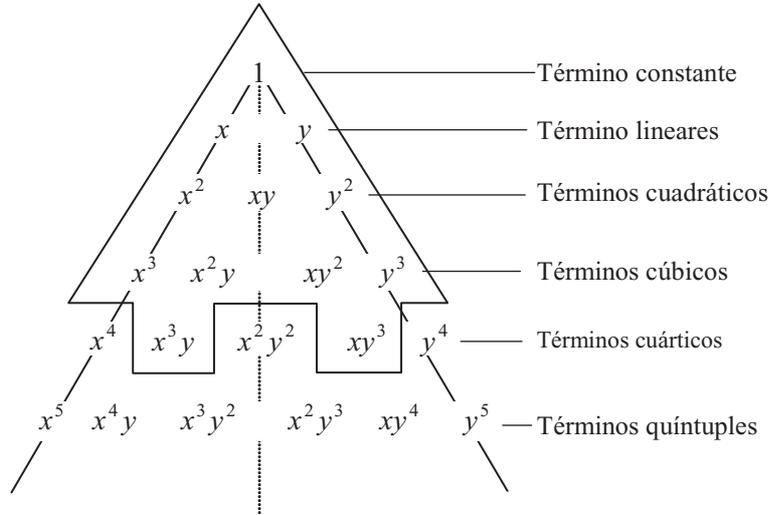


Figura 6.16: Polinomio de Pascal en 2D.

$$\{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \bar{\theta}_{x_1} \\ \bar{\theta}_{y_1} \\ w_2 \\ \bar{\theta}_{x_2} \\ \bar{\theta}_{y_2} \\ w_3 \\ \bar{\theta}_{x_3} \\ \bar{\theta}_{y_3} \\ w_4 \\ \bar{\theta}_{x_4} \\ \bar{\theta}_{y_4} \end{pmatrix} ; \quad \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ T_{x_1} \\ T_{y_1} \\ F_{x_2} \\ T_{x_2} \\ T_{y_2} \\ F_{x_3} \\ T_{x_3} \\ T_{y_3} \\ F_{x_4} \\ T_{x_4} \\ T_{y_4} \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

- Paso 2: Selección de la función de desplazamientos  $\{\boldsymbol{\delta}(x, y)\}$ .** En este caso, dado que el elemento ACM posee 12 grados de libertad en total, la función con la que se representa el campo de desplazamientos tiene 12 coeficientes asociados a los 12 términos del polinomio de Pascal mostrados en la Figura 6.16. Así, el desplazamiento vertical en el elemento en función de las coordenadas  $x$  e  $y$  queda como:

$$w = \{ 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3 \} \{\boldsymbol{\alpha}\}, \tag{6.45}$$

donde  $\{\boldsymbol{\alpha}\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}^T$  es un vector con 12 constantes a determinar.

Una vez definido el desplazamiento vertical en el elemento, las rotaciones se obtienen empleando la expresión (6.43):

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_x &= \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5x + 2\alpha_6y + \alpha_8x^2 + 2\alpha_9xy + 3\alpha_{10}y^2 + \alpha_{11}x^3 + 3\alpha_{12}xy^2 \\ \bar{\theta}_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} = -\alpha_2 - 2\alpha_4x - \alpha_5y - 3\alpha_7x^2 - 2\alpha_8xy - \alpha_9y^2 - 3\alpha_{11}x^2y - \alpha_{12}y^3. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Si se disponen las expresiones (6.45) y (6.46) en forma matricial, el vector de desplazamientos  $\{\delta(x, y)\}$ , queda como:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} w \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix}}_{\{\delta(x,y)\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{X}]} \{\alpha\} =$$

$$= [\mathbf{X}] \{\alpha\}. \quad (6.47)$$

- Paso 3: Representación de los desplazamientos dentro del elemento.** En esta etapa se pretende representar los desplazamientos dentro del elemento,  $\{\delta(x, y)\}$ , en función de los desplazamientos nodales,  $\{\delta^{(e)}\}$ , es decir, que los parámetros  $\{\alpha\}$  de la ecuación (6.47) queden en función de los desplazamientos nodales:

$$\{\delta^{(e)}\} = [\mathbf{A}] \{\alpha\}. \quad (6.48)$$

La matriz  $[\mathbf{A}]$  se obtiene partiendo de que la solución adoptada (6.47) es válida para todos los puntos del elemento, y particularizando la función de los desplazamientos en las coordenadas de los cuatro nodos del elemento ACM, con lo que se obtiene:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & 0 & 0 & -3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & -b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -b^2 & 0 & 0 & -b^3 \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

La forma inversa de la expresión (6.48) es:

$$\{\alpha\} = [\mathbf{A}]^{-1} \{\delta^{(e)}\}, \quad (6.50)$$

donde la inversa de  $[\mathbf{A}]$  es:

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{a^2} & 0 & \frac{2}{a} & \frac{3}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{ab} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{ab} & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{b} \\ -\frac{3}{b^2} & -\frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{b^2} & -\frac{1}{b} & 0 \\ \frac{2}{a^3} & 0 & -\frac{1}{a^2} & -\frac{2}{a^3} & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{a^2b} & 0 & -\frac{2}{ab} & -\frac{3}{a^2b} & 0 & -\frac{1}{ab} & \frac{3}{a^2b} & 0 & \frac{1}{ab} & -\frac{3}{a^2b} & 0 & \frac{2}{ab} \\ \frac{3}{ab^2} & \frac{2}{ab} & 0 & -\frac{3}{ab^2} & -\frac{2}{ab} & 0 & \frac{3}{ab^2} & -\frac{1}{ab} & 0 & -\frac{3}{ab^2} & \frac{1}{ab} & 0 \\ \frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} & 0 \\ -\frac{2}{a^3b} & 0 & \frac{1}{a^2b} & \frac{2}{a^3b} & 0 & \frac{1}{a^2b} & -\frac{2}{a^3b} & 0 & -\frac{1}{a^2b} & \frac{2}{a^3b} & 0 & -\frac{1}{a^2b} \\ -\frac{2}{ab^3} & -\frac{1}{ab^2} & 0 & \frac{2}{ab^3} & \frac{1}{ab^2} & 0 & -\frac{2}{ab^3} & \frac{1}{ab^2} & 0 & \frac{2}{ab^3} & -\frac{1}{ab^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.51)$$

Reemplazando (6.50) en la expresión (6.47), se puede obtener la expresión del desplazamiento dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales:

$$\{\boldsymbol{\delta}(x, y)\} = [\mathbf{X}] [\mathbf{A}]^{-1} \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}, \quad (6.52)$$

o

$$\{\boldsymbol{\delta}(x, y)\} = [\mathbf{N}] \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\} \quad \text{donde} \quad [\mathbf{N}] = [\mathbf{X}] [\mathbf{A}]^{-1}. \quad (6.53)$$

- **Paso 4: Establecimiento de la relación deformación-desplazamiento ( $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\}$ - $\boldsymbol{\delta}^{(e)}$ ) dentro del elemento.** Dado que en las ecuaciones de la elasticidad intervienen las deformaciones es preciso relacionar para un elemento dado, las deformaciones  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\}$  con los desplazamientos nodales  $\{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}$ . Las deformaciones según la teoría de Kirchhoff para placas delgadas están relacionadas mediante las expresiones (6.22):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -z \{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}\}. \quad (6.54)$$

Reemplazando el campo de desplazamientos ( $w$ ) adoptado (véase la expresión (6.45)), en (6.54) se obtiene que el vector de deformaciones independientes:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} (2\alpha_4 + 6\alpha_7x + 2\alpha_8y + 6\alpha_{11}xy) \\ (2\alpha_6 + 2\alpha_9x + 6\alpha_{10}y + 6\alpha_{12}xy) \\ 2(\alpha_5 + 2\alpha_8x + 2\alpha_9y + 3\alpha_{11}x^2 + 3\alpha_{12}y^2) \end{Bmatrix}, \quad (6.55)$$

que expresado en forma matricial queda como:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\} &= -z \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{G}]} \{\boldsymbol{\alpha}\} \\ &= -z [\mathbf{G}] \{\boldsymbol{\alpha}\}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Reemplazando (6.50) en la expresión (6.56) se obtiene:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\} = -z [\mathbf{G}] [\mathbf{A}]^{-1} \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\} = [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}, \quad (6.57)$$

expresión que nos permite relacionar las deformaciones dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales.

También se define el siguiente vector que es útil a la hora de definir los momentos:

$$\{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}] [\mathbf{A}]^{-1} \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}. \quad (6.58)$$

La matriz  $[\mathbf{B}]$  se puede expresar como  $[\mathbf{B}_1 ; \mathbf{B}_2 ; \mathbf{B}_3 ; \mathbf{B}_4]$  cuya expresión analítica es igual a:

$$[\mathbf{B}]^T = z \begin{bmatrix} \frac{6(a-2x)(b-y)}{a^3b} & \frac{6(a-x)(b-2y)}{ab^3} & \frac{2((b^2-6yb+6y^2)a^2-6b^2xa+6b^2x^2)}{a^3b^3} \\ 0 & \frac{2(a-x)(2b-3y)}{ab^2} & \frac{2(b-3y)(b-y)}{ab^2} \\ -\frac{2(2a-3x)(b-y)}{a^2b} & 0 & -\frac{2(a-3x)(a-x)}{a^2b} \\ -\frac{6(a-2x)(b-y)}{a^3b} & \frac{6x(b-2y)}{ab^3} & -\frac{2((b^2-6yb+6y^2)a^2-6b^2xa+6b^2x^2)}{a^3b^3} \\ 0 & \frac{4bx-6xy}{ab^2} & -\frac{2(b-3y)(b-y)}{ab^2} \\ -\frac{2(a-3x)(b-y)}{a^2b} & 0 & \frac{2(2a-3x)x}{a^2b} \\ -\frac{6(a-2x)y}{a^3b} & -\frac{6x(b-2y)}{ab^3} & \frac{2((b^2-6yb+6y^2)a^2-6b^2xa+6b^2x^2)}{a^3b^3} \\ 0 & \frac{2x(b-3y)}{ab^2} & \frac{2(2b-3y)y}{ab^2} \\ -\frac{2(a-3x)y}{a^2b} & 0 & \frac{6x^2-4ax}{a^2b} \\ \frac{6(a-2x)y}{a^3b} & -\frac{6(a-x)(b-2y)}{ab^3} & -\frac{2((b^2-6yb+6y^2)a^2-6b^2xa+6b^2x^2)}{a^3b^3} \\ 0 & \frac{2(a-x)(b-3y)}{ab^2} & \frac{6y^2-4by}{ab^2} \\ \frac{6xy-4ay}{a^2b} & 0 & \frac{2(a-3x)(a-x)}{a^2b} \end{bmatrix}. \quad (6.59)$$

- **Paso 5: Establecimiento de la relación momentos flectores - desplazamientos nodales ( $\{\mathbf{M}^{(e)}\}$ - $\delta^{(e)}$ ) dentro del elemento.** Partiendo de las ecuaciones (6.30) y de la expresión de  $\{\hat{\varepsilon}\}$  dada por la expresión (6.58) se llega a la siguiente expresión:

$$\{\mathbf{M}\} = -[\mathbf{D}_K] \{\hat{\varepsilon}\} = -[\mathbf{D}_K][\mathbf{G}][\mathbf{A}]^{-1} \{\delta^{(e)}\}, \quad (6.60)$$

que relaciona los momentos flectores con los desplazamientos nodales dentro del elemento ACM.

- **Paso 6: Establecimiento de la relación fuerzas-desplazamientos nodales.** El último paso para obtener la matriz de rigidez del elemento ACM consiste en establecer la relación entre la fuerza  $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$  y el desplazamiento nodal  $\{\delta^{(e)}\}$ , precisamente esta relación viene dada por la matriz de rigidez del elemento  $\{\mathbf{k}^{(e)}\}$ .

Aplicando el *Teorema del Trabajo Virtual*, se imponen unos desplazamientos virtuales  $\{\bar{\delta}^{(e)}\}$  en los nodos del elemento de forma que el trabajo externo total, que viene dado por la expresión:

$$W_{ext} = \{\bar{\delta}^{(e)}\}^T \{\mathbf{f}^{(e)}\}, \quad (6.61)$$

sea igual al trabajo interno total. Este último viene dado por la integral en el volumen del elemento:

$$\int_V \{\bar{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV \quad (6.62)$$

donde  $\{\bar{\varepsilon}\}$  es el vector de deformaciones virtuales y  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  es el vector tensor de tensiones. Si la expresión 6.57 es válida, también es válida para el vector de deformaciones virtuales:

$$\{\bar{\varepsilon}(x, y)\} = -z \{\bar{\hat{\varepsilon}}(x, y)\} \quad \text{con} \quad \{\bar{\hat{\varepsilon}}(x, y)\} = [\mathbf{G}][\mathbf{A}]^{-1} \{\bar{\delta}^{(e)}\} \quad (6.63)$$

Reemplazando la expresión anterior en el trabajo interno (6.62) obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_V -z \{\bar{\delta}^{(e)}\}^T [\mathbf{A}]^{-T} [\mathbf{G}]^T \{\sigma\} dV \\ \Rightarrow & \int_A \left[ \{\bar{\delta}^{(e)}\}^T [\mathbf{A}]^{-T} [\mathbf{G}]^T \left( \int_z -z \{\sigma\} dz \right) \right] dA \end{aligned} \quad (6.64)$$

Obsérvese que a través de las expresiones (6.25) y (6.30), se puede decir que:

$$\int_Z -z \{\sigma\} dz = -\{\mathbf{M}\} = -(-[\mathbf{D}_K] \{\hat{\varepsilon}\}) = [\mathbf{D}_K] [\mathbf{G}] [\mathbf{A}]^{-1} \{\delta^{(e)}\}, \quad (6.65)$$

resultando que el trabajo interno viene dado por:

$$W_{int} = \{\bar{\delta}^{(e)}\}^T \int_A \left[ [\mathbf{A}]^{-T} [\mathbf{G}]^T [\mathbf{D}_K] [\mathbf{G}] [\mathbf{A}]^{-1} \right] dA \{\delta^{(e)}\}. \quad (6.66)$$

Igualando el trabajo externo  $W_{ext}$  (6.61), con el trabajo interno  $W_{int}$  (6.66), se llega a la siguiente expresión:

$$\{\bar{\delta}^{(e)}\}^T \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \{\bar{\delta}^{(e)}\}^T \int_0^b \int_0^a [\mathbf{A}]^{-T} [\mathbf{G}]^T [\mathbf{D}_K] [\mathbf{G}] [\mathbf{A}]^{-1} dx dy \{\delta^{(e)}\}, \quad (6.67)$$

que simplificando queda como:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \int_0^b \int_0^a [\mathbf{A}]^{-T} [\mathbf{G}]^T [\mathbf{D}_K] [\mathbf{G}] [\mathbf{A}]^{-1} dx dy \{\delta^{(e)}\}. \quad (6.68)$$

Identificando los términos de esta expresión con la ecuación (6.42) se deduce que la matriz de rigidez del elemento ACM es igual a:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_0^b \int_0^a [\mathbf{A}]^{-T} [\mathbf{G}]^T [\mathbf{D}_K] [\mathbf{G}] [\mathbf{A}]^{-1} dx dy. \quad (6.69)$$

La expresión analítica de la matriz de rigidez se puede obtener por integración numérica teniendo en cuenta que  $[\mathbf{G}] [\mathbf{A}^{-1}] = [\mathbf{B}]^T / z$ , y que con dos puntos de Gauss por dimensión se obtiene la integral exacta. Alternativamente se puede emplear la expresión cerrada de la matriz de rigidez mostrada en las Figuras 6.17 y 6.18.

$$\left[ \mathbf{k}^{(e)} \right] = \begin{bmatrix}
 \frac{2D(10a^4+b^2(7-2\nu)a^2+10b^4)}{5q^3b^3} & \frac{D\left(\frac{10a^2}{b^2}+4\nu+1\right)}{5a} & \frac{D((4\nu+1)a^2+10b^2)}{5a^2b} & \frac{2D(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2-10b^4)}{5q^3b^3} & \frac{D\left(\frac{5a^2}{b^2}-4\nu-1\right)}{5a} & \frac{D(a^2(\nu-1)-10b^2)}{5a^2b} \dots \\
 \frac{D\left(\frac{10a^2}{b^2}+4\nu+1\right)}{5a} & \frac{4D(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab} & -D\nu & \frac{D\left(\frac{5a^2}{b^2}-4\nu-1\right)}{5a} & \frac{2D(5a^2+2b^2(\nu-1))}{15ab} & 0 \dots \\
 -\frac{D((4\nu+1)a^2+10b^2)}{5a^2b} & -D\nu & \frac{4D(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab} & \frac{D\left(\frac{10b^2}{a^2}-\nu+1\right)}{5b} & 0 & \frac{D((\nu-1)a^2+10b^2)}{15ab} \dots \\
 \frac{2D(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2-10b^4)}{5q^3b^3} & \frac{D\left(\frac{5a^2}{b^2}-4\nu-1\right)}{5a} & \frac{D\left(\frac{10b^2}{a^2}-\nu+1\right)}{5b} & \frac{2D(10a^4+b^2(7-2\nu)a^2+10b^4)}{5q^3b^3} & \frac{D\left(\frac{10a^2}{b^2}+4\nu+1\right)}{5a} & \frac{D\left(\frac{10b^2}{a^2}+4\nu+1\right)}{5b} \dots \\
 \frac{D\left(\frac{5a^2}{b^2}-4\nu-1\right)}{5a} & \frac{2D(5a^2+2b^2(\nu-1))}{15ab} & 0 & \frac{D\left(\frac{10a^2}{b^2}+4\nu+1\right)}{5a} & \frac{4D(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab} & D\nu \dots \\
 \frac{D(a^2(\nu-1)-10b^2)}{5a^2b} & 0 & \frac{D((\nu-1)a^2+10b^2)}{15ab} & \frac{D\left(\frac{10b^2}{a^2}+4\nu+1\right)}{5b} & D\nu & \frac{4D(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab} \dots \\
 -\frac{2D(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5a^3b^3} & \frac{D\left(-\frac{5a^2}{b^2}-\nu+1\right)}{5a} & \frac{D((\nu-1)a^2+5b^2)}{5a^2b} & \frac{2D(-10a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5q^3b^3} & \frac{D\left(-\frac{10a^2}{b^2}+\nu-1\right)}{5a} & \frac{D\left(\frac{5b^2}{a^2}-4\nu-1\right)}{5b} \dots \\
 \frac{D(5a^2+b^2(\nu-1))}{5q^3b^3} & \frac{D(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab} & 0 & \frac{D\left(\frac{10a^2}{b^2}-\nu+1\right)}{5a} & \frac{D(10a^2+b^2(\nu-1))}{15ab} & 0 \dots \\
 \frac{D\left(-\frac{5b^2}{a^2}-\nu+1\right)}{5b} & 0 & \frac{D(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab} & \frac{D\left(\frac{5b^2}{a^2}-4\nu-1\right)}{5b} & 0 & \frac{2D(2(\nu-1)a^2+5b^2)}{15ab} \dots \\
 \frac{2D(-10a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5q^3b^3} & \frac{D\left(-\frac{10a^2}{b^2}+\nu-1\right)}{5a} & \frac{D\left(-\frac{5b^2}{a^2}+4\nu+1\right)}{5b} & \frac{2D(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5q^3b^3} & \frac{D\left(-\frac{5a^2}{b^2}-\nu+1\right)}{5a} & \frac{D\left(-\frac{5b^2}{a^2}-\nu+1\right)}{5b} \dots \\
 \frac{D\left(\frac{10a^2}{b^2}-\nu+1\right)}{5a} & \frac{D(10a^2+b^2(\nu-1))}{15ab} & 0 & \frac{D(5a^2+b^2(\nu-1))}{5ab^2} & \frac{D(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab} & 0 \dots \\
 \frac{D\left(-\frac{5b^2}{a^2}+4\nu+1\right)}{5b} & 0 & \frac{2D(2(\nu-1)a^2+5b^2)}{15ab} & \frac{D((\nu-1)a^2+5b^2)}{5a^2b} & 0 & \frac{D(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab} \dots
 \end{bmatrix}$$

Figura 6.17: Matriz de rigidez del elemento ACM.

$\mathbf{k}_{i7}^{(e)}$	$\mathbf{k}_{i8}^{(e)}$	$\mathbf{k}_{i9}^{(e)}$	$\mathbf{k}_{i10}^{(e)}$	$\mathbf{k}_{i11}^{(e)}$	$\mathbf{k}_{i12}^{(e)}$
$\frac{2D(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5a^3b^3}$	$\frac{D(5a^2+b^2(\nu-1))}{5ab^2}$	$\frac{D(-\frac{5b^2}{a^2}-\nu+1)}{5b}$	$\frac{2D(-10a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5a^3b^3}$	$\frac{D(-\frac{10a^2}{b^2}-\nu+1)}{5a}$	$\frac{D(-\frac{5b^2}{a^2}+4\nu+1)}{5b}$
$\frac{D(-\frac{5a^2}{b^2}-\nu+1)}{5a}$	$\frac{D(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab}$	0	$\frac{D(-\frac{10a^2}{b^2}+\nu-1)}{5a}$	$\frac{D(10a^2+b^2(\nu-1))}{15ab}$	0
$\frac{D((\nu-1)a^2+5b^2)}{5a^2b}$	0	$\frac{D(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab}$	$\frac{D(-\frac{5b^2}{a^2}+4\nu+1)}{5b}$	0	$\frac{2D(2(\nu-1)a^2+5b^2)}{15ab}$
$\frac{2D(-10a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5a^3b^3}$	$\frac{D(\frac{10a^2}{b^2}-\nu+1)}{5a}$	$\frac{D(\frac{5b^2}{a^2}-4\nu-1)}{5b}$	$\frac{2D(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5a^3b^3}$	$\frac{D(5a^2+b^2(\nu-1))}{5ab^2}$	$\frac{D((\nu-1)a^2+5b^2)}{5a^2b}$
$\frac{D(-\frac{10a^2}{b^2}+\nu-1)}{5a}$	$\frac{D(10a^2+b^2(\nu-1))}{15ab}$	0	$\frac{D(-\frac{5a^2}{b^2}-\nu+1)}{5a}$	$\frac{D(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab}$	0
$\frac{D(\frac{5b^2}{a^2}-4\nu-1)}{5b}$	0	$\frac{2D(2(\nu-1)a^2+5b^2)}{15ab}$	$\frac{D(-\frac{5b^2}{a^2}-\nu+1)}{5b}$	0	$\frac{D(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab}$
$\frac{2D(10a^4+b^2(7-2\nu)a^2+10b^4)}{5a^3b^3}$	$\frac{D(10a^2+b^2(4\nu+1))}{5ab^2}$	$\frac{D(\frac{10b^2}{a^2}+4\nu+1)}{5b}$	$\frac{2D(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2-10b^4)}{5a^3b^3}$	$\frac{D(-\frac{5a^2}{b^2}+4\nu+1)}{5a}$	$\frac{D(\frac{10b^2}{a^2}-\nu+1)}{5b}$
$\frac{D(10a^2+b^2(4\nu+1))}{5ab^2}$	$\frac{4D(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab}$	$-D\nu$	$\frac{D(-\frac{5a^2}{b^2}+4\nu+1)}{5a}$	$\frac{2D(5a^2+2b^2(\nu-1))}{15ab}$	0
$\frac{D(\frac{10b^2}{a^2}+4\nu+1)}{5b}$	$-D\nu$	$\frac{4D(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab}$	$\frac{D(a^2(\nu-1)-10b^2)}{5a^2b}$	0	$\frac{D((\nu-1)a^2+10b^2)}{15ab}$
$\frac{2D(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2-10b^4)}{5a^3b^3}$	$\frac{D(-\frac{5a^2}{b^2}+4\nu+1)}{5a}$	$\frac{D(a^2(\nu-1)-10b^2)}{5a^2b}$	$\frac{2D(10a^4+b^2(7-2\nu)a^2+10b^4)}{5a^3b^3}$	$\frac{D(10a^2+b^2(4\nu+1))}{5ab^2}$	$\frac{D((4\nu+1)a^2+10b^2)}{5a^2b}$
$\frac{D(-\frac{5a^2}{b^2}+4\nu+1)}{5a}$	$\frac{2D(5a^2+2b^2(\nu-1))}{15ab}$	0	$\frac{D(10a^2+b^2(4\nu+1))}{5ab^2}$	$\frac{4D(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab}$	$D\nu$
$\frac{D(\frac{10b^2}{a^2}-\nu+1)}{5b}$	0	$\frac{D((\nu-1)a^2+10b^2)}{15ab}$	$\frac{D((4\nu+1)a^2+10b^2)}{5a^2b}$	$D\nu$	$\frac{4D(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab}$

Figura 6.18: Matriz de rigidez del elemento ACM.

## 6.4.1.1. Vector de Fuerzas Nodales

Para el vector de fuerzas externas nodales,  $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$ , sólo se considera una carga uniformemente distribuida (véase la Figura 6.19). Para este caso particular, el vector de fuerza nodales equivalente,  $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$ , viene dado por:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \int_A [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\} dA, \quad (6.70)$$

donde  $\{\mathbf{P}\}$  es el vector con las fuerzas en el elemento.

Considerando la expresión (6.53) se puede decir que:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}^{(e)}\} &= \int_A [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\} dA \\ &= \int_A \left([\mathbf{X}] [\mathbf{A}]^{-1}\right)^T \{\mathbf{P}\} dA \\ &= \int_A [\mathbf{A}]^{-T} [\mathbf{X}]^T \{\mathbf{P}\} dA. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Siendo la matriz  $[\mathbf{A}]^{-1}$  constante en un elemento de placa (6.51), se concluye que:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = [\mathbf{A}]^{-T} \int_A [\mathbf{X}]^T \{\mathbf{P}\} dA. \quad (6.72)$$

El vector  $\{\mathbf{P}\}$  depende del tipo de carga que se adopta en el elemento, pudiendo ser variable o no dentro del mismo. En este caso el vector de cargas viene dado por:

$$\{\mathbf{P}\} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.73)$$

Teniendo en cuenta las expresiones de  $[\mathbf{X}]$  (6.47),  $\{\mathbf{P}\}$  (6.73) y la matriz  $[\mathbf{A}]^{-1}$  (6.51), se obtiene el vector de fuerza externas nodales:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ T_{x1} \\ T_{y1} \\ F_{x2} \\ T_{x2} \\ T_{y2} \\ F_{x3} \\ T_{x3} \\ T_{y3} \\ F_{x4} \\ T_{x4} \\ T_{y4} \end{Bmatrix} = \frac{abq}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{6}b \\ -\frac{1}{6}a \\ 1 \\ \frac{1}{6}b \\ \frac{1}{6}a \\ 1 \\ -\frac{1}{6}b \\ \frac{1}{6}a \\ 1 \\ -\frac{1}{6}b \\ -\frac{1}{6}a \end{Bmatrix}. \quad (6.74)$$

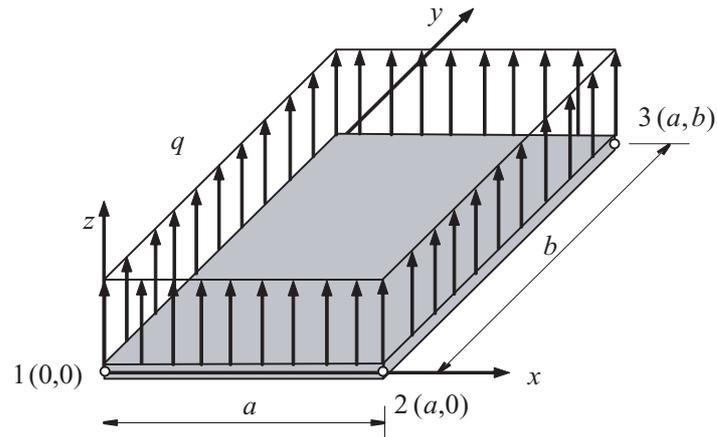


Figura 6.19: Carga considerada en el elemento de placa.

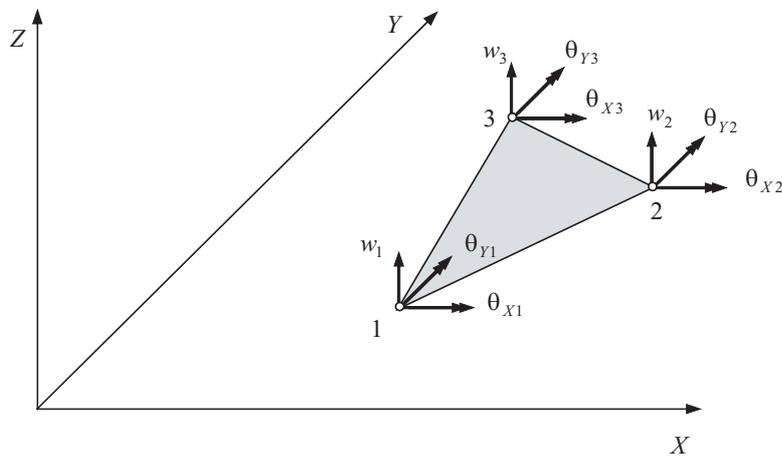


Figura 6.20: Grados de libertad del elemento finito DKT para placas.

#### 6.4.2. Elemento Finito Triangular de Placas (DKT)

El elemento DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*) está constituido por 3 nodos con 3 grados de libertad por nodo, tal y como se muestra en la Figura 6.20.

La demostración de como se obtiene la matriz de rigidez del elemento triangular DKT y los esfuerzos, se recomiendan las referencias [Jeyachandrabose et al., 1985], [Batoz, 1982], y [Batoz et al., 1980].

A continuación se muestra la subrutina para obtener la matriz de rigidez del elemento de placa DKT.

```
function [ke,Ae]=rigidDKT(x,E,nu,t);
%
% Funcion que obtiene la matriz de rigidez de un elemento DKT
% trabajando en 2 dimensiones (en el plano del forjado)
% en coordenadas globales
```

```

%
% Salida:
% ke->Matriz de rigidez del elemento DKT
% Ae->Area del elemento
%
% Recibe como datos:
% x-> matriz con las coordenadas de los nodos del elemento
% E-> modulos de elasticidad del material
% nu-> coeficiente de Poisson del material
% t-> espesor del material
%
if nargin ~= 4,
    error('Numero de argumentos incorrecto,...
    compruebe los datos de entrada');
end
% Numero de nodos por elemento y la dimension del problema
% a partir de las dimensiones de matriz de coordenadas X
[nne,dim] = size(x); if nne ~= 3,
    error('El elemento DKT ha de tener tres nodos');
end
% El numero de grados de libertad es igual a 3
ngn = 3;
% Matriz constitutiva
Dk = mcons(E,nu,t);
% Valores auxiliares
KOD = [1 2 3 4 5 6 7 8 9;
        1 3 2 4 6 5 7 9 8];
PP = [12 4 4;
        4 2 1;
        4 1 2];

BB = zeros(nne,1); CC = zeros(nne,1);

BB(1)=x(2,2)-x(3,2); BB(2)=x(3,2)-x(1,2); BB(3)=x(1,2)-x(2,2);
CC(1)=x(3,1)-x(2,1); CC(2)=x(1,1)-x(3,1); CC(3)=x(2,1)-x(1,1);

DET=(BB(1)*CC(2)-BB(2)*CC(1))*24;

DD = zeros(nne*ngn);

for i = 1:nne,
    for j = 1:nne,
        for k1 = 1:ngn,
            ii = (i-1)*ngn+k1;
            for k2 = 1:ngn,
                jj=(j-1)*ngn+k2;
                DD(ii,jj)=Dk(i,j)*PP(k1,k2)/DET;
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end

ALS = zeros(nne,1); RS = zeros(2,nne);

for i = 1:nne,
    ALS(i)=BB(i)*BB(i)+CC(i)*CC(i);
    PT(1,i)=6*CC(i)/ALS(i);
    PT(2,i)=6*BB(i)/ALS(i);
    RS(1,i)=3*CC(i)^2/ALS(i);
    RS(2,i)=3*BB(i)^2/ALS(i);
    Q(i)=3*BB(i)*CC(i)/ALS(i);
end

GG = zeros(nne*ngn+1,nne*ngn);

for i = 1:2,
    ii=(i-1)*5;
    GG(ii+1,KOD(i,1))=PT(i,3);
    GG(ii+2,KOD(i,1))=-PT(i,2);
    GG(ii+3,KOD(i,1))=-PT(i,3);
    GG(ii+4,KOD(i,1))=PT(i,2)-PT(i,3);
    GG(ii+5,KOD(i,1))=PT(i,2);
    GG(ii+1,KOD(i,2))=-Q(3);
    GG(ii+2,KOD(i,2))=-Q(2);
    GG(ii+3,KOD(i,2))=Q(3);
    GG(ii+4,KOD(i,2))=Q(2)+Q(3);
    GG(ii+5,KOD(i,2))=Q(2);
    GG(ii+1,KOD(i,3))=-1-RS(i,3);
    GG(ii+2,KOD(i,3))=-1-RS(i,2);
    GG(ii+3,KOD(i,3))=RS(i,3);
    GG(ii+4,KOD(i,3))=RS(i,2)+RS(i,3);
    GG(ii+5,KOD(i,3))=RS(i,2);
    GG(ii+1,KOD(i,3))=-1-RS(i,3);
    GG(ii+1,KOD(i,4))=-PT(i,3);
    GG(ii+3,KOD(i,4))=PT(i,3);
    GG(ii+4,KOD(i,4))=PT(i,1)+PT(i,3);
    GG(ii+1,KOD(i,5))=-Q(3);
    GG(ii+3,KOD(i,5))=Q(3);
    GG(ii+4,KOD(i,5))=Q(3)-Q(1);
    GG(ii+1,KOD(i,6))=1-RS(i,3);
    GG(ii+3,KOD(i,6))=RS(i,3);
    GG(ii+4,KOD(i,6))=RS(i,3)-RS(i,1);
    GG(ii+2,KOD(i,7))=PT(i,2);
    GG(ii+4,KOD(i,7))=-PT(i,1)-PT(i,2);
    GG(ii+5,KOD(i,7))=-PT(i,2);
    GG(ii+2,KOD(i,8))=-Q(2);
    GG(ii+4,KOD(i,8))=Q(2)-Q(1);

```

```

    GG(ii+5,KOD(i,8))=Q(2);
    GG(ii+2,KOD(i,9))=1-RS(i,2);
    GG(ii+4,KOD(i,9))=RS(i,2)-RS(i,1);
    GG(ii+5,KOD(i,9))=RS(i,2);
end

QQ = zeros(nne*ngn);

for i=1:nne*ngn,
    QQ(1,i)=BB(2)*GG(1,i)+BB(3)*GG(2,i);
    QQ(2,i)=2*BB(2)*GG(3,i)+BB(3)*GG(4,i);
    QQ(3,i)=BB(2)*GG(4,i)+2*BB(3)*GG(5,i);
    QQ(4,i)=-CC(2)*GG(6,i)-CC(3)*GG(7,i);
    QQ(5,i)=-2*CC(2)*GG(8,i)-CC(3)*GG(9,i);
    QQ(6,i)=-CC(2)*GG(9,i)-2*CC(3)*GG(10,i);
    QQ(7,i)=CC(2)*GG(1,i)+CC(3)*GG(2,i)-BB(2)*GG(6,i)-BB(3)*GG(7,i);
    QQ(8,i)=2*CC(2)*GG(3,i)+CC(3)*GG(4,i)...
    -2*BB(2)*GG(8,i)-BB(3)*GG(9,i);
    QQ(9,i)=CC(2)*GG(4,i)+2*CC(3)*GG(5,i)...
    -BB(2)*GG(9,i)-2*BB(3)*GG(10,i);
end

SS = zeros(nne*ngn);

for i = 1:nne*ngn,
    for j = 1:nne*ngn,
        for i1=1:nne*ngn,
            SS(i,j)=SS(i,j)+DD(i,i1)*QQ(i1,j);
        end
    end
end

% Matriz de rigidez del elemento DKT en globales
ke = zeros(nne*ngn);

for i = 1:nne*ngn,
    for j = 1:nne*ngn,
        for i1=1:nne*ngn,
            ke(i,j)=ke(i,j)+QQ(i1,i)*SS(i1,j);
        end
    end
end

% Calculo del área del elemento mediante la formula del determinante
if nargout ==2,
    Ae = abs(1/2*(det([x ones(nne,1)])));
end

```

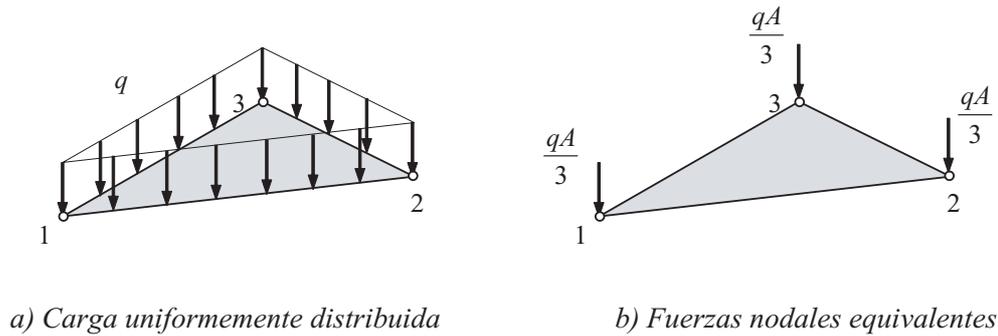


Figura 6.21: Fuerzas nodales equivalentes del elemento DKT.

En lo que respecta el vector de fuerzas externas, se considera una carga uniformemente distribuida en el elemento, y por tanto el vector de fuerzas externas (vector de fuerzas nodales equivalentes), mostrado en la Figura 6.21, viene dado por:

$$\{ \mathbf{f}^{(e)} \} = \frac{qA}{3} \{ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \}^T, \quad (6.75)$$

donde  $q$  es la carga uniformemente distribuida, y  $A$  es el área del elemento DKT.

#### 6.4.2.1. Esfuerzos Internos en el Elemento DKT

Respecto a los esfuerzos internos en el elemento DKT, el desarrollo exhaustivo se puede consultar en las siguientes referencias [Jeyachandrabose et al., 1985], [Batoz, 1982], y [Batoz et al., 1980]. A continuación se muestra la subrutina para la obtención de los momentos.

```
function [Me]=esfuerzoDKT(x,E,nu,t,ue);
%
% Funcion que obtiene los esfuerzos de un elemento DKT
% trabajando en 2 dimensiones (en el plano del forjado)
% en coordenadas globales
%
% Salida:
% Me->Esfuerzos del elemento
%
% Recibe como datos:
% x-> matriz con las coordenadas de los nodos del elemento
% E-> modulos de elasticidad del material
% nu-> coeficiente de Poisson del material
% t-> espesor del material
% ue-> desplazamientos de los nodos
%
if nargin ~= 5,
    error('Numero de argumentos incorrecto, compruebe los datos de entrada');
end
% Numero de nodos por elemento y la dimension del problema
% a partir de las dimensiones de matriz de coordenadas X
```

```

[nne,dim] = size(x);
if nne ~= 3,
    error('El elemento DKT ha de tener tres nodos');
end
% El numero de grados de libertad es igual a 3
ngn = 3;
% Matriz constitutiva
Dk = mcons(E,nu,t);

ul = [];
for i = 1:nne,
    ul = [ul; ue(i,:)'];
end

RL12=sqrt((x(2,1)-x(1,1))^2+(x(2,2)-x(1,2))^2);
RL23=sqrt((x(3,1)-x(2,1))^2+(x(3,2)-x(2,2))^2);
RL31=sqrt((x(1,1)-x(3,1))^2+(x(1,2)-x(3,2))^2);
X12=x(1,1)-x(2,1);
X23=x(2,1)-x(3,1);
X31=x(3,1)-x(1,1);
Y12=x(1,2)-x(2,2);
Y23=x(2,2)-x(3,2);
Y31=x(3,2)-x(1,2);
P4=-6*X23/RL23/RL23;
P5=-6*X31/RL31/RL31;
P6=-6*X12/RL12/RL12;
Q4=3*X23*Y23/RL23/RL23;
Q5=3*X31*Y31/RL31/RL31;
Q6=3*X12*Y12/RL12/RL12;
T4=-6*Y23/RL23/RL23;
T5=-6*Y31/RL31/RL31;
T6=-6*Y12/RL12/RL12;
R4=3*Y23*Y23/RL23/RL23;
R5=3*Y31*Y31/RL31/RL31;
R6=3*Y12*Y12/RL12/RL12;

H1X = zeros(ngn*nne,1);
H1Y = zeros(ngn*nne,1);
H2X = zeros(ngn*nne,1);
H2Y = zeros(ngn*nne,1);
BET = zeros(ngn,ngn*nne);
MXT=zeros(nne+1,1);
MYT=zeros(nne+1,1);
MXYT=zeros(nne+1,1);
for j = 1:4,
    if j==1,
        ETA=0;
        QUISI=0;
    end
end

```

```

elseif j==2,
    ETA=0;
    QUISI=1;
else
    ETA=1;
    QUISI=0;
end
if j==4,
    ETA=0.5;
    QUISI=0.5;
end
H1X(1)=P6*(1-2*QUISI)+(P5-P6)*ETA;
H1X(2)=Q6*(1-2*QUISI)-(Q5+Q6)*ETA;
H1X(3)=-4+6*(QUISI+ETA)+R6*(1-2*QUISI)-ETA*(R5+R6);
H1X(4)=-P6*(1-2*QUISI)+ETA*(P4+P6);
H1X(5)=Q6*(1-2*QUISI)-ETA*(Q6-Q4);
H1X(6)=-2+6*QUISI+R6*(1-2*QUISI)+ETA*(R4-R6);
H1X(7)=-ETA*(P5+P4);
H1X(8)=ETA*(Q4-Q5);
H1X(9)=-ETA*(R5-R4);
H1Y(1)=T6*(1-2*QUISI)+(T5-T6)*ETA;
H1Y(2)=1+R6*(1-2*QUISI)-(R5+R6)*ETA;
H1Y(3)=-Q6*(1-2*QUISI)+ETA*(Q5+Q6);
H1Y(4)=-T6*(1-2*QUISI)+ETA*(T4+T6);
H1Y(5)=-1+R6*(1-2*QUISI)+ETA*(R4-R6);
H1Y(6)=-Q6*(1-2*QUISI)-ETA*(Q4-Q6);
H1Y(7)=-ETA*(T5+T4);
H1Y(8)=ETA*(R4-R5);
H1Y(9)=-ETA*(Q4-Q5);
H2X(1)=-P5*(1-2*ETA)-(P6-P5)*QUISI;
H2X(2)=Q5*(1-2*ETA)-(Q5+Q6)*QUISI;
H2X(3)=-4+6*(ETA+QUISI)+R5*(1-2*ETA)-QUISI*(R5+R6);
H2X(4)=QUISI*(P4+P6);
H2X(5)=-QUISI*(Q6-Q4);
H2X(6)=QUISI*(R4-R6);
H2X(7)=P5*(1-2*ETA)-QUISI*(P5+P4);
H2X(8)=Q5*(1-2*ETA)+QUISI*(Q4-Q5);
H2X(9)=-2+6*ETA+R5*(1-2*ETA)+QUISI*(R4-R5);
H2Y(1)=-T5*(1-2*ETA)+(T5-T6)*QUISI;
H2Y(2)=1+R5*(1-2*ETA)-(R5+R6)*QUISI;
H2Y(3)=-Q5*(1-2*ETA)+QUISI*(Q5+Q6);
H2Y(4)=QUISI*(T4+T6);
H2Y(5)=QUISI*(R4-R6);
H2Y(6)=-QUISI*(Q4-Q6);
H2Y(7)=T5*(1-2*ETA)-QUISI*(T5+T4);
H2Y(8)=-1+R5*(1-2*ETA)+QUISI*(R4-R5);
H2Y(9)=-Q5*(1-2*ETA)-QUISI*(Q4-Q5);
AUX=((x(3,2)-x(2,2))*(x(3,1)-x(1,1))-(x(3,2)-x(1,2))*(x(3,1)-x(2,1)));
for K=1:nne*ngn,

```

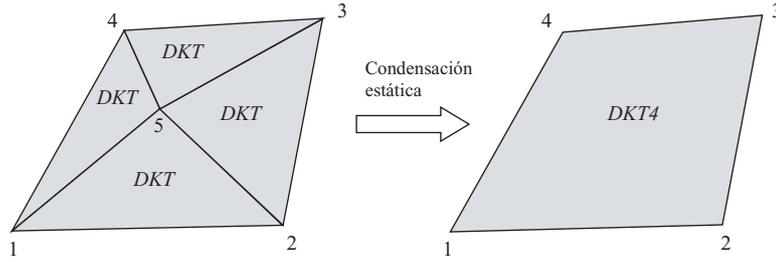


Figura 6.22: Formación del elemento DKT4.

```

BET(1,K)=(Y31*H1X(K)+Y12*H2X(K))/AUX;
BET(2,K)=(-X31*H1Y(K)-X12*H2Y(K))/AUX;
BET(3,K)=(-X31*H1X(K)-X12*H2X(K)+Y31*H1Y(K)+Y12*H2Y(K))/AUX;
end
PRO = Dk*BET;
MXT(j) = PRO(1,:)*u1;
MYT(j) = PRO(2,:)*u1;
MXYT(j) = PRO(3,:)*u1;
end

Me=[MXT(1) MYT(1) MXYT(1) MXT(2) MYT(2) MXYT(2) MXT(3) MYT(3) MXYT(3)]';

```

### 6.4.3. Elemento Finito Cuadrangular para Placas (DKT4)

El elemento DKT4 está constituido por 4 elementos DKT mediante condensación estática, tal y como se muestra en la Figura 6.22. La matriz de rigidez tiene dimensiones  $12 \times 12$  ( $[\mathbf{k}^{(e)}]_{12 \times 12}$ ). Este elemento tiene la ventaja de que no presenta ninguna preferencia con respecto a las direcciones de la malla, como ocurre con los elementos triangulares.

Para realizar la condensación estática, considérense 4 elementos finitos DKT donde los respectivos grados de libertad se muestran en la Figura 6.23. La condensación estática, utilizada para generar el elemento DKT4, consiste en eliminar los grados de libertad internos (grados 13, 14 y 15).

Los cuatro elementos finitos forman un sistema conjunto tal que:

$$\left\{ \mathbf{f}^{(conj)} \right\}_{15 \times 1} = \left[ \mathbf{k}^{(conj)} \right]_{15 \times 15} \left\{ \mathbf{u}^{(conj)} \right\}_{15 \times 1}. \quad (6.76)$$

Se puede desagrupar el sistema anterior teniendo en cuenta los grados de libertad externos ( $e$ ) e internos ( $i$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \mathbf{f}_e \}_{12 \times 1} \\ \{ \mathbf{f}_i \}_{3 \times 1} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} [\mathbf{k}_{ee}]_{12 \times 12} & [\mathbf{k}_{ei}]_{12 \times 3} \\ [\mathbf{k}_{ie}]_{3 \times 12} & [\mathbf{k}_{ii}]_{3 \times 3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \{ \mathbf{u}_e \}_{12 \times 1} \\ \{ \mathbf{u}_i \}_{3 \times 1} \end{array} \right\}, \quad (6.77)$$

donde  $e$  se refiere a los grados asociados a los nodos externos 1, 2, 3, y 4 (véase la Figura 6.22), e  $i$  se refiere a los grados de libertad del nodo central 5.

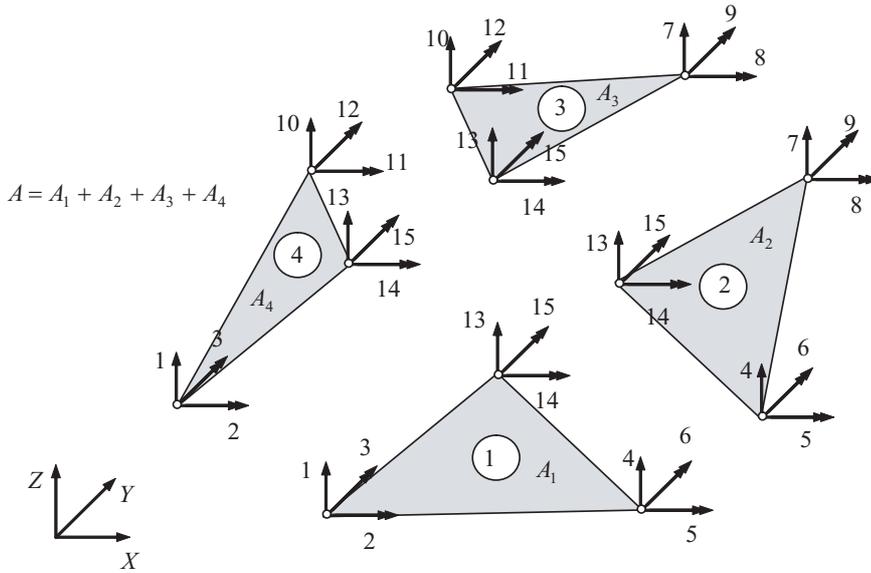


Figura 6.23: Grados de libertad asociados a los elementos DKT.

El sistema (6.77) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \{f_e\} &= [k_{ee}] \{u_e\} + [k_{ei}] \{u_i\} \\ \{f_i\} &= [k_{ie}] \{u_e\} + [k_{ii}] \{u_i\}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

De la segunda ecuación del sistema (6.78), se puede obtener la expresión de  $\{u_i\}$ :

$$\{u_i\} = [k_{ii}]^{-1} (\{f_i\} - [k_{ie}] \{u_e\}). \quad (6.79)$$

Sustituyendo el valor de  $\{u_i\}$  dado por la ecuación anterior en la primera ecuación de (6.78) se obtiene:

$$\{f_e\} = [k_{ee}] \{u_e\} + [k_{ei}] [k_{ii}]^{-1} (\{f_i\} - [k_{ie}] \{u_e\}) \quad (6.80)$$

$$= [k_{ee}] \{u_e\} + [k_{ei}] [k_{ii}]^{-1} \{f_i\} - [k_{ei}] [k_{ii}]^{-1} [k_{ie}] \{u_e\}, \quad (6.81)$$

y operando:

$$\{f_e\} - [k_{ei}] [k_{ii}]^{-1} \{f_i\} = [k_{ee}] \{u_e\} - [k_{ei}] [k_{ii}]^{-1} [k_{ie}] \{u_e\} \quad (6.82)$$

$$\{f_e\} - [k_{ei}] [k_{ii}]^{-1} \{f_i\} = \left\{ [k_{ee}] - [k_{ei}] [k_{ii}]^{-1} [k_{ie}] \right\} \{u_e\} \quad (6.83)$$

$$\{f_c\} = [k_c] \{u_e\}. \quad (6.84)$$

Por tanto, la matriz de rigidez del elemento finito DKT4 viene dada por:

$$[k_c] = \left\{ [k_{ee}] - [k_{ei}] [k_{ii}]^{-1} [k_{ie}] \right\}, \quad (6.85)$$

mientras que el vector de fuerzas externas nodales del elemento condensado viene dado por:

$$\{f_c\} = \{f_e\} - [k_{ei}] [k_{ii}]^{-1} \{f_i\}. \quad (6.86)$$

Si se considera que sobre el elemento sólo actúa una carga uniformemente distribuida  $q$ . Los vectores de fuerzas nodales  $\{\mathbf{f}_e\}$  y  $\{\mathbf{f}_i\}$  vienen dados respectivamente por:

$$\{\mathbf{f}_e\} = \frac{q}{3} \begin{pmatrix} A_1 + A_4 \\ 0 \\ 0 \\ A_1 + A_2 \\ 0 \\ A_2 + A_3 \\ 0 \\ 0 \\ A_3 + A_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \{\mathbf{f}_i\} = \frac{q}{3} \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.87)$$

donde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , y  $A_4$  son las áreas de los elementos desacoplados (véase la Figura 6.23), y  $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ .

Nótese que la obtención de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas externas nodales del elemento condensado es sencilla si se tiene en cuenta que la inversa de la matriz  $[\mathbf{k}_{ii}]$  se puede obtener analíticamente como:

$$[\mathbf{k}_{ii}]^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{k}_{ii}|} \begin{bmatrix} df - e^2 & ce - bf & be - cd \\ ce - bf & af - c^2 & bc - ae \\ be - cd & bc - ae & ad - b^2 \end{bmatrix}$$

donde  $|\mathbf{k}_{ii}|$  es el determinante de la submatriz  $[\mathbf{k}_{ii}]$  y que es igual a  $|\mathbf{k}_{ii}| = adf - ae^2 + 2bce - c^2d - b^2f$ .

Una vez obtenidos los desplazamientos externos  $\{\mathbf{u}_e\}$ , se pueden calcular los desplazamientos internos  $\{\mathbf{u}_i\}$ , para ello, se emplean las matrices formadas por el ensamblaje de los cuatro elementos finitos DKT y aplicando la expresión:

$$\{\mathbf{u}_i\} = [\mathbf{k}_{ii}]^{-1} (\{\mathbf{f}_i\} - [\mathbf{k}_{ie}] \{\mathbf{u}_e\}), \quad (6.88)$$

con lo que se obtiene los esfuerzos en cada nodo. Dado que en los nodos externos contribuyen dos elementos y en el nodo central 4, los esfuerzos se calculan promediando los esfuerzos en los elementos.

**Ejemplo ilustrativo 6.1 (Placa rectangular con distintas discretizaciones).** Para mostrar la convergencia de los elementos finitos ACM y DKT4 se simula el comportamiento de una placa cuadrada de lado y espesor 1,0 sometida a una carga uniforme repartida  $q = -1,0$  (véase la Figura 6.24). Las propiedades mecánicas del material que constituye la placa son:  $E = 10,92$ , y  $\nu = 0,3$ . Los bordes de la placa están empotrados, es decir, se restringen los movimientos  $u_z$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  en los bordes de la placa.

En lo que respecta a la discretización de la placa, se consideran 4 mallas diferentes, tal y como se muestra en la Figura 6.25.

En la Tabla 6.1 se muestran los resultados obtenidos para el desplazamiento según la dirección  $z$  y para el momento  $M_x$  en el centro de la placa, para las distintas discretizaciones y los distintos elementos (ACM y DKT4):

Se puede comprobar verificar en las Figuras 6.26 y 6.27, que la malla de la Figura 6.25 (c) proporciona un resultado muy aceptable. ■

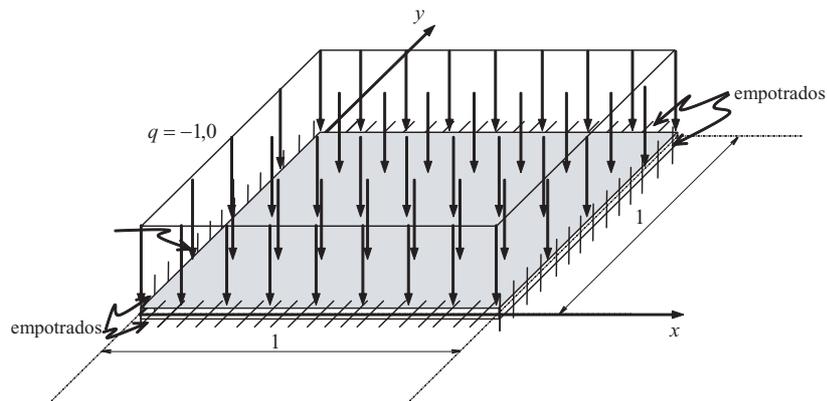
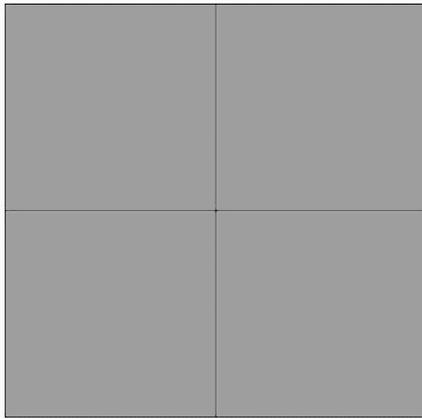
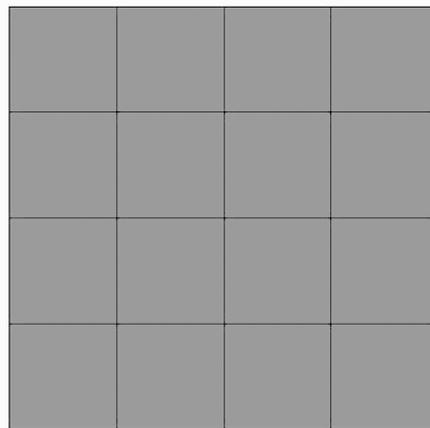


Figura 6.24: Geometría, carga y condiciones de contorno del Ejemplo Ilustrativo 6.1.

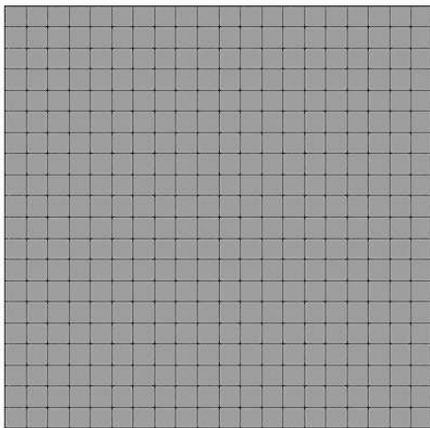
a) 4 Elementos (9 nodos)



b) 16 Elementos (25 nodos)



c) 440 Elementos (441 nodos)



d) 1600 Elementos (1681 nodos)

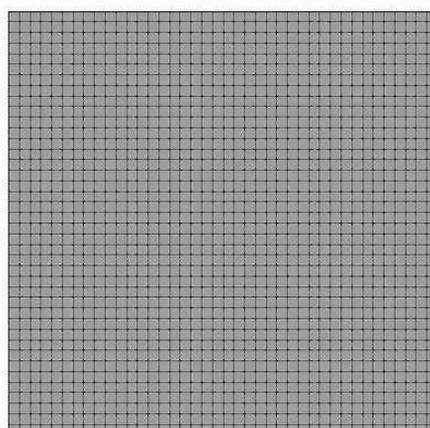


Figura 6.25: Discretización de la placa.

Número de Elementos	Número de grados de libertad		Desplazamiento vertical en el centro de la placa ( $\times 10^{-3}$ )		Momento $M_x$ en el centro de la placa ( $\times 10^{-2}$ )	
	ACM	DKT4	ACM	DKT4	ACM	DKT4
4	27	39	-1,4796	-1,4196	-4,6165	-3,6208
16	75	123	-1,4033	-1,3246	-2,7783	-2,5595
440	1323	2523	-1,2716	-1,2682	-2,3085	-2,301
1600	4800	6400	-1,2669	-1,2661	-2,295	-2,2931

Tabla 6.1: Resultados con las deflexiones en el centro de la placa y los momentos para las distintas discretizaciones y elementos empleados en el Ejemplo Ilustrativo 6.1

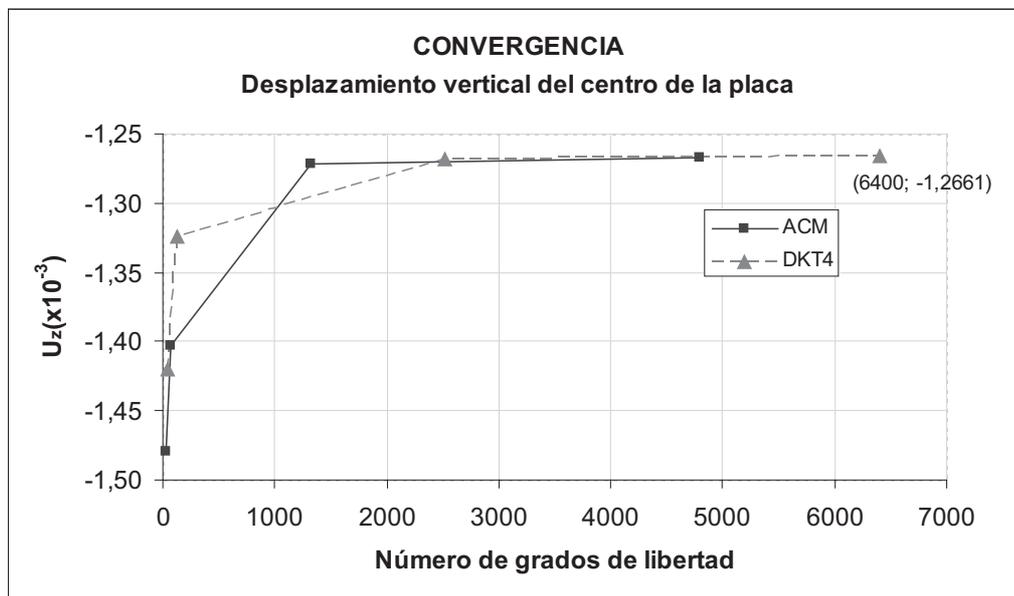


Figura 6.26: Gráfica de convergencia del desplazamiento  $u_z$  en centro de la placa para los elementos ACM y DKT4.

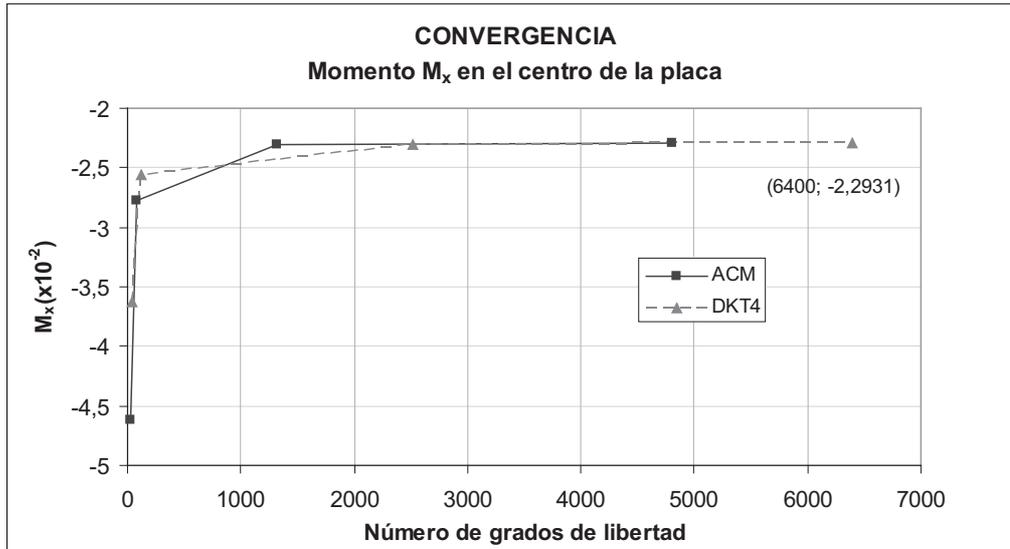


Figura 6.27: Gráfica de convergencia del momento  $M_x$  en centro de la placa para los elementos ACM y DKT4.

**Ejercicio 6.1 (Elementos DKT).** Utilizando el elemento finito DKT, obtener los desplazamientos y esfuerzos en la placa de la Figura 6.28 (a) con las siguientes propiedades:  $E = 1,0$ ,  $t = 1,0$  y  $\nu = 0,3$ . Emplear las discretizaciones mostradas en las Figuras 6.28 (b),(c) y (d). Nótese que los elementos de la última discretización se obtiene por condensación estática. ■

## 6.5. Elemento Finito Tipo Viga

### 6.5.1. Vigas

Las vigas son elementos estructurales que tienen una de sus dimensiones mucho más grande que las otras dos, y presentan ciertas características que pueden simplificar enormemente su modelización, ya que un problema que por naturaleza es tridimensional se puede tratar como un problema unidimensional. Esto ocurre también con otro tipo de elementos, tales como celosías o arcos.

En este apartado consideramos elementos estructurales como el mostrado en la Figura 6.29, y cargas según el plano  $x - z$  y momentos distribuidos a lo largo del eje de la viga sobre el que actúan.

Las vigas son elementos que trabajan a flexión. Para su estudio se parte de las hipótesis de Bernoulli-Navier, que asumen que una sección plana antes de la aplicación de la carga permanece plana y perpendicular a la línea neutra tras la deformación. Esta hipótesis es la misma que la utilizada para obtener el campo de desplazamientos del problema de placas según la teoría de Kirchhoff (véase la Figura 6.11), y nos permite obtener la siguiente relación:

$$u(x, z) = -z \frac{dw}{dx}. \quad (6.89)$$

Considerando la relación deformación-desplazamiento:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (6.90)$$

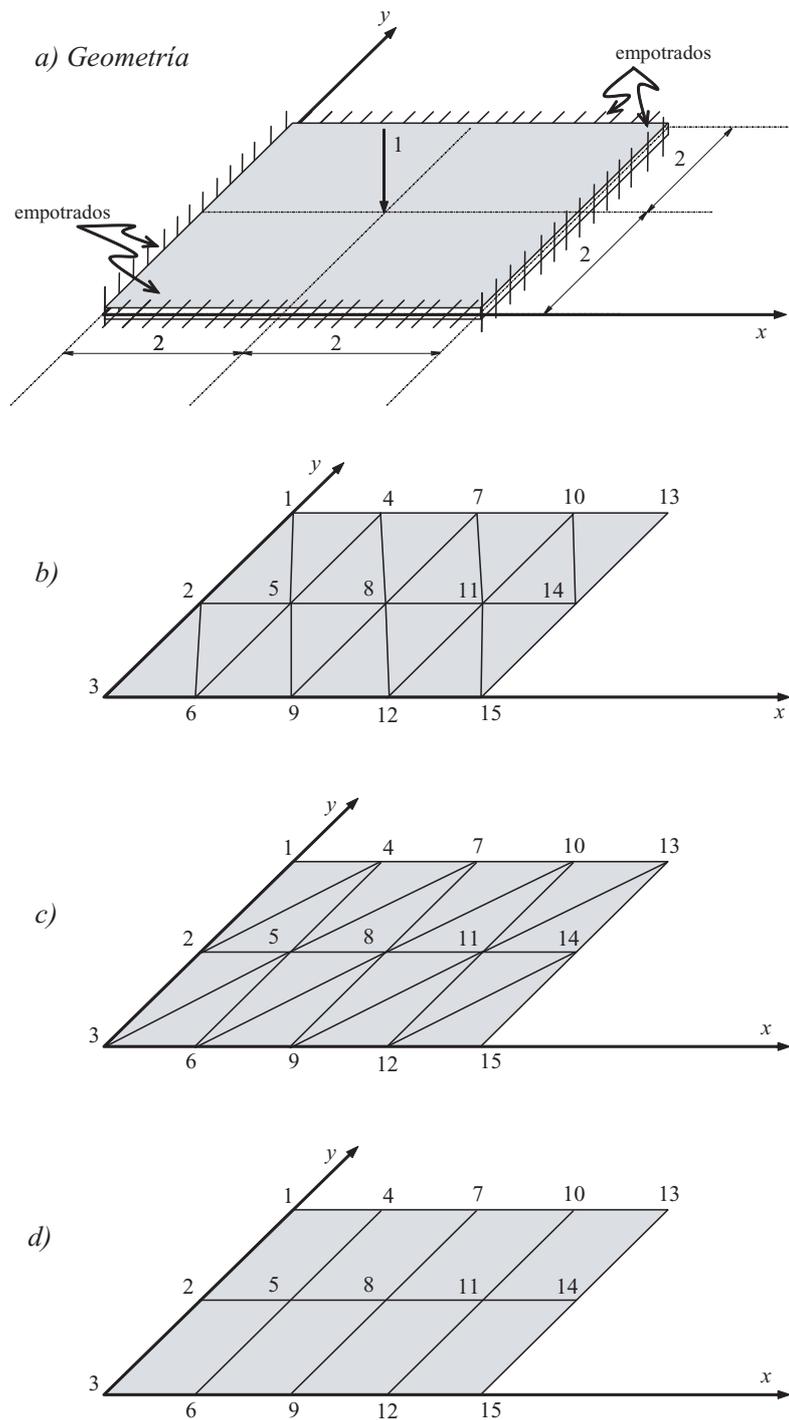


Figura 6.28: Placa empotrada en todas las caras. Geometría y discretizaciones de la placa del Ejercicio 6.1.

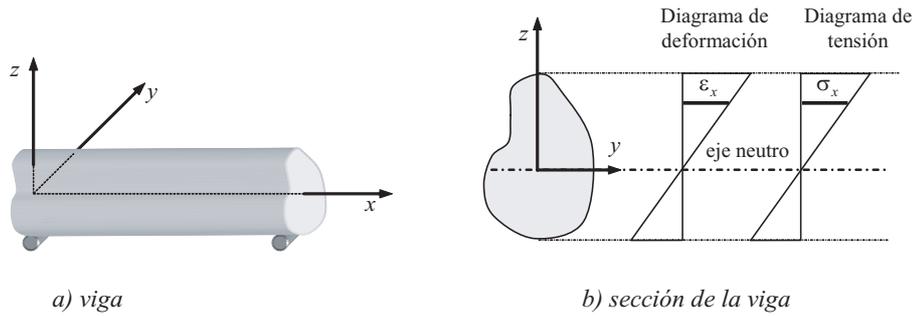


Figura 6.29: Vigas y sección transversal.

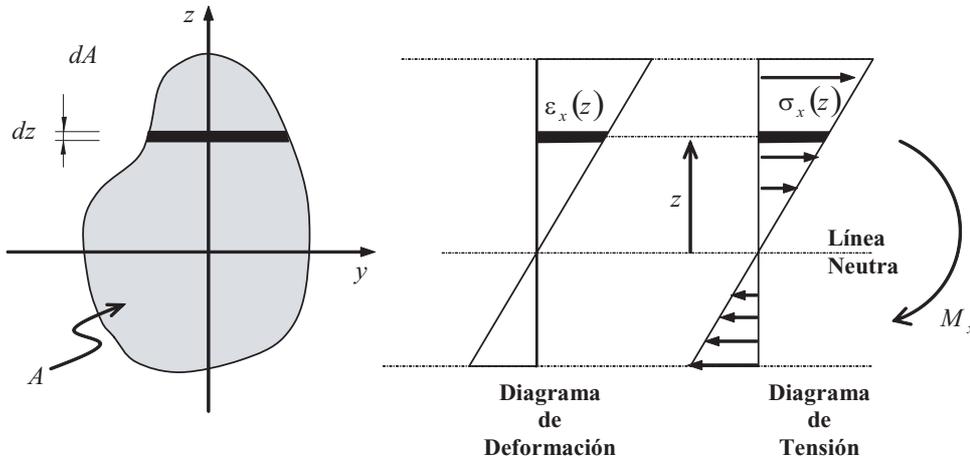


Figura 6.30: Distribución de la deformación y la tensión en una sección transversal de la viga.

Y teniendo en cuenta la ley de Hooke (en una dimensión) y la relación anterior, se obtiene la tensión  $\sigma_x$  como:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Ez \frac{d^2w}{dx^2}. \tag{6.91}$$

El esfuerzo (momento flector) se puede obtener integrando en el área transversal de la viga, tal y como se muestra en la Figura 6.30:

$$M_x = \int_A \sigma_x(x, z)z \, dA = -E \frac{d^2w}{dx^2} \int_A z^2 \, dA = -EI_y \frac{d^2w}{dx^2}, \tag{6.92}$$

donde  $I_y$  es el momento de inercia a flexión.

Además de a flexión, las vigas también trabajan a torsión. En este caso se desprecia el alabeo de la viga en secciones no circulares (véase la Figura 6.31), que se produce debido que mientras a que la distribución de tensiones en una sección circular es lineal, en la sección rectangular la variación de la tensión tangencial no es lineal, tal y como se muestra en la Figura 6.32(a). También se considera que el ángulo de torsión ( $\theta_x$ ) es constante a lo largo del eje prismático.

Dado que la deformación varía linealmente con el radio (véase la Figura 6.32 (b)) se cumple que:

$$\gamma_{yz} = r \frac{d\theta_x}{dx}, \tag{6.93}$$

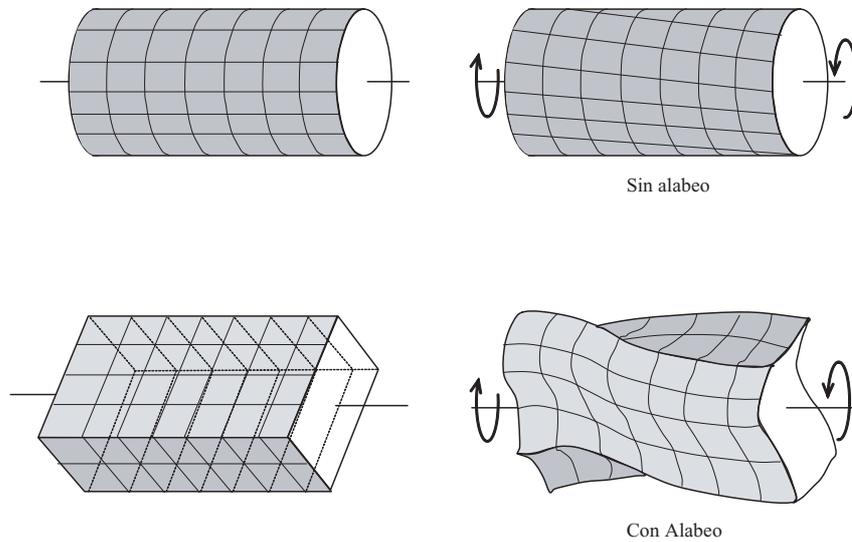


Figura 6.31: Barras con sección transversal circular y rectangular sometidas a torsión.

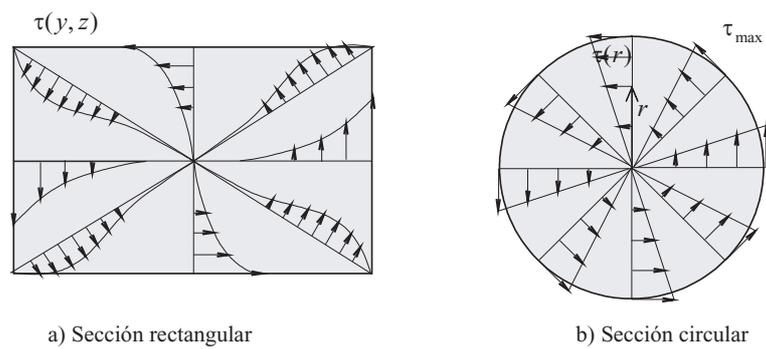


Figura 6.32: Distribución de tensiones tangenciales debidas a la torsión.

donde  $r$  es el radio de la sección transversal circular y  $\gamma_{yz}$  es la deformación tangencial.

Utilizando la ley de Hooke:

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad (6.94)$$

el momento de torsión  $M_T$  se calcula como:

$$M_T = \int_A \tau_{yz} r \, dA = G \frac{d\theta_x}{dx} \int_A r^2 \, dA = G J_T \frac{d\theta_x}{dx}, \quad (6.95)$$

donde  $J_T$  es el momento de inercia a torsión.

Nótese que dado que se está empleando la teoría de la elasticidad lineal, donde se puede aplicar el principio de superposición de efectos, el proceso de flexión se puede considerar independiente del proceso de torsión.

### 6.5.2. Pasos para la Obtención de la Matriz de Rigidez del Elemento de Tipo Viga

Partiendo del elemento tipo viga mostrado en la Figura 6.29, se va a obtener la matriz de rigidez y el vector de fuerzas equivalentes mediante el *Principio de los Trabajos Virtuales*. Con lo que respecta al criterio de signos, se adopta el mismo que el utilizado para las placas. Los pasos son los siguientes:

- **Paso 1: Definición del sistema de coordenadas.** El número de nodos del elemento, los grados de libertad por nodo, y los vectores de desplazamientos  $\{\delta^{(e)}\}$  y fuerzas  $\{f^{(e)}\}$  nodales del elemento según el sistema de coordenadas local seleccionado se muestran en la Figura 6.33.

Las vigas están sometidas a fuerzas verticales (esfuerzos cortante,  $F_z$ ), a momentos de torsión ( $T_x$ ) y a momentos de flexión ( $T_y$ ), y los desplazamientos asociados a estos esfuerzos son la deflexión de la viga  $w$ , la rotación según eje  $x$   $\bar{\theta}_x$  y la rotación según eje  $y$   $\bar{\theta}_y$ .

Así, los vectores de desplazamientos y esfuerzos asociados a cada nodo quedan como:

$$\{\delta_i^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} w \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix}_i ; \quad \{f_i^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} F_z \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}_i \quad (6.96)$$

donde el índice  $i = 1, 2$ , se corresponde con cada uno de los nodos, de forma que los desplazamientos y fuerzas en el elemento son:

$$\{\delta^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \delta_1^{(e)} \\ \delta_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \bar{\theta}_{x1} \\ \bar{\theta}_{y1} \\ w_2 \\ \bar{\theta}_{x2} \\ \bar{\theta}_{y2} \end{Bmatrix}; \quad \{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ T_{x1} \\ T_{y1} \\ F_{z2} \\ T_{x2} \\ T_{y2} \end{Bmatrix}. \quad (6.97)$$

- **Paso 2: Selección de una función de desplazamiento  $\{\delta(x)\}$ .** En este caso se adopta un polinomio para representar los desplazamientos en el elemento (a lo largo de la línea neutra), tal que:

$$\{\delta(x)\} = [f(x)] \{\alpha\}, \quad (6.98)$$

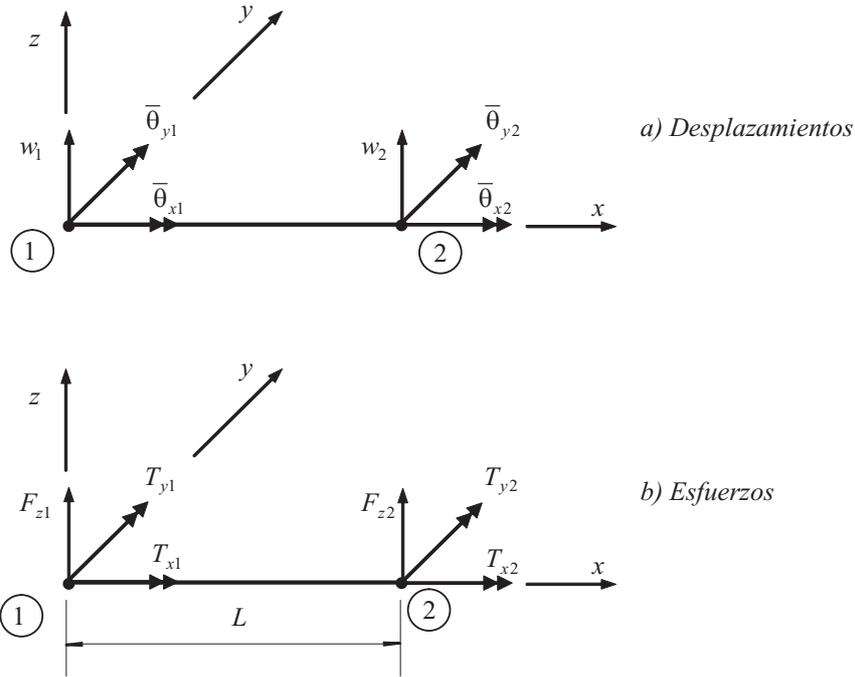


Figura 6.33: Nodos, grados de libertad, y fuerzas considerados en el elemento de tipo viga según el sistema local de coordenadas seleccionado.

donde  $\{\alpha\}$  es el vector con los coeficientes desconocidos de la función seleccionada  $[f(x)]$ .

Dado que hay 6 grados de libertad por elemento, son 6 los coeficientes a determinar. En este caso se emplea un polinomio cúbico en  $x$  para aproximar el desplazamiento  $w$  (4 coeficientes) y un polinomio lineal para aproximar la variación del ángulo de torsión ( $\bar{\theta}_x$ ) (2 coeficientes), tal y como se muestra en la Figura 6.34.

Con esos condicionantes los desplazamientos a lo largo del elemento se expresan de la siguiente manera:

- Desplazamiento transversal (deflexión):

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3. \quad (6.99)$$

- Rotación según el eje  $x$  (ángulo de torsión):

$$\bar{\theta}_x = \alpha_5 + \alpha_6 x. \quad (6.100)$$

- La rotación a lo largo del eje  $y$  se obtiene derivando la deflexión (6.99) con respecto al eje  $x$ ;

$$\bar{\theta}_y = -\frac{dw}{dx} = -\alpha_2 - 2\alpha_3 x - 3\alpha_4 x^2. \quad (6.101)$$

Las expresiones del desplazamiento vertical y las rotaciones quedan en forma matricial de

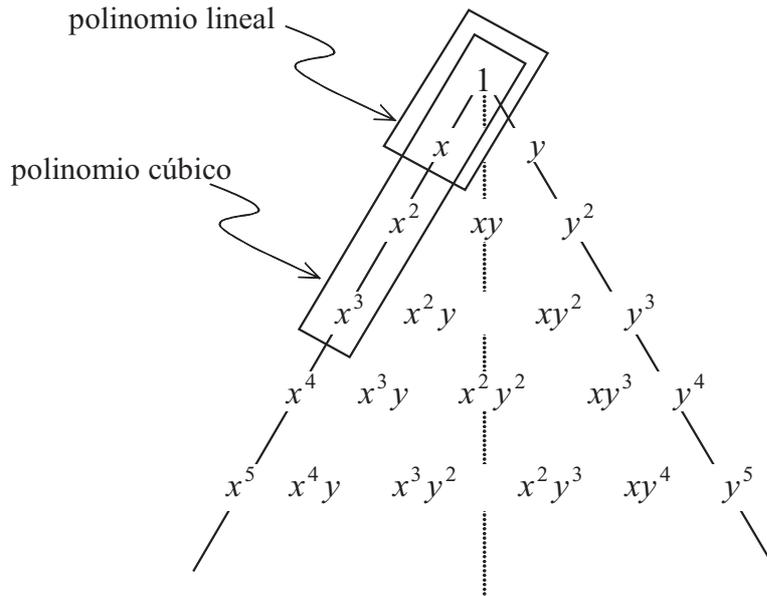


Figura 6.34: Polinomio de Pascal y polinomios seleccionados para aproximar los desplazamientos en el elemento tipo viga.

la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & -2x & -3x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (6.102)$$

$$\{\delta(x)\} = [\mathbf{X}] \{\alpha\}.$$

- **Paso 3: Expresar los desplazamientos en cualquier parte del elemento en función de los valores nodales.**

Dado que  $\{\delta(x)\}$  representa los desplazamientos en cualquier punto del elemento ( $x$ ) luego, también es válida para los nodos:

$$\{\delta^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \delta_1^{(e)} \\ \delta_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} \{\alpha\}. \quad (6.103)$$

Particularizando (6.99)-(6.101) en el nodo 1 ( $x = 0$ ) se obtiene:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 \\ \bar{\theta}_{x1} &= \alpha_5 \\ \bar{\theta}_{y1} &= -\alpha_2, \end{aligned} \quad (6.104)$$

mientras que en el nodo 2 ( $x = L$ ) se obtiene:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 \\ \bar{\theta}_{x1} &= \alpha_5 + \alpha_6 L \\ \bar{\theta}_{y1} &= -\alpha_2 - 2\alpha_3 L - 3\alpha_4 L^2. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Expresando (6.104) y (6.105) en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & -2L & -3L^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (6.106)$$

$$\{\delta^{(e)}\} = [\mathbf{A}] \{\alpha\}.$$

Los coeficientes  $\{\alpha\}$  se obtienen despejando de la expresión anterior como:

$$\{\alpha\} = [\mathbf{A}]^{-1} \{\delta^{(e)}\}, \quad (6.107)$$

donde la inversa de la matriz  $[\mathbf{A}]$  es igual a:

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{L^5} \begin{bmatrix} L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L^5 & 0 & 0 & 0 \\ -3L^3 & 0 & 2L^4 & 3L^3 & 0 & L^4 \\ 2L^2 & 0 & -L^3 & -2L^2 & 0 & -L^3 \\ 0 & L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L^4 & 0 & 0 & L^4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.108)$$

Sustituyendo (6.107) en (6.102):

$$\{\delta(x)\} = [\mathbf{X}] [\mathbf{A}]^{-1} \{\delta^{(e)}\} = [\mathbf{N}] \{\delta^{(e)}\}. \quad (6.109)$$

La función de forma  $[\mathbf{N}]$  correspondiente es igual a:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & -2x & -3x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{L^5} \begin{bmatrix} L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L^5 & 0 & 0 & 0 \\ -3L^3 & 0 & 2L^4 & 3L^3 & 0 & L^4 \\ 2L^2 & 0 & -L^3 & -2L^2 & 0 & -L^3 \\ 0 & L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L^4 & 0 & 0 & L^4 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.110)$$

que simplificando queda como:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \frac{(L^3 - 3x^2L + 2x^3)}{L^3} & 0 & \frac{-x(L^2 - 2xL + x^2)}{L^2} & \frac{x^2(3L - 2x)}{L^3} & 0 & \frac{x^2(L - x)}{L^2} \\ 0 & \frac{(L - x)}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ \frac{6x(L - x)}{L^3} & 0 & \frac{(L^2 - 4xL + 3x^2)}{L^2} & \frac{-6x(L - x)}{L^3} & 0 & \frac{-x(2L - 3x)}{L^2} \end{bmatrix}. \quad (6.111)$$

- **Paso 4: Obtener relación deformación-desplazamientos nodales.** Las deformaciones  $\{\varepsilon(x, z)\}$  en cualquier punto  $(x, z)$  del elemento están relacionadas con los desplazamientos  $\{\delta(x)\}$  en este punto, y a su vez estos desplazamientos están relacionados con los desplazamientos nodales  $\{\delta^{(e)}\}$ .

Para el problema de flexión, la deformación viene dada por la siguiente expresión:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, z)\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \varepsilon_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \frac{d\theta_x}{dx} \\ -z \frac{d^2w}{dx^2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d^2w}{dx^2} \end{Bmatrix}, \quad (6.112)$$

donde considerando (6.109):

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_x}{dx} &= \frac{d}{dx} (\alpha_5 + \alpha_6 x) = \alpha_6, \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= 2\alpha_3 + 6\alpha_4 x. \end{aligned} \quad (6.113)$$

La relación (6.112) queda como:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, z)\} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6x & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}. \quad (6.114)$$

Sustituyendo el vector  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  dado por (6.107) en la expresión anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}(x, z)\} &= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6x & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1} \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}, \\ &= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix} [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}, \end{aligned} \quad (6.115)$$

donde:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6x & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{L^5} \begin{bmatrix} L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L^5 & 0 & 0 & 0 \\ -3L^3 & 0 & 2L^4 & 3L^3 & 0 & L^4 \\ 2L^2 & 0 & -L^3 & -2L^2 & 0 & -L^3 \\ 0 & L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L^4 & 0 & 0 & L^4 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 1 \\ \frac{-6(L-2x)}{L^3} & 0 & \frac{2(2L-3x)}{L^2} & \frac{6(L-2x)}{L^3} & 0 & \frac{2(L-3x)}{L^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.116)$$

- **Paso 5:Relación tensión-deformación.** Las tensiones  $\{\boldsymbol{\sigma}(x, z)\}$  que actúan en el elemento están relacionadas con las deformaciones:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(x, z)\} = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}(x, z)\}. \quad (6.117)$$

Considerando el problema inicialmente planteado, la relación tensión-deformación es igual a:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz}(x, z) \\ \sigma_x(x, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \varepsilon_x \end{Bmatrix}, \quad (6.118)$$

y sustituyendo el valor de las deformaciones en función de los valores nodales resulta:

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{\sigma}\} &= \begin{Bmatrix} \tau_{yz}(x, z) \\ \sigma_x(x, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix} [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\} \\ &= \begin{bmatrix} Gr & 0 \\ 0 & -zE \end{bmatrix} [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}.\end{aligned}\quad (6.119)$$

- **Paso 6: Obtención de la relación desplazamientos-esfuerzos nodales.** Considerando unos desplazamientos virtuales nodales  $\{\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\}$ , el trabajo externo viene dado por:

$$W_{ext} = \{\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\}^T \{\mathbf{f}^{(e)}\}.\quad (6.120)$$

Por otro lado, el trabajo interno producido por las deformaciones virtuales  $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$  es igual a:

$$W_{int} = \int_V \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV,\quad (6.121)$$

expresión en la que reemplazando  $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$  y  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  por sus expresiones (6.112) y (6.115), respectivamente, queda como:

$$\begin{aligned}W_{int} &= \int_V \left\{ \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix} [\mathbf{B}] \{\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\} \right\}^T \left\{ \begin{bmatrix} Gr & 0 \\ 0 & -zE \end{bmatrix} [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\} \right\} dV = \\ &= \{\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\}^T \int_V [\mathbf{B}]^T \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Gr & 0 \\ 0 & -zE \end{bmatrix} [\mathbf{B}] dV \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\} \\ &= \{\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\}^T \int_V [\mathbf{B}]^T \begin{bmatrix} Gr^2 & 0 \\ 0 & Ez^2 \end{bmatrix} [\mathbf{B}] dV \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}.\end{aligned}\quad (6.122)$$

Y teniendo en cuenta que  $[\mathbf{B}]$  únicamente depende de  $x$  se simplifica y queda como:

$$W_{int} = \{\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\}^T \int_x [\mathbf{B}]^T \int_A \begin{bmatrix} Gr^2 & 0 \\ 0 & Ez^2 \end{bmatrix} dA [\mathbf{B}] dx \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}.\quad (6.123)$$

Nótese que en la expresión anterior la integral  $\int_A r^2 dA$  es igual a momento de inercia de torsión  $J_T$ , mientras que la integral  $\int_A z^2 dA$  es la inercia a flexión  $I_y$ , y por tanto (6.123) queda como:

$$W_{int} = \{\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\}^T \int_x [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}_V] [\mathbf{B}] dx \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\},\quad (6.124)$$

donde

$$[\mathbf{D}_V] = \begin{bmatrix} GJ_T & 0 \\ 0 & EI_y \end{bmatrix}.\quad (6.125)$$

Igualando el trabajo externo con el trabajo interno:

$$W_{ext} = W_{int}\quad (6.126)$$

$$\{\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\}^T \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \{\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\}^T \int_x [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}_V] [\mathbf{B}] dx \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\}\quad (6.127)$$

$$(6.128)$$

se llega a la expresión:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \int_x [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}_V] [\mathbf{B}] dx \{\boldsymbol{\delta}^{(e)}\} \quad (6.129)$$

en la que la integral se corresponde con la matriz de rigidez del elemento tipo viga:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_x [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}_V] [\mathbf{B}] dx. \quad (6.130)$$

Una vez calculada la matriz de rigidez según (6.130), únicamente resta integrar a lo largo de la longitud del elemento. Para ello, inicialmente se considera el sistema de coordenadas locales indicado en la Figura 6.33, que permite integrar analíticamente (6.130) y obtener la expresión cerrada de la matriz de rigidez del elemento de tipo viga con sección transversal constante a lo largo de toda la longitud:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ_{Te}}{L} & 0 & 0 & \frac{-GJ_{Te}}{L} & 0 \\ \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} \\ \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ_{Te}}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ_{Te}}{L} & 0 \\ \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.131)$$

Nótese que el momento de inercia a torsión  $J_T$  no aparece en (6.131), ya que éste es únicamente válido para secciones circulares. En su lugar se ha empleado el momento de inercia a torsión efectivo  $J_{Te}$ , porque se puede demostrar a través de las teorías de la elasticidad y de Saint-Venet de torsión que  $M_t = GJ_{Te}$ . Este momento de inercia depende únicamente de la sección transversal de la viga.

Es importante tener en cuenta que dado que hay que añadir la contribución de cada barra en los nodos según el sistema de coordenadas global, se ha de hacer una transformación de coordenadas del sistema local en el eje de la viga al sistema global (véase la Figura 6.35).

La matriz de rigidez en el sistema de coordenadas global viene dada por la siguiente transformación:

$$[\mathbf{k}^{(e)}]_{II} = [\mathcal{A}]^T [\mathbf{k}^{(e)}] [\mathcal{A}], \quad (6.132)$$

donde  $[\mathcal{A}]$  es la matriz de transformación de coordenadas,  $[\mathbf{k}^{(e)}]$  es la matriz en el sistema de coordenadas local, y  $[\mathbf{k}^{(e)}]_{II}$  es la matriz en el sistema de coordenadas global.

La matriz de transformación es igual a:

$$[\mathcal{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \quad (6.133)$$

donde  $l = \cos(\alpha)$  y  $m = \sin(\alpha)$ , tal y como se muestra en la Figura 6.36.

Si se considera la matriz de rigidez local con el siguiente formato:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{bmatrix} f & 0 & -a & -f & 0 & -a \\ 0 & b & 0 & 0 & -b & 0 \\ -a & 0 & 2d & a & 0 & d \\ -f & 0 & a & f & 0 & a \\ 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 \\ -a & 0 & d & a & 0 & 2d \end{bmatrix}, \quad (6.134)$$

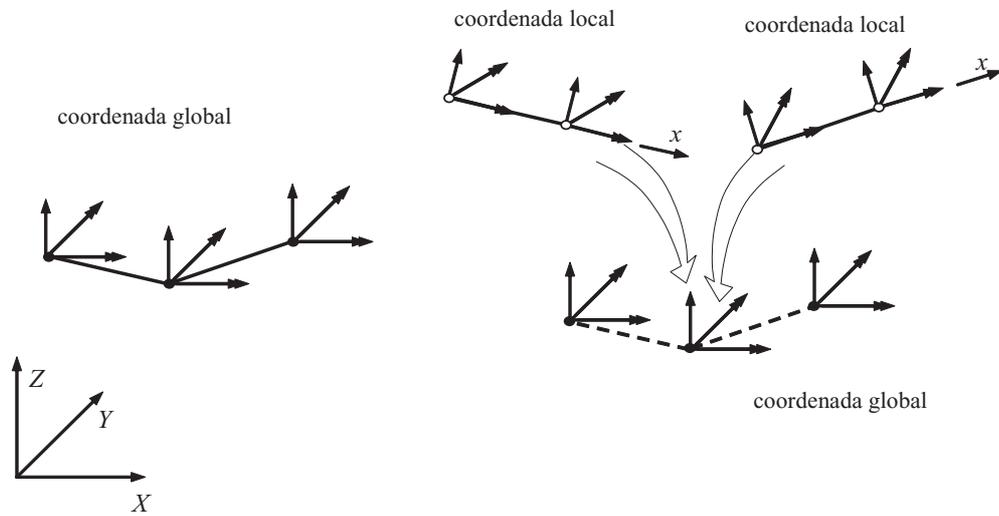


Figura 6.35: Sistemas de coordenadas local y global.

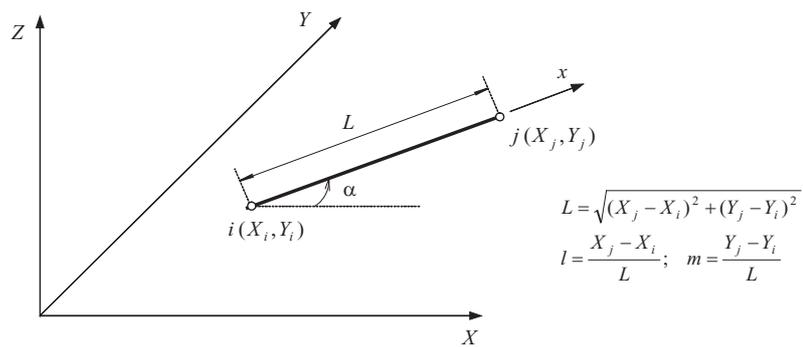


Figura 6.36: Sistema de coordenadas global y local para el elemento tipo viga.

donde  $a = \frac{6EI_y}{L^2}$ ,  $b = \frac{GJ_{Te}}{L}$ ,  $f = \frac{2a}{L}$  y  $d = \frac{aL}{3}$ , se obtiene la matriz de rigidez del elemento de viga en el sistema global como:

$$[\mathbf{k}^{(e)}]_{II} = \begin{bmatrix} f & am & -al & -f & am & -al \\ am & bl^2 + 2dm^2 & blm - 2dlm & -am & -bl^2 + dm^2 & -blm - dlm \\ -al & blm - 2dlm & bm^2 + 2dl^2 & al & -blm - dlm & -bm^2 + dl^2 \\ -f & -am & al & f & -am & al \\ am & -bl^2 + dm^2 & -blm - dlm & -am & bl^2 + 2dm^2 & blm - 2dlm \\ -al & -blm - dlm & -bm^2 + dl^2 & al & blm - 2dlm & bm^2 + 2dl^2 \end{bmatrix}. \quad (6.135)$$

### 6.5.3. Vector de Fuerzas Nodales

El vector de fuerzas nodales  $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$  producido por las fuerzas másicas, por una posible deformación inicial y por las fuerzas superficiales, viene dado por la siguiente expresión en el sistema de coordenadas local:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \int_V [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\} dV + \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} dV + \int_x [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\} dx, \quad (6.136)$$

donde  $\{\mathbf{b}\}$  es el vector de fuerzas másicas (gravedad terrestre), y  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$  es el vector de deformaciones iniciales.

Considerando únicamente las fuerzas superficiales  $\{\mathbf{P}\}$ , (6.136) resulta en:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}^{(e)}\} &= \int_x [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\} dx, \\ &= \int_x \left([\mathbf{X}] [\mathbf{A}]^{-1}\right)^T \{\mathbf{P}\} dx, \\ &= \int_x [\mathbf{A}^{-1}]^T [\mathbf{X}]^T \{\mathbf{P}\} dx. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Como la matriz  $[\mathbf{A}]$  es constante para un elemento de tipo viga (6.106), ésta puede salir de la integral, de forma que:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = [\mathbf{A}^{-1}]^T \int_x [\mathbf{X}]^T \{\mathbf{P}\} dx. \quad (6.138)$$

El vector  $\{\mathbf{P}\}$  depende del tipo de carga que se considera en el elemento. Si se considera una sobrecarga ( $q$ ) y un momento de torsión ( $M_t$ ) uniformemente distribuidos, tal y como se muestra en la Figura 6.37, el vector de cargas resultante queda como:

$$\{\mathbf{P}\} = \begin{Bmatrix} q \\ M_t \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.139)$$

Teniendo en cuenta (6.102) y (6.139) se obtienen que:

$$\int_x [\mathbf{X}]^T \{\mathbf{P}\} dx = \begin{Bmatrix} Lq \\ \frac{1}{2}L^2q \\ \frac{1}{3}L^3q \\ \frac{1}{4}L^4q \\ M_tL \\ \frac{1}{2}M_tL^2 \end{Bmatrix}, \quad (6.140)$$

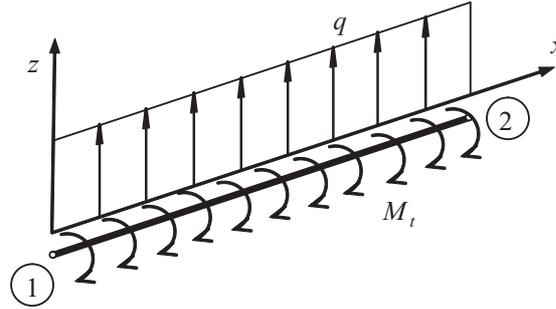


Figura 6.37: Posibles sobrecargas uniformemente repartidas a lo largo de toda la longitud de la viga.

término que multiplicado por  $[\mathbf{A}^{-1}]^T$  proporciona el vector de fuerzas externas nodales equivalentes:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ T_{x1} \\ T_{y1} \\ F_{z2} \\ T_{x2} \\ T_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}Lq \\ \frac{1}{2}M_tL \\ -\frac{1}{12}L^2q \\ \frac{1}{2}Lq \\ \frac{1}{2}M_tL \\ \frac{1}{12}L^2q \end{Bmatrix}. \quad (6.141)$$

Análogamente a como se hizo para la matriz de rigidez, se ha de expresar este vector de fuerzas externas nodales en el sistema de coordenadas globales ( $II$ ). Para ello se emplea la matriz de transformación de coordenadas  $[\mathcal{A}]$ :

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\}_{II} = [\mathcal{A}]^T \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ lT_{x1} - mT_{y1} \\ mT_{x1} + lT_{y1} \\ F_{z2} \\ lT_{x2} - mT_{y2} \\ mT_{x2} + lT_{y2} \end{Bmatrix} \quad (6.142)$$

donde  $l$  y  $m$  son los coeficientes de la matriz  $[\mathcal{A}]$  dados en (6.133).

### 6.5.3.1. Esfuerzos en los Elementos de Tipo Viga

Una vez calculada la matriz de rigidez global del forjado, las cargas equivalentes en los nodos, introducidas las condiciones de contorno y resueltos los desplazamientos nodales  $\{\mathbf{u}^{(e)}\}_{II}$  mediante el correspondiente sistema de ecuaciones, se pueden calcular los esfuerzos (fuerzas internas) en la viga  $\{\mathbf{f}_{int}^{(e)}\}$  en el sistema local. Para ello, es necesario obtener los desplazamientos en los nodos de la viga en las coordenadas locales, es decir,  $\{\mathbf{u}^{(e)}\} = [\mathcal{A}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}_{II}$ , donde  $[\mathcal{A}]$  es la matriz de transformación. Los esfuerzos en las vigas se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$\{\mathbf{f}_{int}^{(e)}\} = -\{\mathbf{Q}^{(e)}\} + [\mathbf{k}^{(e)}][\mathcal{A}] \{\mathbf{u}^{(e)}\}_{II} \quad (6.143)$$

Nótese que el vector  $\{\mathbf{Q}^{(e)}\}$ , denominado de *vector de esfuerzos nodales equivalentes*, no se obtiene de la solución proporcionada por el método de los elementos finitos. Este vector se

obtiene analizando la viga de forma independiente de la estructura del forjado, y su valor tiende a cero conforme se discretiza la viga en elementos de menor longitud. El vector  $\{\mathbf{Q}^{(e)}\}$  en caso de emplear un único elemento para toda la viga viene dado por:

$$\{\mathbf{Q}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}Lq \\ \frac{1}{2}M_tL \\ -\frac{1}{12}L^2q \\ \frac{1}{2}Lq \\ \frac{1}{2}M_tL \\ \frac{1}{12}L^2q \end{Bmatrix}. \quad (6.144)$$

Si se considera que el vector de desplazamientos en coordenadas globales es igual a:

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\}_{II} = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{Bmatrix}^T, \quad (6.145)$$

el vector de esfuerzos totales en el elemento viene dado por la siguiente expresión:

$$\{\mathbf{f}_{int}^{(e)}\}_I = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}Lq \\ -\frac{1}{2}M_tL \\ \frac{1}{12}L^2q \\ -\frac{1}{2}Lq \\ -\frac{1}{2}M_tL \\ -\frac{1}{12}L^2q \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} fg_1 - fg_4 - alg_3 + amg_2 - alg_6 + amg_5 \\ blg_2 + bmg_3 - blg_5 - bmg_6 \\ -ag_1 + ag_4 + 2dlg_3 - 2dmg_2 + dlg_6 - dmgs_5 \\ -fg_1 + fg_4 + alg_3 - amg_2 + alg_6 - amgs_5 \\ -blg_2 - bmg_3 + blg_5 + bmg_6 \\ -ag_1 + ag_4 + dlgs_3 - dmgs_2 + 2dlgs_6 - 2dmgs_5 \end{bmatrix}. \quad (6.146)$$

**Comentario 6.3** *Es importante recalcar que el proceso de resolución final del forjado completo es análogo al seguido para resolver estructuras articuladas y problemas de elasticidad bidimensional, ampliamente descritos en los capítulos 4 y 5, respectivamente. Sin embargo en este capítulo únicamente se ha incidido en la obtención de las matrices de rigidez de cada elemento constitutivo del forjado y sus vectores de cargas equivalentes.* ■

---

## Capítulo 7

# Problemas de Campo

---

En física e ingeniería existen multitud de problemas que están gobernados por las ecuaciones de difusión-convección, algunos de ellos son:

- Distribución de temperaturas a lo largo de un medio continuo en régimen estacionario, cuando se estudia una situación de equilibrio en la que las temperaturas en todos los puntos del dominio son constantes, o transitorio, en el caso en que se produzca una variación de temperaturas en alguno de los contornos y el sistema reaccione readaptando su temperatura hasta alcanzar la situación de equilibrio;
- Filtración a través de medios porosos (análogamente al caso de temperaturas se distingue entre el régimen estacionario y el transitorio);
- Problemas de torsión de barras prismáticas;
- Problemas de transporte, en los que se estudia el desplazamiento de partículas en un medio, por ejemplo, transporte de iones, o partículas en disolución en un fluido, etc.

Todos estos problemas, pese a tratarse de fenómenos físicos diferentes, se caracterizan por tener un comportamiento análogo de forma que la ecuación que los caracteriza es la misma y se denomina ecuación de **difusión-convección**:

$$Q + \nabla (D \nabla \Phi) = \rho c \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (7.1)$$

cuyos parámetros tienen un significado diferente dependiendo del problema de que se trate, tal y cómo se muestra en la Tabla 7.1.

Ecuación difusión-convección: $Q + \nabla \cdot (D \nabla \Phi) = \rho c \frac{\partial \Phi}{\partial t}$					
Problema	$\Phi$	$D$	$Q$	$q$	Ley fenomenológica
Flujo de calor	Temperatura $T$	Conductividad térmica $k$	Calor generado $Q$	Flujo de calor	Ley de Fourier $q = -k \nabla T$
Filtración de fluidos en medios porosos	Potencial total $\phi$	Coefficiente de permeabilidad $k$	Fuente de agua	Flujo de volumen	Ley de Darcy $q = -k \nabla \phi$
Difusión	Concentración de iones $c$	Matriz constitutiva para el coeficiente de difusión	Fuente de iones	Flujo de iones	Ley de Fick $q = -k \nabla c$
Torsión	Función de tensión de Prandtl $\phi$	$\frac{1}{G}$	$2\theta$		Ley de Hooke

Tabla 7.1: Valores de los distintos parámetros de la ecuación **difusión-convección** en función del problema físico estudiado.

En este capítulo se estudian de forma detallada los tres primeros problemas: la transmisión del calor, la filtración en medios permeables (porosos), y el problema de torsión en barras prismáticas. En primer lugar, la Sección 7.1 está dedicada al fenómeno de la transmisión del calor, en la que se derivan las ecuaciones de **difusión-convección** (7.1) particularizadas para el caso de problemas en tres dimensiones (3D), y se presenta la formulación para resolver el problema mediante el método de los elementos finitos. Por último, se obtiene la matriz de rigidez particularizada para el elemento tetraédrico de 4 nodos. En la Sección 7.2, se realiza el mismo estudio pero aplicado al fenómeno de filtración en medios permeables, sin embargo y debido al total paralelismo con la transmisión de calor, el estudio se realiza en dos dimensiones (2D), y se deduce la matriz de rigidez del elemento triangular de tres nodos. Por último, en la Sección 7.3 se derivan de nuevo las ecuaciones de **difusión-convección** (7.1) particularizadas para el caso de torsión en barras prismáticas, se plantea la resolución del problema mediante el método de los elementos finitos, y se obtiene la matriz de rigidez del elemento triangular de tres nodos.

## 7.1. Transmisión de Calor

La transferencia de calor en un medio continuo se produce de tres formas distintas:

- **Conducción.** La conducción térmica es la transferencia de calor producida por la colisión y vibración de las moléculas del continuo en la que no se produce transporte de masa alguno. Este fenómeno se debe a la tendencia de las partículas a igualar su temperatura o estado de excitación térmica. La conductividad térmica se define a través de la *Ley de Fourier de Conducción de Calor*:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{k} \nabla T, \quad (7.2)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector flujo de calor por unidad de área y por unidad de tiempo, y  $\mathbf{k}$  es el tensor de conductividad térmica (tensor de segundo orden). En el caso de que el material sea ortótropo,  $\mathbf{k}$  viene dado a través de sus componentes cartesianas de la siguiente manera:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

donde  $k_x, k_y$  y  $k_z$  son las conductividades térmicas en las direcciones de los ejes coordenados  $x, y$  y  $z$ , respectivamente.

Así, las componentes del flujo de calor vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\mathbf{q} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \\ -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \\ -k_z \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

La cantidad de calor que pasa a través de una superficie por unidad de área, y por unidad de tiempo se denomina flujo ( $q_n$ ), que es una magnitud escalar. Si  $\mathbf{n}$  es el versor (vector unitario) según la dirección normal a la superficie, tal y cómo se muestra en la Figura 7.1, el flujo viene dado por la siguiente expresión:

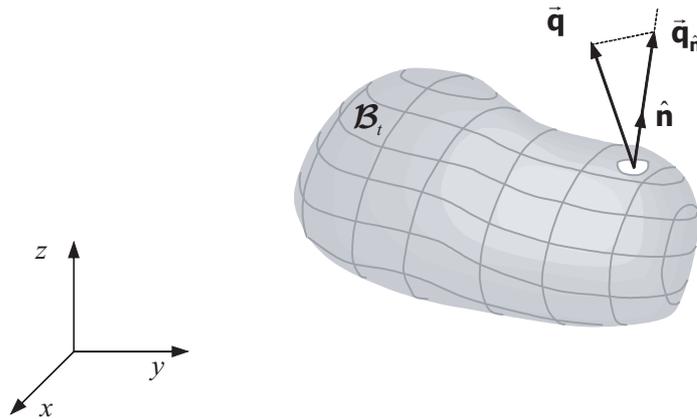


Figura 7.1: Flujo de calor a través de la superficie  $S$ .

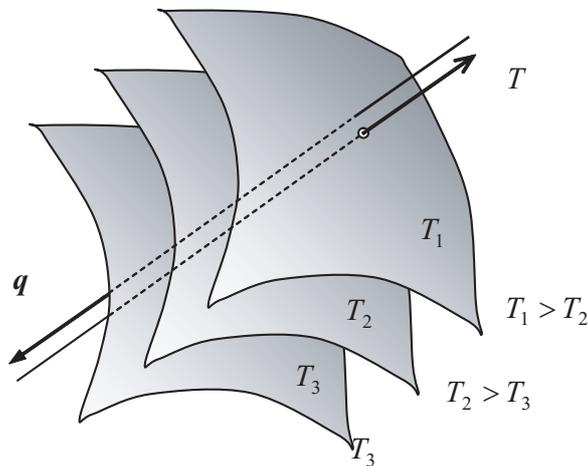


Figura 7.2: Sentido del flujo de calor.

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z, \quad (7.5)$$

donde sustituyendo las componentes del vector flujo por su valor según (7.4) se obtiene:

$$q_n = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y - k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z. \quad (7.6)$$

**Comentario 7.1** La expresión (7.6) establece que el flujo de calor a través de una superficie es directamente proporcional al gradiente de temperatura cambiado de signo, es decir, que el flujo de calor se produce de zonas con mayor temperatura a zonas con menor temperatura, véase la Figura 7.2. ■

- **Convección.** Cuando el calor se transmite por medio de un movimiento real de la materia que forma el sistema, se dice que hay una propagación de calor por convección, ésta se produce a través del desplazamiento de materia entre regiones con diferentes temperaturas.

La convección se produce únicamente en fluidos. Un ejemplo claro son los radiadores de agua caliente y las estufas de aire.

El fenómeno de convección térmica viene gobernado por la *Ley de Newton del Enfriamiento*, dada por la siguiente expresión:

$$q = \alpha (T - T_{\text{ext}}), \quad (7.7)$$

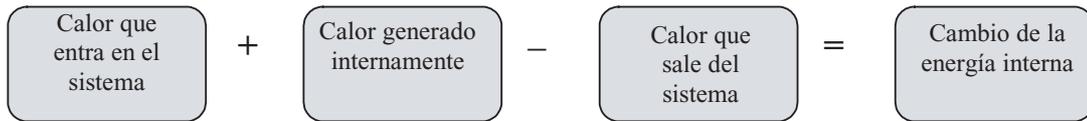
donde  $q$  es el flujo convectivo,  $\alpha$  es el coeficiente de transferencia de calor convectivo por unidad de área,  $T$  es la temperatura en la superficie del cuerpo, y  $T_{\text{ext}}$  es la temperatura externa al medio continuo.

- **Radiación.** Todos los cuerpos emiten y absorben radiación de su entorno. Si un cuerpo está más caliente que su entorno, éste se enfría, ya que la rapidez con que emite energía excede la rapidez con que la absorbe. Cuando se alcanza el equilibrio térmico, la rapidez de emisión y de absorción de energía son iguales.

Del mismo modo, dos cuerpos que se encuentran en el vacío y a distintas temperaturas, tienden a llegar al equilibrio dinámico a través de la radiación.

### 7.1.1. Ecuación del Flujo de Calor

La ecuación de flujo de calor se puede formular partiendo del equilibrio energético de la siguiente manera:



(7.8)

Cuando se produce un aumento de la temperatura en un cuerpo, una parte de la energía térmica es almacenada. Si se considera un elemento diferencial de volumen  $dV = dx dy dz$  como el mostrado en la Figura 7.3, la energía almacenada en el mismo viene dada por la expresión:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz, \quad (7.9)$$

donde  $\rho$  y  $c_p$  son la densidad y el calor específico del material cuyas unidades son  $[kg/m^3]$  y  $[J/kgK]$ , respectivamente,  $T$  es la temperatura del elemento (constante a lo largo de todo el diferencial de volumen) y  $t$  es el tiempo.

La energía generada internamente por unidad de volumen debido a reacciones químicas, eléctricas o nucleares u otros fenómenos, viene representada por  $Q$ .

Si se plantea el equilibrio energético (7.8) en ese elemento diferencial (véase la Figura 7.3), se obtiene la siguiente expresión:

$$q_x dy dz + q_y dx dz + q_z dx dy + Q dx dy dz - \left[ \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx dy \right] = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz, \quad (7.10)$$

donde los tres primeros términos representan el calor que entra en el cuerpo, el cuarto término es el calor generado internamente, los términos entre el corchetes representan el calor que sale del cuerpo, y el último término es la energía almacenada.

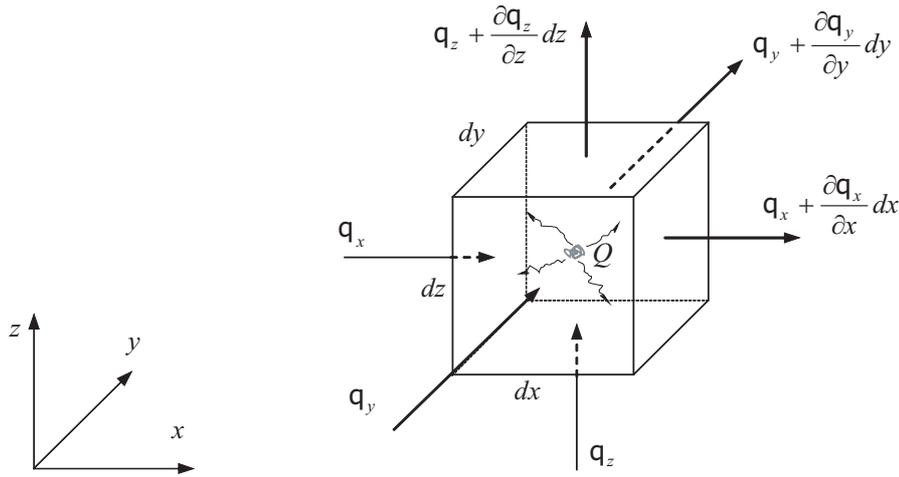


Figura 7.3: Flujo de calor a través de un elemento diferencial.

La expresión anterior se puede simplificar, quedando de la siguiente manera:

$$Q - \left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (7.11)$$

Sustituyendo el valor del flujo por el dado por la ley de *Fourier* (7.2) la expresión anterior queda como:

$$Q + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7.12)$$

que es la ecuación de **difusión-convección** particularizada para el caso de flujo calórico para el caso más general.

En el caso de que la conductividad térmica del cuerpo sea la misma en todas las direcciones ( $k_x = k_y = k_z = k$ ) la expresión (7.12) queda como:

$$\frac{Q}{k} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7.13)$$

donde  $\kappa = \frac{k}{\rho c_p}$ . La expresión (7.13) es la ecuación genérica que rige el problema de transmisión de calor en un cuerpo. Sin embargo, en función del tipo de problema que se esté tratando de resolver, se pueden realizar diversas simplificaciones:

- En el caso de que se esté tratando un problema **estacionario** en el que la temperatura en todos los puntos ha alcanzado un equilibrio (**distribución de temperatura constante**) el término de almacenamiento de energía en función del tiempo de la expresión (7.13) se anula quedando la siguiente ecuación:

$$\frac{Q}{k} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \implies \nabla^2 T = -\frac{Q}{k}, \quad (7.14)$$

que se conoce con el nombre de **ecuación de Poisson**.

- Si además de ser un problema **estacionario**, no hay generación interna de calor ( $Q = 0$ ), la ecuación (7.13) queda como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \implies \nabla^2 T = 0, \quad (7.15)$$

que se conoce con el nombre de **ecuación de Laplace**.

**Comentario 7.2** *Las distintas ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan el flujo calórico a través de un cuerpo se corresponden con distintos tipos de problemas desde un punto de vista matemático así, por ejemplo, la ecuación (7.13) que permite el estudio de la transferencia de calor y su evolución con el tiempo (**régimen transitorio**) es una ecuación diferencial **parabólica**, mientras que las ecuaciones (7.14) y (7.15) que permiten el estudio de la transferencia de calor en **régimen estacionario** son ecuaciones diferenciales **elípticas**. ■*

### 7.1.2. Condiciones de Contorno

Una vez establecida la ecuación que rige la transferencia de calor en el cuerpo es necesario plantear las condiciones de contorno del problema. Éstas pueden ser de varios tipos:

1. **Temperatura conocida en un contorno:** En este caso se conoce la temperatura de una determinada parte del cuerpo  $S_1$ :

$$T(x, y, z, t) = T_0; \quad \forall (x, y, z) \in S_1, \quad (7.16)$$

donde  $T_0$  es el valor de la temperatura en ese contorno.

2. **Flujo conocido en una superficie:** En este caso se conoce el flujo de calor a través de una superficie del dominio  $S_2$ . La expresión que define esta condición de contorno es:

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z = -q_0, \quad (7.17)$$

donde  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  es el vector normal a la superficie  $S_2$  de flujo conocido, y  $q_0$  es el valor del flujo.

3. **Flujo convectivo conocido en una superficie:** Alternativamente se puede conocer el flujo convectivo de calor a través de una superficie del dominio  $S_3$ . En este caso el valor del flujo  $q_0$  de la ecuación (7.17) se sustituye por la expresión:

$$\alpha (T - T_{\text{ext}}), \quad (7.18)$$

donde  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  es el vector normal a la superficie  $S_3$  de flujo conocido,  $\alpha$  es el coeficiente de transmisión de flujo convectivo y  $T_{\text{ext}}$  es la temperatura externa al medio continuo contigua al contorno  $S_3$ .

Nótese que las condiciones de contorno mostradas hasta el momento se emplean tanto para problemas estacionarios como para transitorios, si bien en el caso de los estacionarios la variable tiempo se elimina de las ecuaciones y de las condiciones de contorno.

**Comentario 7.3** *Desde un punto de vista matemático las condiciones de contorno en problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son dos: 1) las condiciones fijas en la frontera, conocidas como condiciones de **Dirichlet** o **esenciales**, que consisten en el conocimiento de la magnitud incógnita en un determinado contorno, y 2) las condiciones **naturales**, o condiciones de **Neumann**, que consisten en el conocimiento de la derivada de la magnitud (flujo) en un contorno. ■*

### 7.1.3. Formulación de Elementos Finitos para Problemas de Temperatura

En este apartado se va a plantear el método de resolución de la ecuación difusión-convección particularizada para problemas de conducción de calor empleando el método de los elementos finitos. En concreto se resuelve la ecuación (7.12) junto con las condiciones de contorno (7.16)-(7.18). Nótese que en este caso se emplea el método de Galerkin, que se caracteriza por emplear unas funciones de peso iguales a las funciones de forma empleadas para aproximar la solución dentro del elemento.

Los pasos para la resolución son los siguientes:

- **Paso 1: División del dominio en elementos.** Partiendo del dominio  $\Omega$  se subdivide en un número finito de elementos discretos  $n_{el}$ .
- **Paso 2: Ecuaciones del MEF para el elemento.** Dado que el mecanismo básico de resolución mediante el MEF se basa en la resolución de las ecuaciones diferenciales dentro del elemento para obtener la matriz de rigidez  $\{\mathbf{k}^{(e)}\}$  y el vector de términos independientes para la introducción de las condiciones de contorno  $\{\mathbf{p}^{(e)}\}$ . En este paso se aproxima la solución del problema en función de los valores nodales solución a través de las funciones de forma:

$$T(x, y, z, t) = [\mathbf{N}(x, y, z)] \{\mathbf{T}^{(e)}\}, \quad (7.19)$$

en la que

$$[\mathbf{N}(x, y, z)] = [ N_1(x, y, z) \quad N_2(x, y, z) \quad \cdots \quad N_{n_{ne}}(x, y, z) ] \quad (7.20)$$

y  $\{\mathbf{T}^{(e)}\}^T = \{T_1 \ T_2 \ \dots \ T_{n_{ne}}\}$ , donde  $T_i$  es la temperatura solución en el nodo  $i$  del elemento y  $n_{ne}$  es el número de nodos por elemento.

La ecuación diferencial (7.12) ha de cumplirse en todo el elemento y dado que la solución que se va a calcular es aproximada, y el método de Galerkin establece que la integral en todo el volumen del elemento  $V^{(e)}$ , del error ponderado entre la solución y la aproximación ha de ser nula. Nótese que se emplean como pesos las funciones de forma. Por tanto ha de cumplirse la siguiente expresión:

$$\int_{V^{(e)}} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = 0; \quad i = 1, \dots, n_{ne}. \quad (7.21)$$

Nótese que (7.21) representa la integral de los *residuos ponderados*.

Integrando por partes los tres primeros términos en (7.21) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{V^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV &= - \int_{V^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} dV + \int_{S^{(e)}} N_i k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x dS; \quad i = 1, \dots, n_{ne}, \\ \int_{V^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV &= - \int_{V^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} dV + \int_{S^{(e)}} N_i k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y dS; \quad i = 1, \dots, n_{ne}, \\ \int_{V^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV &= - \int_{V^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial z} k_z \frac{\partial T}{\partial z} dV + \int_{S^{(e)}} N_i k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z dS; \quad i = 1, \dots, n_{ne}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

donde  $S^{(e)}$  es el contorno del elemento seleccionado, constituido en este caso por todas sus caras. Nótese que la integral de superficie se multiplica por las componentes del versor normal a la superficie  $(n_x, n_y, n_z)$ , y representan el flujo de calor ponderado a través de la superficie del elemento.

Sustituyendo (7.22) en (7.21) y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned}
& - \int_{V^{(e)}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] dV \\
& + \int_{S^{(e)}} N_i \left[ k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right] dS + \int_{V^{(e)}} N_i \left[ Q - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = 0; \quad i = 1, \dots, n_{ne}.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Nótese que el integrando del primer término en la segunda fila en (7.23) es análogo al término de la izquierda en la condición de contorno de flujo (natural) (7.17) multiplicado por la función de forma correspondiente.

**Comentario 7.4** *Nótese que el método de los residuos ponderados proporciona la solución de la ecuación diferencial y de las condiciones de contorno naturales o de Neumann.* ■

Reemplazando el integrando por su valor según (7.17) queda la siguiente integral que tiene en cuenta las condiciones de contorno naturales:

$$\int_{S_i^{(e)}} N_i \left[ k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right] dS = - \int_{S_i^{(e)}} N_i [\bar{q} + \alpha (T - T_{\text{ext}})] dS; \quad i = 1, \dots, n_{ne}. \tag{7.24}$$

Nótese que la integral (7.24) únicamente ha de evaluarse en aquellos contornos de los elementos cuyas caras coincidan con los dominios del problema global en los que se conoce la condición de contorno, ya que en caso contrario, su valor se anula con la integral correspondiente al elemento contiguo. Por lo tanto, únicamente se obtiene en  $S_i^{(e)} \cap (S_2 \cup S_3)$  donde  $S_2$  y  $S_3$  son los dominios en los que se definen, respectivamente, las condiciones de contorno (7.17) y (7.18).

Si se sustituye (7.24) en (7.23) y se reorganizan términos se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
& \int_{V^{(e)}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] dV + \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} N_i \alpha T dS + \int_{V^{(e)}} N_i \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \\
& \int_{V^{(e)}} N_i Q dV - \int_{S_i^{(e)} \cap S_2} N_i \bar{q} dS + \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} N_i \alpha T_{\text{ext}} dS; \quad i = 1, \dots, n_{ne}.
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Teniendo en cuenta (7.19) se puede expresar la temperatura en el elemento en función de la temperatura de cada uno de los nodos:

$$T_j(x, y, z, t) = N_j T_j^{(e)}; \quad j = 1, \dots, n_{ne}, \tag{7.26}$$

de forma que  $T^{(e)} = \sum_{j=1}^{n_{ne}} N_j T_j^{(e)}$ .

Reemplazando en (7.25) la temperatura  $T$  por  $T_j$ , y ésta a su vez por (7.26) se obtiene la siguiente expresión:

$$T_j^{(e)} \int_{V^{(e)}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} k_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] dV + T_j^{(e)} \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} N_i \alpha N_j dS \\ + \dot{T}_j^{(e)} \int_{V^{(e)}} N_i \rho c_p N_j dV = \int_{V^{(e)}} N_i Q dV - \int_{S_i^{(e)} \cap S_2} N_i \bar{q} dS + \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} N_i \alpha T_{\text{ext}} dS; \quad (7.27) \\ i = 1, \dots, n_{ne}, j = 1, \dots, n_{ne},$$

en la que los términos a la izquierda de la igualdad constituyen el elemento  $(i, j)$  de la matriz de rigidez, mientras que el término de la derecha es el elemento  $i$ -ésimo del vector de términos independientes.

La ecuación anterior se puede expresar como:

$$\left( k_{1_{ij}}^{(e)} + k_{2_{ij}}^{(e)} \right) T_j^{(e)} + k_{3_{ij}}^{(e)} \dot{T}_j^{(e)} = p_{1_i}^{(e)} + p_{2_i}^{(e)} + p_{3_i}^{(e)}, \quad (7.28)$$

en la que  $k_{1_{ij}}^{(e)}$ ,  $k_{2_{ij}}^{(e)}$  y  $k_{3_{ij}}^{(e)}$  son la influencia en el término  $(i, j)$  de la matriz de rigidez del elemento debido, respectivamente, a la integración de la ecuación de Poisson, la influencia de la radiación, y a la influencia de la variación temporal, mientras que  $p_{1_i}^{(e)}$ ,  $p_{2_i}^{(e)}$  y  $p_{3_i}^{(e)}$  son la influencia en el término  $(i)$  del vector de términos independientes del elemento debido, respectivamente, a la presencia de una fuente de calor, a la influencia de la radiación (flujo de calor hacia el exterior del cuerpo), y a la influencia de la variación temporal de temperatura.

La expresión completa de la matriz de rigidez en forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\left[ \mathbf{k}_1^{(e)} + \mathbf{k}_2^{(e)} \right] \left\{ \mathbf{T}^{(e)} \right\} + \left[ \mathbf{k}_3^{(e)} \right] \left\{ \dot{\mathbf{T}}^{(e)} \right\} = \left\{ \mathbf{p}_1^{(e)} \right\} + \left\{ \mathbf{p}_2^{(e)} \right\} + \left\{ \mathbf{p}_3^{(e)} \right\}, \quad (7.29)$$

en la que cada una de las submatrices y vectores se obtienen de la siguiente manera:

$$\left[ \mathbf{k}_1^{(e)} \right] = \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV = \quad (7.30) \\ = \int_{V^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial x} & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial y} & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial z} \end{bmatrix} dV,$$

donde la matriz  $[\mathbf{B}]$  contiene las derivadas de las funciones de forma y  $[\mathbf{D}]$  es la matriz de conductividad térmica. El término asociado a la radiación es:

$$\left[ \mathbf{k}_2^{(e)} \right] = \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} \alpha [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dS = \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} \alpha \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n_{ne}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_{n_{ne}} \end{bmatrix} dS, \quad (7.31)$$

y el término asociado a la variación temporal queda como:

$$\left[ \mathbf{k}_3^{(e)} \right] = \int_{V^{(e)}} \rho c_p [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV = \int_{V^{(e)}} \rho c_p \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n_{ne}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_{n_{ne}} \end{bmatrix} dV. \quad (7.32)$$

El término independiente asociado a una fuente de calor se corresponde con:

$$[\mathbf{p}_1^{(e)}] = \int_{V_i^{(e)}} Q [\mathbf{N}]^T dV = \int_{V^{(e)}} Q \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n_{ne}} \end{bmatrix} dV, \quad (7.33)$$

el término independiente relativo al flujo conocido en un contorno es:

$$[\mathbf{p}_2^{(e)}] = \int_{S_i^{(e)} \cap S_2} -\bar{q} [\mathbf{N}]^T dS = \int_{S_i^{(e)} \cap S_2} -\bar{q} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n_{ne}} \end{bmatrix} dS, \quad (7.34)$$

y por último, el término independiente relativo a la radiación debida a la temperatura externa al cuerpo es:

$$[\mathbf{p}_3^{(e)}] = \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} T_{\text{ext}} [\mathbf{N}]^T dS = \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} T_{\text{ext}} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n_{ne}} \end{bmatrix} dS. \quad (7.35)$$

- **Paso 3: Obtención del sistema discreto.** Una vez calculadas las matrices de rigidez de cada uno de los elementos y los términos independientes, se continúa con el procedimiento de ensamblaje:

$$[\mathbf{K}] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{k}^{(e)}] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \left( [\mathbf{k}_1^{(e)}] + [\mathbf{k}_2^{(e)}] \right); \{ \mathbf{P} \} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{p}^{(e)}] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \left( [\mathbf{p}_1^{(e)}] + [\mathbf{p}_2^{(e)}] + [\mathbf{p}_3^{(e)}] \right), \quad (7.36)$$

donde  $[\mathbf{K}]$  es la matriz de rigidez global estacionaria del sistema, y  $\{ \mathbf{P} \}$  es el vector de términos independientes.

Nótese que el símbolo  $\mathbf{A}$ , en este caso, representa ensamblaje. Siendo éste el mismo que el mostrado en la Sección 4.3, página 190. De esta forma es posible obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{ \mathbf{P} \} = [\mathbf{K}] \{ \mathbf{T} \} + [\mathbf{k}_3] \{ \dot{\mathbf{T}} \}. \quad (7.37)$$

Nótese que en el caso transitorio  $\{ \dot{\mathbf{T}} \} \neq 0$ , la derivada de la temperatura con respecto al tiempo introduce una complicación en la resolución porque hay que integrar con respecto al tiempo. Así, para cada valor del tiempo, el sistema (7.37) es un sistema lineal de ecuaciones que proporciona los valores de las temperaturas en los nodos en ese instante.

**Comentario 7.5** *En el resto del capítulo sólo se estudia en detalle el problema estacionario, y todo el desarrollo matemático se ha establecido teniendo en cuenta esa condición. Para el estudio en detalle del problema transitorio se puede consultar, por ejemplo, [Zienkiewicz and Taylor, 2004a, Zienkiewicz and Taylor, 2004b].* ■

- **Paso 4: Introducción de las condiciones de contorno esenciales.** En el Paso 2 se vio como la integración por partes para la resolución de la ecuación diferencial mediante el MEF obligaba a satisfacer las condiciones de contorno naturales asociadas al flujo, lo cual generaba una serie de términos que afectaban a la matriz de rigidez, pero nada se ha

dicho aun sobre las condiciones de contorno esenciales (7.16). En este caso las condiciones de contorno se introducen en el sistema ensamblado (7.37) empleando el procedimiento ya visto en las Sección 4.2.7, que modifica la matriz de rigidez y el vector de términos independientes de forma que se satisfagan las condiciones de contorno asociadas a valores fijos de la temperatura.

- **Paso 5: Resolución del sistema lineal de ecuaciones.** Una vez modificado el sistema discreto se procede a su resolución, con lo cual se obtienen las temperaturas nodales solución:

$$\{T\} = [K]^{-1} \{P\}. \quad (7.38)$$

- **Paso 6: Cálculo del flujo en un contorno.** Una vez obtenidas las temperaturas nodales globales solución, se puede calcular el flujo a través de un contorno diferencial  $dS$  empleando la ecuación (7.6), en la que sustituyendo el valor de la temperatura por su valor según (7.19), se obtiene de forma matricial:

$$\begin{aligned} q_{n_s} &= -\mathbf{n}^T \left( \mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right) = \\ &= [n_x \quad n_y \quad n_z] \left( - \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_{n_{ne}} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Nótese que si lo que se desea es calcular el flujo total de calor que sale por una determinada superficie basta con integrar (7.39) sobre la misma:

$$Q_S = \int_S q_{n_s} dS. \quad (7.40)$$

#### 7.1.4. Matriz de Rigidez del Elemento Tetraédrico de 4 Nodos

En la sección anterior se presentó la aproximación genérica del MEF para la resolución de problemas de flujo térmico. En este apartado se obtienen las expresiones particulares para el cálculo de la matriz de rigidez y el término independiente del elemento tetraédrico de cuatro nodos. Este elemento es el más sencillo con el que se puede trabajar en tres dimensiones y está caracterizado por emplear unas funciones de forma lineales a lo largo de todo el elemento, con lo cual no es necesario el uso de integración numérica para obtener sus expresiones. Nótese que las funciones de forma son las dadas en la ecuación (5.165), por lo que la matriz  $[B]$  con las derivadas de las funciones de forma queda como:

$$[B] = \frac{1}{6V^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}, \quad (7.41)$$

donde  $V^{(e)*}$  es el volumen del tetraedro (5.166). Los elementos de esta matriz son coeficientes constantes.

Teniendo en cuenta estas funciones de forma y (7.41), las ecuaciones (7.30)-(7.35) se transforman en:

- **Matriz de rigidez para la resolución de la ecuación de Poisson:** La matriz (7.30) para el elemento tetraédrico de 4 nodos queda de la siguiente manera:

$$\left[ \mathbf{k}_1^{(e)} \right] = \frac{1}{6V^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \frac{1}{6V^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} V^{(e)}. \quad (7.42)$$

- **El término asociado a la radiación:** La matriz (7.31) para el elemento tetraédrico de 4 nodos queda de la siguiente manera:

$$\left[ \mathbf{k}_2^{(e)} \right] = \alpha \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} \frac{1}{6V^{(e)*}} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y + h_1z \\ a_2 + b_2x + c_2y + h_2z \\ a_3 + b_3x + c_3y + h_3z \\ a_4 + b_4x + c_4y + h_4z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} dS. \quad (7.43)$$

Para simplificar y hacer más sencillo el cálculo de esta integral, y teniendo en cuenta que se integra únicamente en los contornos del elemento (triángulos) se emplean las funciones de forma en coordenadas de área que se presentaron en la Sección 3.3.4, página 102, y la fórmula de integración (3.68).

De esta manera (7.43) se transforma en:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{k}_2^{(e)} \right] &= \alpha \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} \begin{bmatrix} L_j \\ L_k \\ L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_j & L_k & L_l \end{bmatrix} dS = \alpha \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} \begin{bmatrix} L_j^2 & L_j L_k & L_j L_l \\ L_k L_j & L_k^2 & L_k L_l \\ L_l L_j & L_l L_k & L_l^2 \end{bmatrix} dS = \\ &= \frac{\alpha}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} S_i^{(e)}, \end{aligned} \quad (7.44)$$

donde  $S_i^{(e)}$  es el área del triángulo del contorno  $i$ -ésimo y  $L_j$ ,  $L_k$  y  $L_l$  son las funciones de forma asociadas a los nodos  $j$ ,  $k$  y  $l$ , que constituyen el triángulo.

**Comentario 7.6** Nótese que la matriz  $\left[ \mathbf{k}_2^{(e)} \right]$  en (7.44) es de dimensión  $3 \times 3$ , mientras que la matriz de rigidez del elemento es de  $4 \times 4$ , para que concuerden las dimensiones es imprescindible añadir una fila y una columna de ceros en la posición  $i$ -ésima. Así, por ejemplo, si  $i = 3$  la matriz (7.44) queda de la siguiente manera:

$$\left[ \mathbf{k}_2^{(e)} \right] = \frac{\alpha}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & 2 \end{bmatrix} S_3^{(e)}. \quad (7.45)$$

■

- **El término asociado a la variación temporal:** La matriz (7.32) para el elemento tetraédrico de 4 nodos queda de la siguiente manera:

$$\left[ \mathbf{k}_3^{(e)} \right] = \rho c_p \int_{V^{(e)}} \frac{1}{6V^{(e)*}} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y + h_1z \\ a_2 + b_2x + c_2y + h_2z \\ a_3 + b_3x + c_3y + h_3z \\ a_4 + b_4x + c_4y + h_4z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} dV. \quad (7.46)$$

Análogamente a lo que se hizo en (7.43), y empleando funciones de forma en coordenadas de volumen (análogas a las de área) y la fórmula de integración (3.69), (7.46) se transforma en:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{k}_3^{(e)} \right] &= \rho c_p \int_{V^{(e)}} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} [L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4] dV = \\ &= \rho c_p \int_{V^{(e)}} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 & L_1 L_4 \\ L_2 L_1 & L_2^2 & L_2 L_3 & L_2 L_4 \\ L_3 L_1 & L_3 L_2 & L_3^2 & L_3 L_4 \\ L_4 L_1 & L_4 L_2 & L_4 L_3 & L_4^2 \end{bmatrix} dV = \frac{\rho c_p V^{(e)}}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

- **El término independiente asociado a una fuente de calor:** El vector (7.33) para el elemento tetraédrico de 4 nodos queda de la siguiente manera:

$$\left[ \mathbf{p}_1^{(e)} \right] = Q \int_{V^{(e)}} \frac{1}{6V^{(e)*}} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y + h_1z \\ a_2 + b_2x + c_2y + h_2z \\ a_3 + b_3x + c_3y + h_3z \\ a_4 + b_4x + c_4y + h_4z \end{bmatrix} dV = Q \int_{V^{(e)}} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} dV = \frac{QV^{(e)}}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.48)$$

donde  $QV^{(e)}$  es la cantidad de calor generada o absorbida en todo el elemento, que implica que cada nodo se lleva una cuarta parte del calor generado en el volumen del elemento.

- **El término independiente relativo al flujo conocido en un contorno:** El vector (7.34) para el elemento tetraédrico de 4 nodos queda de la siguiente manera:

$$\left[ \mathbf{p}_2^{(e)} \right] = -\bar{q} \int_{S_i^{(e)} \cap S_2} \frac{1}{6V^{(e)*}} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y + h_1z \\ a_2 + b_2x + c_2y + h_2z \\ a_3 + b_3x + c_3y + h_3z \\ a_4 + b_4x + c_4y + h_4z \end{bmatrix} dS = \frac{-\bar{q}A_i^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.49)$$

que se corresponde con el término asociado al flujo por el contorno opuesto al nodo  $i = 3$ , es decir, que la  $i$ -ésima componente del vector es nula.

- **El término independiente relativo a la radiación debida a la temperatura externa al cuerpo:** El vector (7.35) para el elemento tetraédrico de 4 nodos queda de la siguiente manera:

$$\left[ \mathbf{p}_3^{(e)} \right] = T_{\text{ext}} \int_{S_i^{(e)} \cap S_3} \frac{1}{6V^{(e)*}} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y + h_1z \\ a_2 + b_2x + c_2y + h_2z \\ a_3 + b_3x + c_3y + h_3z \\ a_4 + b_4x + c_4y + h_4z \end{bmatrix} dS = \frac{T_{\text{ext}}A_2^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.50)$$

que se corresponde con el término asociado al flujo por el contorno opuesto al nodo 2, es decir, que la  $i$ -ésima componente del vector es nula.

**Comentario 7.7** Nótese que en las ecuaciones particularizadas para el elemento tetraédrico intervienen tanto  $V^{(e)}$  como  $V^{(e)*}$ .  $V^{(e)}$  es el volumen del tetraedro, que es siempre positivo, mientras que  $V^{(e)*}$  es el cálculo del volumen mediante la fórmula del determinante, y en función de la numeración de los nodos puede ser positivo, o negativo. ■

### 7.1.5. Ejemplo de Distribución de Temperaturas en una Presa de Gravedad

Una parte fundamental en el estudio del comportamiento de una presa de gravedad es su distribución de temperaturas a lo largo del cuerpo de presa, ya que los cambios de temperatura en las distintas partes de la misma afectan de forma diferente y estos gradientes de temperatura pueden provocar tensiones residuales y movimientos, que a su vez pueden provocar fisuras perjudiciales tanto para la estanqueidad de la presa, como para la estabilidad en su conjunto. Por este motivo, en el estudio tensional es necesario incluir los efectos de la temperatura, para lo cual es necesario conocer la temperatura en cada uno de los puntos del cuerpo de la presa. El estudio de este problema se puede realizar bajo distintas hipótesis:

1. Considerando que se quiere estudiar la temperatura de equilibrio para unas temperaturas dadas tanto para el exterior (temperatura ambiente), como para el paramento mojado (temperatura del agua del embalse). En este caso se resuelve **la ecuación de Laplace** en todo el cuerpo de presa incluyendo como condiciones de contorno los valores de temperatura en los paramentos en los que se conoce.
2. Especialmente en los primeros años de vida de la presa, y debido al calor desprendido por la hidratación y curado del hormigón, se puede incluir esta nueva fuente de calor resolviendo para ello **la ecuación de Poisson**.
3. Desde el punto de vista de generación de fisuras son especialmente perjudiciales los cambios bruscos de temperatura, y debido a la gran inercia térmica del hormigón, puede resultar necesario el estudio de cómo un cambio de temperaturas bruscas en el exterior puede afectar la distribución de temperaturas y su evolución en el tiempo. En este caso se ha de considerar el término temporal resolviendo el **problema parabólico**, en contraposición a los dos casos anteriores en los que resolvía el **problema elíptico**.

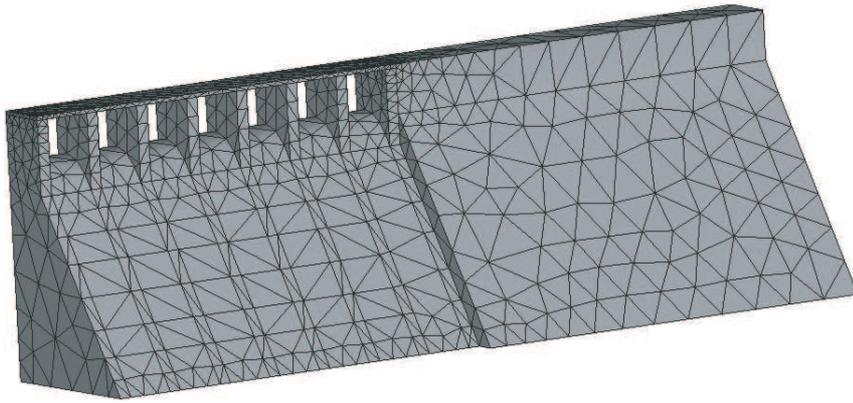
En este ejemplo se plantea un problema de conducción de calor en una presa de hormigón, y se analiza la distribución de temperaturas en una situación en la que el paramento de aguas abajo tiene una temperatura sensiblemente superior al paramento de aguas arriba (generalmente en contacto con el agua). Este fenómeno se debe a que el sol calienta el paramento de aguas abajo mientras que el de aguas arriba queda cubierto en su mayor parte por el agua, que actúa de regulador de temperatura.

En este caso concreto, el paramento de aguas abajo se encuentra sometido a una temperatura constante de  $30^{\circ}\text{C}$ , mientras que el que está en contacto con el agua embalsada tiene una temperatura de  $10^{\circ}\text{C}$ . La sección de la presa se puede apreciar en la Figura 7.4(c), típica de una presa de gravedad, y se encuentra dividida en dos partes, una de las cuales está provista de aliviaderos de labio fijo (ver Figuras 7.4(a), 7.4(b) y 7.4(c))

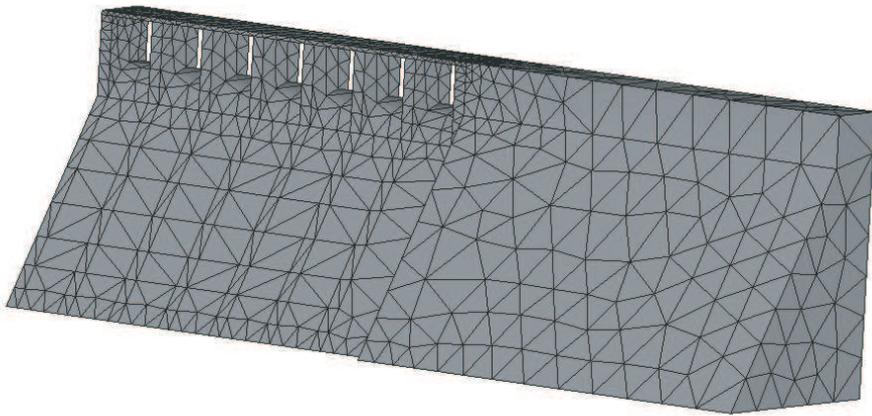
Se ha realizado el cálculo con elementos finitos, discretizando la presa en tetraedros y obteniendo la temperatura en los nodos y el gradiente de temperaturas. En las Figuras 7.5(a), 7.5(b) y 7.5(c) se muestran los resultados de las temperaturas. Como se puede observar, la sencillez de la geometría hace que la variación de temperaturas entre ambos paramentos sea prácticamente lineal en toda la sección de la presa. Así mismo, dado que no se han impuesto condiciones de contorno en los laterales de la estructura, se puede observar perfectamente la variación de temperaturas.

## 7.2. Filtración en Medios Porosos

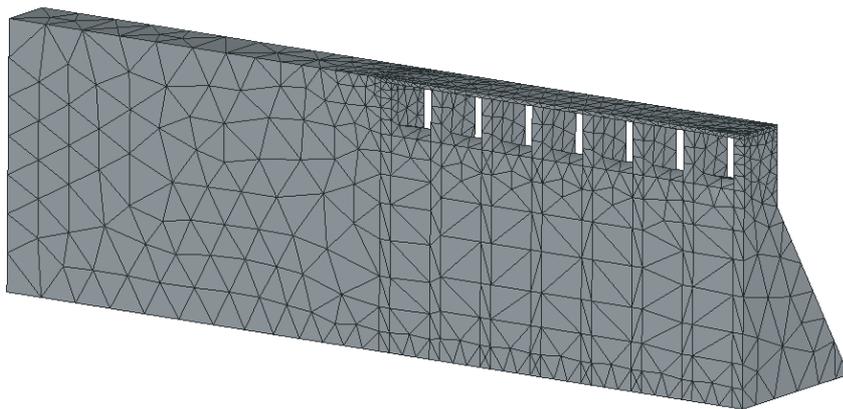
El segundo de los problemas que se va a analizar en detalle en este capítulo es el problema de filtración de un fluido en un medio poroso, este problema es especialmente importante en



(a) Paramento de aguas abajo (1).

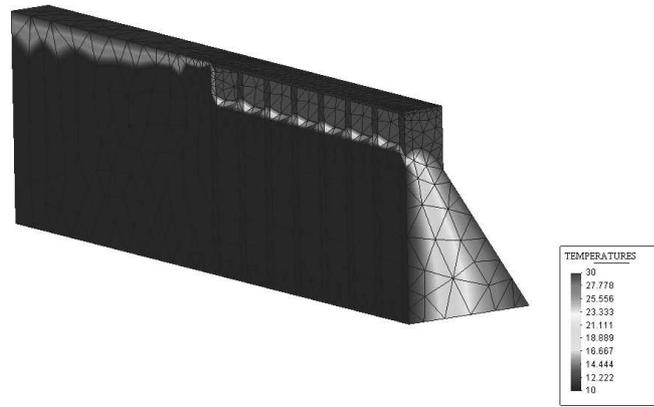


(b) Paramento de aguas abajo (2).

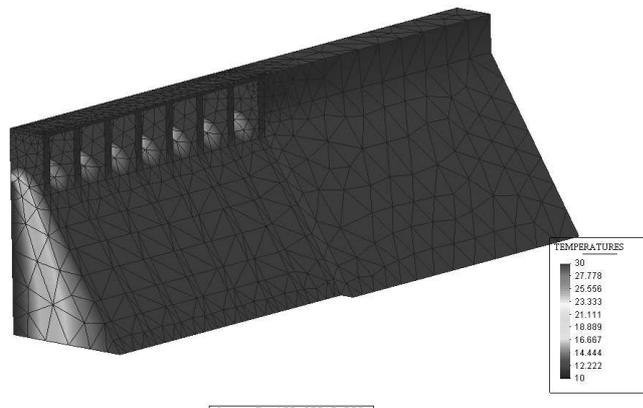


(c) Paramento de aguas arriba.

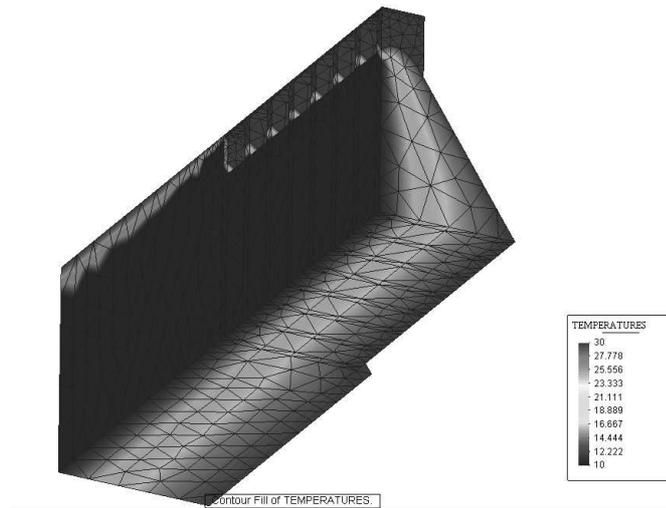
Figura 7.4: Vistas de la geometría de la presa



(a) Paramento de aguas arriba.



(b) Paramento de aguas abajo.



(c) Cimiento.

Figura 7.5: Solución de la distribución de temperaturas en el cuerpo de presa.

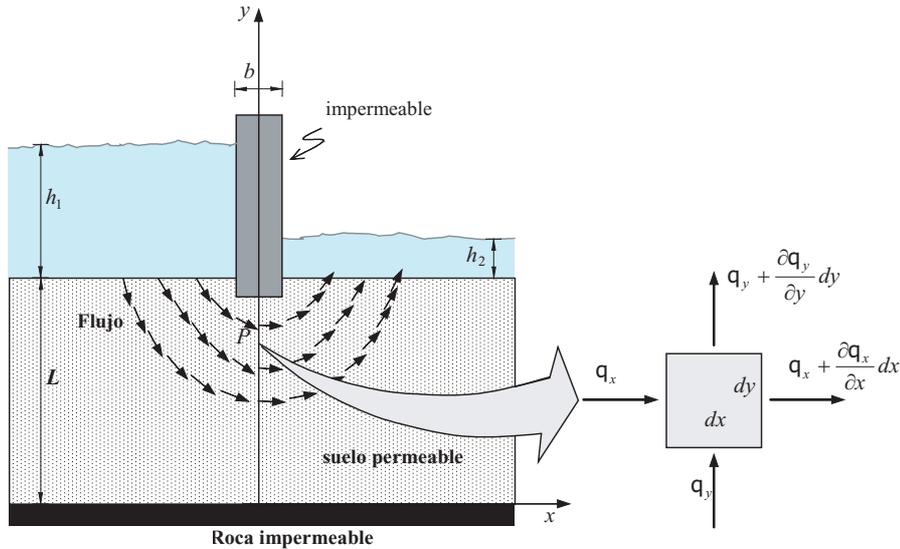


Figura 7.6: Ejemplo de flujo a través de un medio poroso.

ingeniería civil porque una de las acciones más dañinas y, en muchas ocasiones, determinante en la construcción de obras civiles (presas, muros, canales, tuberías, etc.) se debe al efecto perjudicial del agua, tanto por sus efectos químicos y corrosivos (disolución, reacciones químicas, etc.), como por su efecto degradante (ciclos de hielo y deshielo), como por las sobrecargas que ejerce sobre las estructuras debido a la presión hidrostática (empujes, sifonamiento, etc.).

Para la obtención de las ecuaciones que gobiernan el flujo se considera la sección transversal de una presa como la mostrada en la Figura 7.6. Para deducir la formulación se parte del caso bidimensional y se supone un proceso **estacionario**. El caso transitorio es análogo al del flujo de calor, y su extensión al caso tridimensional es inmediata y trivial.

Partiendo de un elemento de superficie diferencial  $dS = dxdy$  por el que discurre un determinado flujo se va a proceder a establecer el equilibrio másico (ecuación de conservación de la masa) de forma que la cantidad de fluido que entra en el elemento a través de los contornos, menos la que sale, ha de ser igual a la que se genera (fuente o sumidero). De esta forma se obtiene:

$$Q_V + \left[ q_x - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) \right] dy + \left[ q_y - \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) \right] dx = 0, \quad (7.51)$$

donde  $Q_V$  es el volumen de agua que entra (positivo si se trata de una fuente o negativo si se trata de un sumidero u extracción de agua) y  $\mathbf{q} = (q_x \ q_y)^T$  es el vector flujo. Si se divide por el área del elemento la expresión anterior queda como:

$$Q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow Q - \nabla^T \mathbf{q} = 0, \quad (7.52)$$

donde en este caso  $Q$  es el volumen de agua generado por unidad de área.

La ley fenomenológica que rige el flujo a través de un medio poroso es la *Ley de Darcy*, que se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{k} \nabla \phi = -\mathbf{k} \nabla \phi, \quad (7.53)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector flujo de fluido por unidad de área y por unidad de tiempo,  $\mathbf{k}$  es el tensor de permeabilidad (tensor de segundo orden) y  $\phi$  es el potencial, que en este caso representa la altura piezométrica (energía) definida como:

$$\phi = y + p\gamma + \frac{v^2}{2g}, \quad (7.54)$$

donde  $p$  es la presión del fluido y  $v$  es la velocidad del flujo, que en este tipo de problemas es despreciable por ser generalmente muy pequeña ( $v \approx 0$ ). En caso de que el material sea ortótropo,  $\mathbf{k}$  se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}, \quad (7.55)$$

donde  $k_x$  y  $k_y$  son los coeficientes de permeabilidad en las direcciones de los ejes coordenados  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Reemplazando (7.53) en la ecuación (7.52), se obtiene:

$$Q + \nabla^T \mathbf{k} \nabla \phi = Q + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = Q + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0, \quad (7.56)$$

que es la ecuación de **difusión-convección** particularizada para el caso de flujo en medios permeables en 2 dimensiones para problemas **estacionarios** que no dependen del tiempo.

Si el material es isótropo ( $k_x = k_y = k$ ) la ecuación (7.56) se transforma en la ecuación de **Poisson**:

$$Q + \nabla^2 \phi = Q + k \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (7.57)$$

mientras que si además, análogamente a lo que ocurría en el caso de flujo calórico, no existen fuentes (aportaciones de fluido) ni sumideros (extracción de caudal, bombeo) de fluido, la ecuación (7.56) se transforma en la ecuación de **Laplace**:

$$\nabla^2 \phi = k \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (7.58)$$

**Comentario 7.8** Como puede observarse, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la transferencia de calor y la filtración a través de medios permeables son análogas. ■

### 7.2.1. Condiciones de Contorno

Análogamente al caso de la transferencia de calor, las condiciones de contorno en este tipo de problemas son

1. **Altura piezométrica conocida en un determinado contorno:** En este caso se conoce el potencial en el contorno  $S_1$ :

$$\phi(x, y) = \phi_0; \quad \forall (x, y) \in S_1, \quad (7.59)$$

donde  $\phi_0$  es el valor de la altura piezométrica en ese contorno.

Para el caso del ejemplo de la presa el potencial es conocido en todo el contorno correspondiente a la interfase agua-suelo, donde usando (7.54), se obtiene que:

$$\phi(x, L)|_{x < -\frac{b}{2}} = L + h_1 \quad ; \quad \phi(x, L)|_{x > \frac{b}{2}} = L + h_2. \quad (7.60)$$

Nótese que el origen de coordenadas, y por tanto la referencia para la medida de altura piezométrica está situada al nivel interfase suelo-roca.

Esta condición de contorno es una condición de contorno **esencial** o de **Dirichlet**.

2. **Flujo conocido en una superficie:** En este caso se conoce el flujo de fluido a través de una superficie del dominio  $S_2$ . La expresión que define esta condición de contorno es:

$$k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + q_0 = 0, \quad (7.61)$$

donde  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$  es el vector normal a la superficie  $S_2$  de flujo conocido, y  $q_0$  es el valor del flujo.

Para el ejemplo de la presa existen dos condiciones de contorno asociadas a flujo conocido, concretamente para los contornos impermeables, interfase suelo-presa  $S_2^{(1)} = \{y = L; -b/2 < x < b/2\}$  e interfase suelo-roca  $S_2^{(2)} = \{y = 0; -\infty < x < \infty\}$ , en los que la expresión (7.61) queda, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \phi}{\partial x} 0 + k \frac{\partial \phi}{\partial y} 1 + 0 &= k \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0; \quad \forall (x, y) \in S_2^{(1)}, \\ k \frac{\partial \phi}{\partial x} 0 - k \frac{\partial \phi}{\partial y} 1 + 0 &= -k \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0; \quad \forall (x, y) \in S_2^{(2)}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{n}_{S_2^{(1)}} = (0, 1)^T$  y  $\mathbf{n}_{S_2^{(2)}} = (0, -1)^T$ . Que son la condición matemática para que el flujo a través de la presa, que se supone impermeable en comparación con el terreno, sea nulo.

Esta condición de contorno es una condición de contorno **natural** o de **Neumann**.

### 7.2.2. Formulación de Elementos Finitos para Problemas de Flujo

Análogamente a lo que se hizo en la Sección 7.1.3 en la que se obtuvo la formulación MEF para resolver problemas de temperatura, en este apartado se obtiene la formulación general del MEF para problemas de flujo en medios permeables en dos dimensiones y para problemas estacionarios. También se emplea el método de Galerkin para la selección de las funciones de peso.

Los pasos para la resolución del problema mediante el MEF son los siguientes:

- **Paso 1: División del dominio en elementos.** Partiendo del dominio  $\Omega$  se subdivide en un número finito de elementos discretos  $n_{el}$ , en este caso el dominio es bidimensional.
- **Paso 2: Ecuaciones del MEF para el elemento.** La solución del problema (altura piezométrica) en función de los valores nodales solución se aproxima a través de las funciones de forma:

$$\phi(x, y) = [\mathbf{N}(x, y)] \left\{ \phi^{(e)} \right\}, \quad (7.62)$$

en la que

$$[\mathbf{N}(x, y)] = [ N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad \cdots \quad N_{n_{ne}}(x, y), ] \quad (7.63)$$

y  $\{\phi^{(e)}\}^T = \{\phi_1 \phi_2 \dots \phi_{n_{ne}}\}$ , donde  $\phi_i$  es la altura piezométrica en el nodo  $i$  del elemento y  $n_{ne}$  es el número de nodos por elemento. Nótese que en este caso no intervienen ni la variable  $z$  ni el tiempo.

La ecuación diferencial (7.57) ha de cumplirse en todo el elemento y dado que la solución que se va a calcular es aproximada, y el método de Galerkin establece que la integral ponderada del error entre la solución y la aproximación, utilizando las funciones de forma como pesos a lo largo de todo el volumen del elemento  $S^{(e)}$ , ha de ser nula. Por tanto, se ha de cumplir la siguiente condición matemática:

$$\int_{S^{(e)}} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q \right] dS = 0; \quad i = 1, \dots, n_{ne}. \quad (7.64)$$

Nótese que (7.64) representa la integral de los *residuos ponderados* a lo largo de todo el elemento.

Integrando por partes los dos primeros términos en (7.64) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{S^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dS &= - \int_{S^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dS + \int_{l^{(e)}} N_i k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x dl; \quad i = 1, \dots, n_{ne}, \\ \int_{S^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dS &= - \int_{S^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} dS + \int_{l^{(e)}} N_i k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y dl; \quad i = 1, \dots, n_{ne}, \end{aligned} \quad (7.65)$$

donde  $l^{(e)}$  es el contorno del elemento seleccionado, constituido por todas sus aristas. Nótese que la integral de línea se multiplica por las componentes del versor normal a la misma  $(n_x, n_y)$ , y representan el flujo de agua ponderado a través del contorno del elemento.

Sustituyendo (7.65) en (7.64) se llega a:

$$\begin{aligned} - \int_{S^{(e)}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dS \\ + \int_{l^{(e)}} N_i \left[ k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right] dl + \int_{S^{(e)}} N_i Q dS = 0; \quad i = 1, \dots, n_{ne}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Nótese que el integrando del primer término en la segunda fila en (7.66) es igual que el término de la izquierda en la condición de contorno de flujo (natural) (7.61) multiplicado por la función de forma correspondiente.

Reemplazando el integrando por su valor según (7.61) queda la siguiente integral que tiene en cuenta las condiciones de contorno naturales:

$$\int_{l_i^{(e)}} N_i \left[ k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right] dl = - \int_{l_i^{(e)}} N_i \bar{q} dl; \quad i = 1, \dots, n_{ne}. \quad (7.67)$$

Nótese que la integral (7.67) únicamente ha de evaluarse en aquellos contornos de los elementos cuyas aristas coincidan con los dominios del problema global en los que se conoce la condición de contorno, ya que en caso contrario, su valor se anula con la integral correspondiente al elemento contiguo. Por lo tanto, únicamente se obtiene en  $l_i^{(e)} \cap S_2$  donde  $S_2$  es el dominio en el que se define la condición de contorno (7.61).

Si se sustituye (7.67) en (7.66) y se reorganizan términos:

$$\int_{S^{(e)}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dS = \int_{S^{(e)}} N_i Q dS - \int_{l_i^{(e)} \cap S_2} N_i \bar{q} dl; \quad i = 1, \dots, n_{ne}. \quad (7.68)$$

Teniendo en cuenta (7.62) se puede expresar el potencial en el elemento debido al potencial (altura piezométrica) de cada uno de los nodos como:

$$\phi_j(x, y) = N_j \phi_j^{(e)}; \quad j = 1, \dots, n_{ne}, \quad (7.69)$$

de forma que  $\phi^{(e)} = \sum_{j=1}^{n_{ne}} N_j \phi_j^{(e)}$ .

Reemplazando en (7.68) el potencial  $\phi$  por  $\phi_j$ , y éste a su vez por (7.69), se obtiene la siguiente expresión:

$$\phi_j^{(e)} \int_{S^{(e)}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dS = \int_{S^{(e)}} N_i Q dS - \int_{l_i^{(e)} \cap S_2} N_i \bar{q} dl; \quad (7.70)$$

$$i = 1, \dots, n_{ne}, j = 1, \dots, n_{ne},$$

en la que los términos a la izquierda de la igualdad constituyen el elemento  $(i, j)$  de la matriz de rigidez, mientras que el término de la derecha es el elemento  $i$ -ésimo del vector de términos independientes.

La ecuación anterior se puede expresar como:

$$k_{ij}^{(e)} \phi_j^{(e)} = p_{1i}^{(e)} + p_{2i}^{(e)}, \quad (7.71)$$

en la que  $k_{ij}^{(e)}$  es el término  $(i, j)$  de la matriz de rigidez del elemento debido a la integración de la ecuación de Poisson, mientras que  $p_{1i}^{(e)}$  y  $p_{2i}^{(e)}$  son la influencia en el término  $i$ -ésimo del vector de términos independientes del elemento debido, respectivamente, a la presencia de un término de generación de fluido (fuente o sumidero) y al flujo conocido en un contorno.

La expresión completa de la matriz de rigidez en forma matricial queda de la siguiente manera:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] \{ \phi^{(e)} \} = \{ \mathbf{p}_1^{(e)} \} + \{ \mathbf{p}_2^{(e)} \} \quad (7.72)$$

en la que cada una de las submatrices y vectores se obtienen de la siguiente manera:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_{S^{(e)}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dS = \int_{S^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial x} & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial y} \end{bmatrix} dS, \quad (7.73)$$

Nótese que la matriz  $[\mathbf{B}]$  contiene las derivadas de las funciones de forma y  $[\mathbf{D}]$  es la matriz de permeabilidad. El término independiente asociado a una fuente de calor queda como:

$$\{ \mathbf{p}_1^{(e)} \} = \int_{S^{(e)}} Q [\mathbf{N}]^T dS = \int_{S^{(e)}} Q \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n_{ne}} \end{bmatrix} dS, \quad (7.74)$$

y el término independiente relativo al flujo conocido en un contorno es:

$$[\mathbf{p}_2^{(e)}] = \int_{l_i^{(e)} \cap S_2} -\bar{q} [\mathbf{N}]^T d\ell = \int_{l_i^{(e)} \cap S_2} -\bar{q} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n_{ne}} \end{bmatrix} d\ell. \quad (7.75)$$

- **Paso 3: Obtención del sistema discreto.** Una vez obtenidas las matrices de rigidez de cada uno de los elementos y los términos independientes, se continúa con el procedimiento de ensamblaje:

$$[\mathbf{K}] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{k}^{(e)}]; \{\mathbf{P}\} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{p}^{(e)}] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \left( [\mathbf{p}_1^{(e)}] + [\mathbf{p}_2^{(e)}] \right), \quad (7.76)$$

donde  $[\mathbf{K}]$  es la matriz de rigidez global estacionaria del sistema, y  $\{\mathbf{P}\}$  es el vector de términos independientes. De esta forma es posible obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}] \{\phi\}. \quad (7.77)$$

- **Paso 4: Introducción de las condiciones de contorno esenciales.** En el Paso 3 se vio como la integración por partes para la resolución de la ecuación diferencial mediante el MEF obligaba a satisfacer las condiciones de contorno naturales asociadas al flujo, lo cual generaba una serie de términos que afectaban a la matriz de rigidez. En este caso no se ha dicho nada sobre las condiciones de contorno esenciales (7.59). Éstas se introducen en el sistema ensamblado (7.77) empleando el procedimiento ya visto en la Sección 4.2.7, que modifica la matriz de rigidez y el vector de términos independientes de forma que se satisfagan las condiciones de contorno asociadas a valores fijos de la altura piezométrica.
- **Paso 5: Resolución del sistema lineal de ecuaciones.** Una vez modificado el sistema discreto se procede a su resolución, con lo cual se obtienen las alturas piezométricas nodales solución:

$$\{\phi\} = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{P}\}. \quad (7.78)$$

- **Paso 6: Cálculo del flujo en un contorno.** Una vez obtenidas las alturas piezométricas nodales globales solución, se puede calcular el flujo a través de un contorno diferencial  $d\ell$  empleando la siguiente ecuación en forma matricial:

$$\begin{aligned} q_{n_S} &= -\mathbf{n}^T \left( \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix} \left( - \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{n_{ne}} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (7.79)$$

Nótese que si lo que se desea es calcular el flujo total de fluido que sale por una determinada superficie basta con integrar (7.79) sobre la misma:

$$Q_S = \int_S q_{n_S} dS. \quad (7.80)$$

### 7.2.3. Matriz de Rigidez del Elemento Triangular de 3 Nodos

En la sección anterior se presentó la aproximación genérica del MEF para la resolución de problemas de flujo en medios permeables. En este apartado se obtienen las expresiones para el cálculo de la matriz de rigidez y el término independiente del elemento triangular de tres nodos. Nótese que las funciones de forma son las dadas en la ecuación (5.20), por lo que la matriz  $[\mathbf{B}]$  con las derivadas de las funciones de forma queda como:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad (7.81)$$

donde  $A^{(e)*}$  es el área del triángulo (5.22), en la que los coeficientes constantes  $c_i, b_i; i = 1, 2, 3$ , vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} b_1 &= (y_2 - y_3); & b_2 &= (y_3 - y_1); & b_3 &= (y_1 - y_2); \\ c_1 &= (x_3 - x_2); & c_2 &= (x_1 - x_3); & c_3 &= (x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (7.82)$$

Teniendo en cuenta estas funciones de forma, (7.81), y (7.82), las ecuaciones (7.73)-(7.75) se transforman en:

- **Matriz de rigidez para la resolución de la ecuación de Poisson:** La matriz (7.73) para el elemento triangular de tres nodos quede de la siguiente manera:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} A^{(e)}. \quad (7.83)$$

- **El término independiente asociado a una fuente de fluido:** Nótese que esta integral es análoga a (5.56) pero en esta ocasión se realiza teniendo en cuenta que la integral de un plano sobre una superficie plana es igual al volumen encerrado por el plano en esa superficie:

$$[\mathbf{p}_1^{(e)}] = Q \int_{S^{(e)}} \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y \\ a_2 + b_2x + c_2y \\ a_3 + b_3x + c_3y \end{bmatrix} dS = \frac{QA^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.84)$$

donde  $QA^{(e)}$  es la cantidad de fluido aportada o extraída del elemento, que se reparte de forma proporcional entre sus tres nodos.

- **El término independiente relativo al flujo conocido en un contorno:** En este caso la integral de un plano sobre una línea es igual al área del triángulo que conforman la línea y el plano:

$$[\mathbf{p}_2^{(e)}] = -\bar{q} \int_{l_i^{(e)} \cap S_2} \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y \\ a_2 + b_2x + c_2y \\ a_3 + b_3x + c_3y \end{bmatrix} d\ell = \frac{-\bar{q}l_i^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.85)$$

que se corresponde con el término asociado al flujo por el contorno opuesto al nodo 3, es decir, que la  $i$ -ésima componente del vector es nula.

**Comentario 7.9** Nótese que, análogamente a lo que ocurría con el elemento tetraédrico, en las ecuaciones particularizadas para el elemento triangular intervienen tanto  $A^{(e)}$  como  $A^{(e)*}$ .  $A^{(e)}$  es el área del triángulo, que es siempre positivo, mientras que  $A^{(e)*}$  es el cálculo del área mediante la fórmula del determinante, y en función de la numeración de los nodos puede ser positivo, o negativo. ■

### 7.2.4. Ejemplo de Filtración Durante la Construcción de un Garaje Subterráneo

Se va proceder a la construcción de un garaje subterráneo en una zona próxima a la costa. La planta del garaje tiene forma rectangular siendo la dimensión del largo mucho mayor que la del ancho (40 metros) y debido a la proximidad del mar y a la cota del terreno original, el nivel freático se sitúa al nivel de la calle (cota +40 sobre el nivel de referencia).

Considérese el corte transversal de la excavación mostrado en la Figura 7.7, en la que el punto A tiene de coordenadas (30,20). Para la cimentación del garaje se ha decidido utilizar

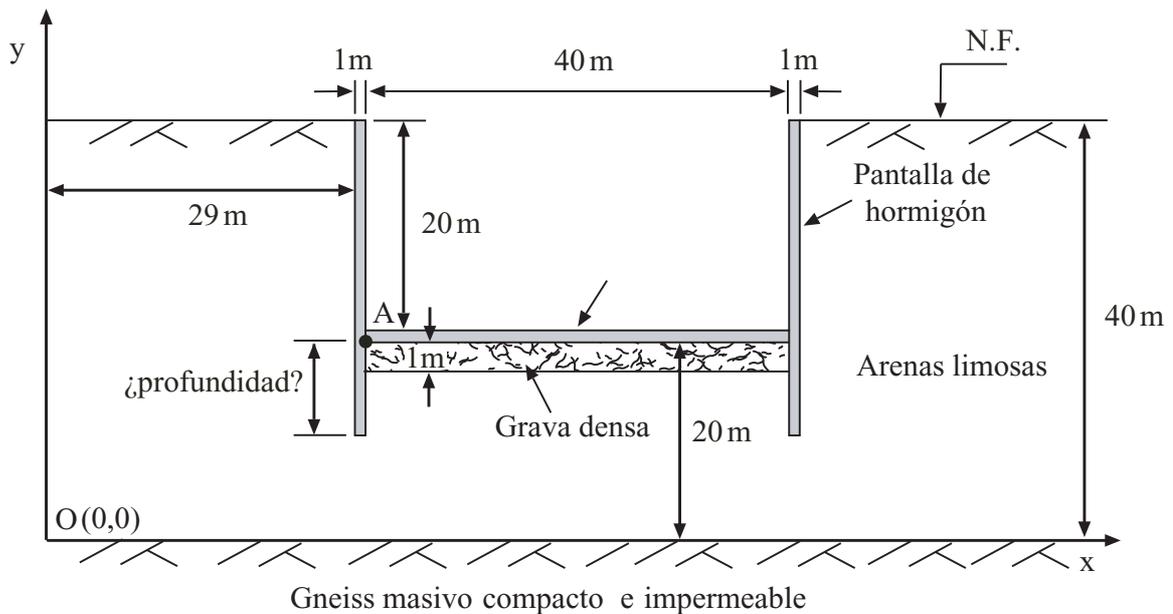


Figura 7.7: Sección transversal tipo de la excavación del garaje (cotas en metros).

una losa de hormigón. Nótese que la excavación y construcción posterior del garaje con su losa de cimentación tiene tres condicionantes muy importantes:

1. El primero se produce en la fase de construcción, por un lado como el nivel freático está por encima de la cota +20 a la que va a colocarse la losa, la excavación tiende a inundarse, y por otro, hay riesgo de sifonamiento, que impediría la movilidad de la maquinaria y el trabajo en el fondo de la excavación, y podría suponer un peligro para los operarios.
2. El segundo se daría en la fase de explotación, ya que el uso de una losa de hormigón en toda la superficie del garaje impide la filtración del agua y existe la posibilidad de que todo el garaje flote debido a la presión del agua, con el consiguiente riesgo de levantamiento, fisuras, etc.
3. El tercero, también en fase de explotación, se debe a posibilidad de que existan filtraciones por las imperfecciones del hormigón, que podrían provocar la inundación del garaje. Este fenómeno se ve limitado porque la extracción de agua mediante bombas se ve imposibilitada por el terreno circundante que, dada su baja permeabilidad, no permite el drenaje por bombeo.

Para tratar de subsanar todos estos problemas se ha decidido tomar dos medidas:

1. La primera trata de resolver el problema de sifonamiento. Se va a proceder a alargar la profundidad de la pantalla de hormigón por debajo de la cota de construcción de la losa

(cota +20) en una profundidad de 7 metros, pero aun no se sabe si esta profundidad resolverá el problema. Con esta solución se consigue aumentar el camino de la filtración del agua, con lo que se reducen los gradientes del potencial y por tanto se disminuye la posibilidad de sifonamiento.

2. La segunda trata de eliminar las presiones a las que está sometida la losa y las posibles filtraciones e inundación en el garaje. Consiste en la sustitución del primer metro de terreno de la excavación por una grava compacta, con un mayor coeficiente de permeabilidad que permita un fácil drenaje por bombeo y la consiguiente colocación de bombas. Con ello, además de favorecer la no aparición de sifonamiento, se reducen considerablemente las sobrepresiones a las que va estar sometida la losa.

Teniendo en cuenta todos esos condicionantes, considerando que los coeficientes de permeabilidad de la arena limosa y de la grava son  $0,001 \text{ cm/s}$  y  $1 \text{ cm/s}$ , respectivamente<sup>1</sup>, y dada la discretización en elementos triangulares mostrada en la Figura 7.8, en la que se tiene en cuenta la simetría del problema, se va a realizar un estudio en cuatro fases distintas.

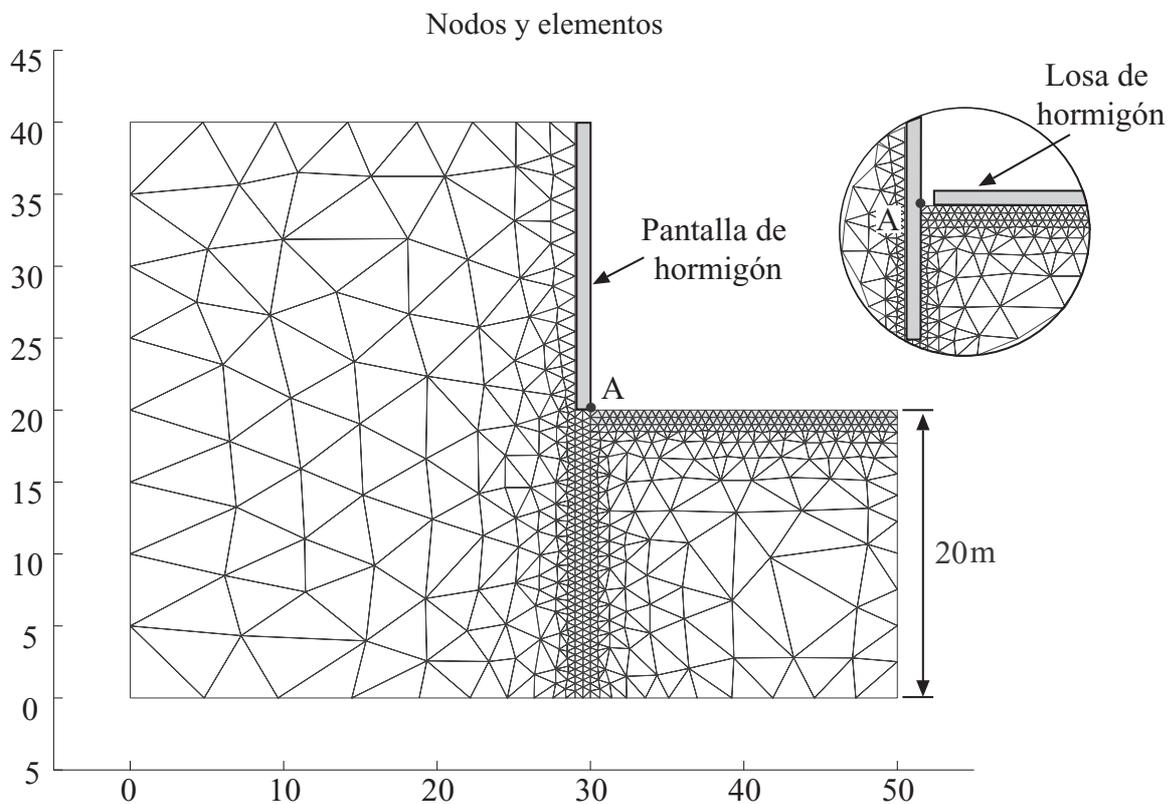


Figura 7.8: Discretización de una de las partes simétricas de la sección transversal del garaje en elementos triangulares (cotas en metros).

**Hipótesis inicial:** Esta situación se corresponde a la realización de la excavación cuando no se profundiza con la pantalla de hormigón por debajo de la cota de la solera del garaje, ni se coloca el relleno de grava. Teniendo esto en cuenta se tratan de calcular y contestar los siguientes interrogantes:

<sup>1</sup>El hormigón de la losa y de la pantalla se consideran impermeables, lo que implica que poner pantalla equivale a eliminar los elementos que la constituyen de la discretización. Esto supone una reenumeración de elementos y nodos que ha de hacerse de forma cuidadosa.

1. Las tensiones efectivas en todos los nodos de la discretización para comprobar si efectivamente se produce sifonamiento en la excavación suponiendo que aun no se ha tomado ninguna de las medidas propuestas. Para ello se emplea la siguiente expresión:

$$\sigma' = \sigma - p = \gamma_{\text{sat}}h - p, \quad (7.86)$$

donde  $\gamma_{\text{sat}} = 20 \text{ kN/m}^3$  es el peso específico saturado del terreno,  $h$  es la altura de la columna de terreno por encima de cada punto calculado y  $p$  es la presión de agua en ese punto, que se calcula a través de la altura piezométrica mediante la siguiente expresión:

$$p = \gamma_w(\phi - y), \quad (7.87)$$

donde  $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$  es el peso específico del agua,  $\phi$  es la altura piezométrica, e  $y$  es la cota o altura a la que está situado el punto.

2. ¿Se produce sifonamiento?, ¿en qué puntos se produce (dibujar el diagrama de “isotensiones” efectivas puede facilitar la localización de los puntos)?, ¿es lógico el resultado?

**Etapas de construcción 1:** Una vez comprobado si se cumple la condición de sifonamiento, para reducir la probabilidad de que se presente, y por motivos estructurales, se decide profundizar con la pantalla  $p_p = 7 \text{ m}$ , y proceder a la excavación del terreno hasta la cota (+20). En estas nuevas condiciones se tratan de calcular y contestar los siguientes interrogantes:

1. Las tensiones efectivas en todos los nodos de la discretización para comprobar la mejora con respecto a la situación en la hipótesis inicial, para lo cual se emplean las expresiones (7.86) y (7.87). ¿Es significativa la mejora?
2. El caudal que se filtra a la excavación por metro lineal de garaje, ya que es imprescindible para el dimensionamiento de las bombas a utilizar para evitar que se inunde durante esta etapa.

**Etapas de construcción 2:** En la segunda etapa constructiva se procede a sustituir el primer metro de terreno natural de la solera por la grava compacta, con el fin de mejorar la situación frente al sifonamiento y permitir un fácil drenaje por bombeo tras la construcción posterior de la losa. En estas nuevas condiciones se tratan de calcular y contestar los siguientes interrogantes:

1. Las tensiones efectivas en todos los nodos de la discretización para comprobar la mejora con respecto a la situación en la etapa 1, para lo cual se emplean las expresiones (7.86) y (7.87). ¿Es significativa la mejora?
2. El caudal que se filtra a la excavación por metro lineal de garaje imprescindible para el dimensionamiento de las bombas a utilizar para evitar que se inunde durante esta etapa. ¿Es suficiente el bombeo diseñado en la etapa anterior?

**Etapas de construcción 3:** En la tercera etapa constructiva se procede a colocar una losa de hormigón de 0,5 m de espesor en la solera de la excavación dejando una distancia de 1 metro entre la pantalla y la losa (véase el dibujo de detalle en la Figura 7.8), nótese que en ese metro se ubican las bombas de extracción de agua. En esta situación se tratan de calcular y contestar los siguientes interrogantes:

1. Las tensiones efectivas en todos los nodos de la discretización para comprobar la nueva situación frente al sifonamiento con respecto a la situación en la etapa 2, para lo cual se emplean las expresiones (7.86) y (7.87). y se considera que el peso específico del hormigón es de  $\gamma_h = 23 \text{ kN/m}^3$ . ¿Es coherente el resultado?, ¿a qué se debe?
2. El caudal que se filtra por metro lineal a la excavación por la franja que queda libre entre la losa y la pantalla.
3. Comprobar si la losa flota en algún punto.

**Hipótesis de comprobación:** En esta etapa y para comprobar si la presencia de la capa de gravas es importante se resolverá el mismo problema que en la etapa anterior pero sin considerar la capa de gravas. En estas condiciones se calculan y contestan los siguientes interrogantes:

1. Las tensiones efectivas en todos los nodos de la discretización para comprobar la nueva situación frente al sifonamiento con respecto a la situación en la etapa anterior, para lo cual se emplean las expresiones (7.86) y (7.87), y se considera que el peso específico del hormigón es de  $\gamma_h = 23 \text{ kN/m}^3$ . ¿Es coherente el resultado?, ¿a qué se debe?
2. El caudal que se filtra por metro lineal a la excavación por la franja que queda libre entre la losa y la pantalla.
3. Comprobar si la losa flota en algún punto.

### Material disponible

Para la resolución de este problema se dispone de cuatro ficheros que se describen a continuación:

1. **coord.dat**  $\implies$  Fichero en el que se encuentra la información de las coordenadas de los nodos de la discretización.
2. **trian.dat**  $\implies$  Fichero en el que se encuentra la información de los nodos que constituyen cada uno de los elementos de la discretización, es decir, la conectividad.
3. **dataexcavacion.m**  $\implies$  Fichero en el en función de los parámetros **pp** (profundidad de la pantalla), **new** (variable booleana para saber si se coloca relleno de gravas o no), **losa** (variable booleana para saber si se coloca la losa o no), **k1** (permeabilidad del terreno natural), y **k2** (permeabilidad de la grava), se encarga de eliminar los elementos correspondientes a la pantalla reenumerando en caso de que sea necesario, generar el vector de propiedades que indica para cada elemento que tipo de material es, generar automáticamente las condiciones de contorno esenciales teniendo en cuenta la configuración geométrica de cada hipótesis, y por último, asignar los valores de las permeabilidades de los materiales.
4. **resdibujoflujo.m**  $\implies$  Fichero para pintar la discretización de cada hipótesis, las líneas equipotenciales, las isobaras de presión de agua, y las isobaras de las tensiones efectivas en una única figura.

### Solución de la hipótesis inicial

La hipótesis inicial se corresponde con la situación en la que no se profundiza con la pantalla de hormigón por debajo de la cota de la solera, ni se coloca relleno de gravas. Nótese que esta hipótesis no se da en la realidad porque siempre se profundiza algo, pero sirve para mostrar las consecuencias de no tomar ninguna medida en la excavación.

Los valores de las variables para simular esta situación son los siguientes:

1. Dado que no se profundiza nada por debajo de la solera de la excavación,  $p_p = 0$ .
2. Como no se sustituye el primer metro de la solera de la excavación por gravas,  $\text{new}=0$ . Es decir la variable booleana que indica si se pone o no capa de gravas es cero (falso).
3. Como en esta etapa no hay losa entonces  $\text{losa}=0$ . Es decir la variable booleana que indica si se pone o no la losa de hormigón es cero (falso).

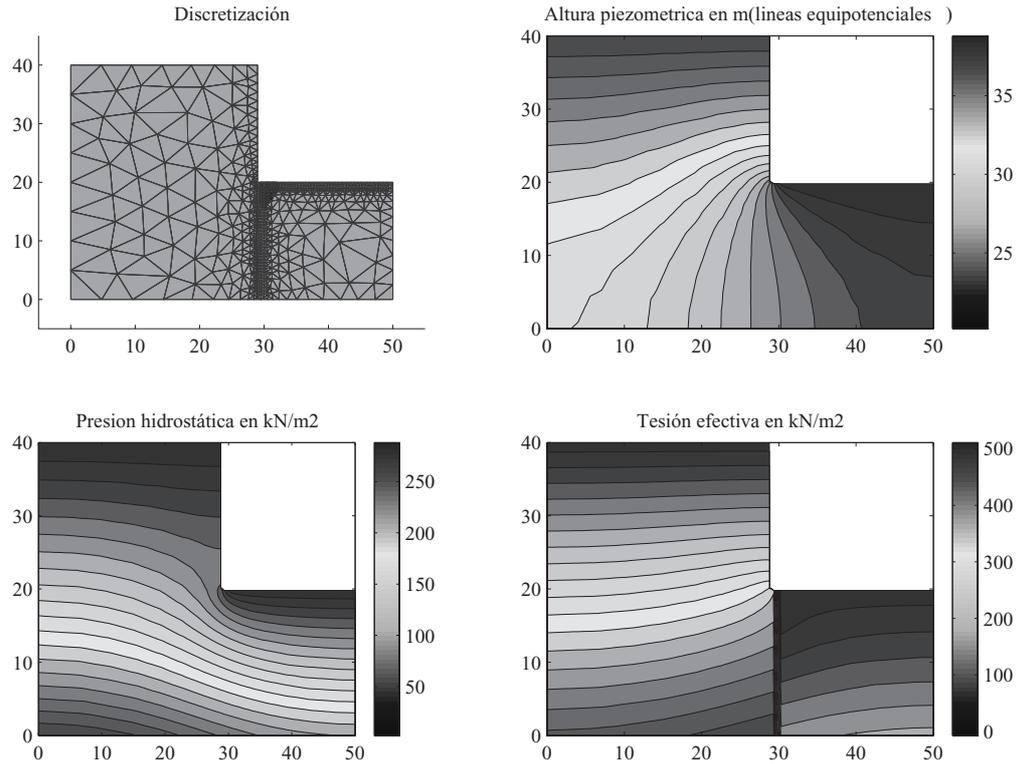


Figura 7.9: Discretización, líneas equipotenciales, líneas isobaras de la presión del agua, y líneas isobaras de la presión efectiva para la **hipótesis inicial**.

Una vez resuelto el problema de flujo, se obtienen las alturas piezométricas, las presiones de agua y de las tensiones efectivas en cada punto de la discretización. En la Figura 7.9 se muestra la discretización empleada en la que se observa la ausencia de pantalla, las líneas equipotenciales en las que se aprecia el giro del flujo con respecto a la base de la pantalla (nótese que el flujo es perpendicular a las líneas equipotenciales).

En este caso el número de puntos que sifona es de 21, situados en los primeros metros de la parte izquierda de la solera de la excavación, que es la zona más peligrosa desde el punto de vista de sifonamiento. Los elementos que sifonan se muestran en color negro en la discretización de la Figura 7.9. Este resultado es lógico porque es la zona en la que los gradientes de velocidad son mayores y además el peso de terreno es menor porque se ha eliminado en la excavación. El valor de la tensión efectiva mínima es de  $\sigma' = -15,08 \text{ kN/m}^2$ .

Respecto al caudal de agua filtrado es de  $0,1045 \text{ l/s}$  por metro lineal y lado de excavación. Téngase en cuenta que dada la simetría del problema sólo se estudia uno de los lados del garaje.

### Etapa de construcción 1

La primera etapa de la construcción consiste en la profundización de la pantalla hasta  $p_p = 7$  m, y posterior excavación. Los valores de las variables para simular esta situación son los siguientes:

1. Se coloca toda la pantalla, por tanto,  $p_p = 7$ .
2. Como no se sustituye el primer metro de la solera de la excavación por gravas,  $new=0$ . Es decir, la variable booleana que indica si se pone o no capa de gravas es cero (falso).
3. Como en esta etapa no hay losa entonces  $losa=0$ . Es decir, la variable booleana que indica si se pone o no la losa de hormigón es cero (falso).

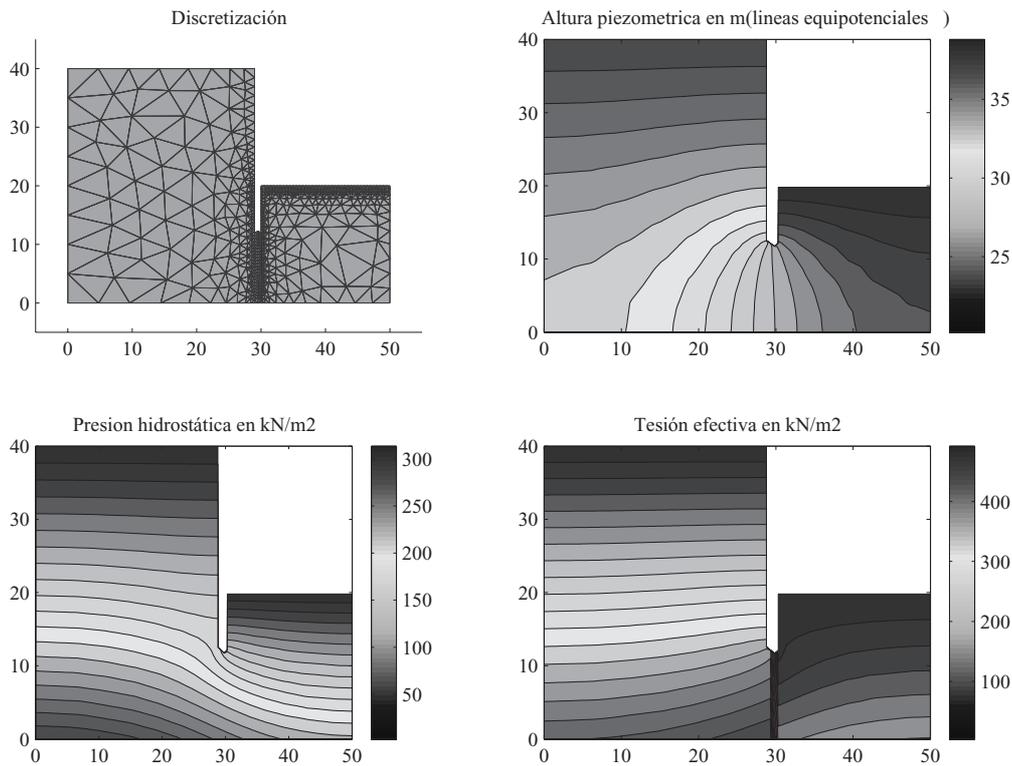


Figura 7.10: Discretización, líneas equipotenciales, líneas isobaras de la presión del agua, y líneas isobaras de la presión efectiva para la **Etapa de construcción 1**.

Una vez resuelto el problema de flujo, se obtienen las alturas piezométricas, las presiones de agua y de las tensiones efectivas en cada punto de la discretización. En la Figura 7.10 se muestra la discretización empleada en la que se observa la presencia de la pantalla, las líneas equipotenciales en las que se aprecia el giro del flujo con respecto a la base de la pantalla (nótese que el flujo es perpendicular a las líneas equipotenciales). Nótese que el número de puntos que sifona es de 0, y que la mínima tensión efectiva es de  $\sigma' = 0$  kN/m<sup>2</sup>, con lo cual se elimina la posibilidad de sifonamiento. Como puede verse las condiciones frente al sifonamiento mejoran mucho debido a que se ha alargado el camino de filtración reduciendo los gradientes del potencial.

En esta etapa el caudal filtrado a la excavación por metro lineal es de  $Q = 0,0801$  l/s (sólo en la parte izquierda debido a la simetría), con lo cual se observa que se reduce ligeramente el caudal filtrado.

### Etapa de construcción 2

La segunda etapa de la construcción consiste en la sustitución del primer metro de la excavación por una grava de mayor permeabilidad que el terreno natural. Los valores de las variables para simular esta situación son los siguientes:

1. Se coloca toda la pantalla, por tanto,  $p_p = 7$ .
2. Como se sustituye el primer metro de la solera de la excavación por gravas,  $\text{new}=1$ . Es decir, la variable booleana que indica si se pone o no capa de gravas es uno (verdadero).
3. Como en esta etapa no hay losa entonces  $\text{losa}=0$ . Es decir, la variable booleana que indica si se pone o no la losa de hormigón es cero (falso).

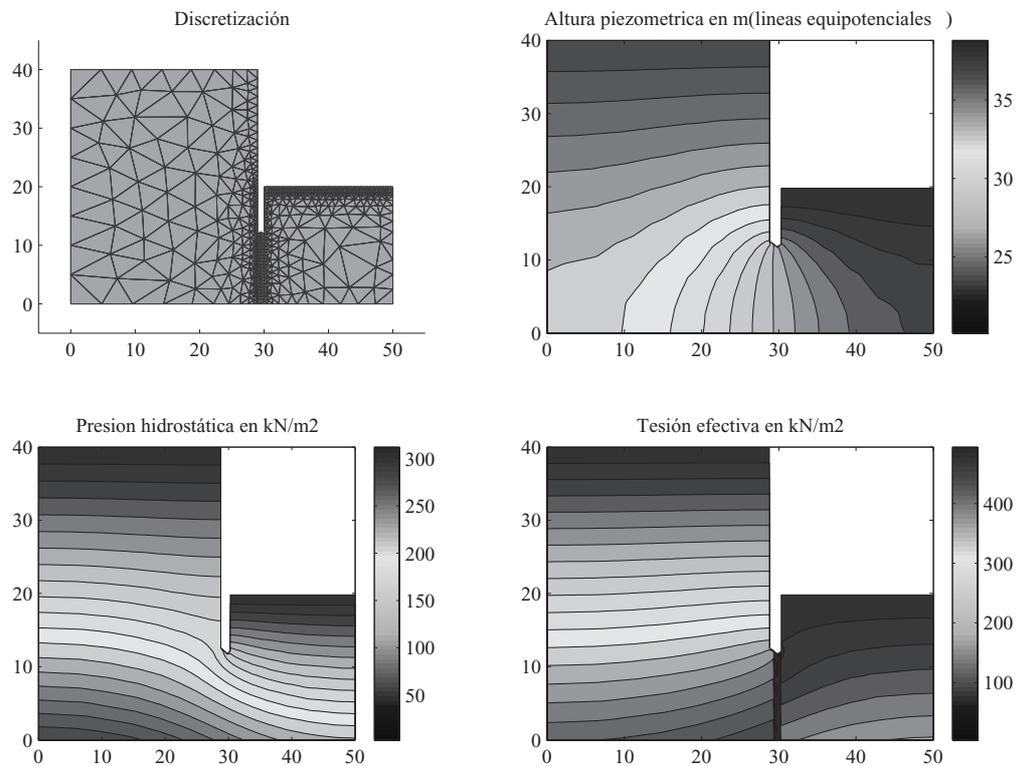


Figura 7.11: Discretización, líneas equipotenciales, líneas isobaras de la presión del agua, y líneas isobaras de la presión efectiva para la **Etapa de construcción 2**.

Una vez resuelto el problema de flujo, se obtienen las alturas piezométricas, las presiones de agua y de las tensiones efectivas en cada punto de la discretización. En la Figura 7.11 se muestra la discretización empleada en la que se observa la presencia de la pantalla, las líneas equipotenciales en las que se aprecia el giro del flujo con respecto a la base de la pantalla (nótese que el flujo es perpendicular a las líneas equipotenciales).

Nótese que el número de puntos que sifona es de 0, y que la tensión efectiva mínima es de  $\sigma' = 0 \text{ kN/m}^2$ , con lo cual se la situación no cambia con respecto a la situación anterior.

En esta etapa el caudal filtrado a la excavación por metro lineal es de  $Q = 0,0819 \text{ l/s}$  (sólo en la parte izquierda debido a la simetría), con lo que aumenta ligeramente. Este resultado es lógico ya que la grava tiene una mayor permeabilidad.

### Etapa de construcción 3

La tercera etapa de la construcción consiste en la colocación de la losa de 0,5 m de grosor dejando una separación de 1 metro con respecto a la pantalla.

Los valores de las variables para simular esta situación son los siguientes:

1. Se coloca toda la pantalla, por tanto,  $p_p = 7$ .
2. Como se sustituye el primer metro de la solera de la excavación por gravas,  $new=1$ . Es decir, la variable booleana que indica si se pone o no capa de gravas es uno (verdadero).
3. Como en esta etapa no hay losa entonces  $losa=1$ . Es decir, la variable booleana que indica si se pone o no la losa de hormigón es uno (verdadero).

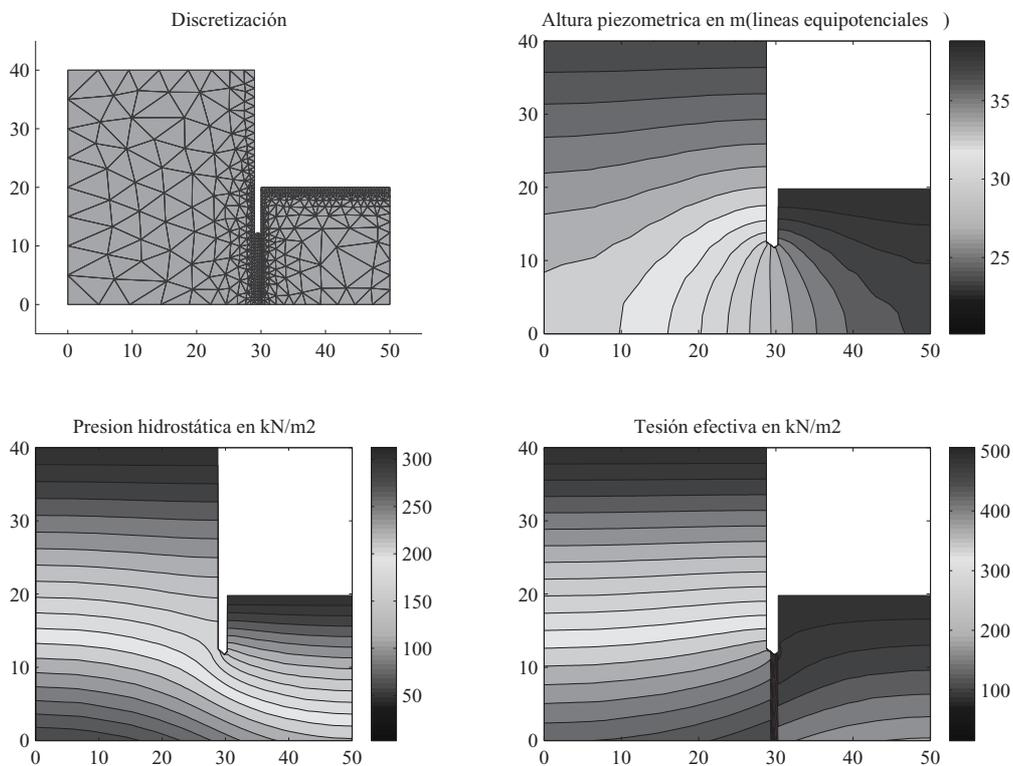


Figura 7.12: Discretización, líneas equipotenciales, líneas isobaras de la presión del agua, y líneas isobaras de la presión efectiva para la **Etapa de construcción 3**.

Una vez resuelto el problema de flujo, se obtienen las alturas piezométricas, las presiones de agua y de las tensiones efectivas en cada punto de la discretización. En la Figura 7.12 se muestra la discretización empleada en la que se observa la presencia de la pantalla, las líneas equipotenciales en las que se aprecia el giro del flujo con respecto a la base de la pantalla (nótese que el flujo es perpendicular a las líneas equipotenciales).

Nótese que el número de puntos que sifona es de 0, y que la mínima tensión efectiva es de  $\sigma' = 10,9 \text{ kN/m}^2$ , con lo cual se la situación mejora considerablemente. El número de los puntos de la discretización en el contacto losa terreno en el que la tensión es menor o igual que cero, es decir, que flotan, es de 0.

En esta etapa el caudal filtrado a la excavación por metro lineal es de  $Q = 0,0358$  l/s (sólo en la parte izquierda debido a la simetría), que se reduce sensiblemente, lo cual es lógico teniendo en cuenta que hemos pasado de una longitud de solera por la que sale agua de 20 m a 1m. En cualquier caso con esa reducción de longitud de solera por la que el agua sale a la superficie cabría esperar una mayor reducción de caudal. Esto se debe a la presencia de la capa de gravas, que por su alta permeabilidad, facilita la evacuación del agua hasta el extremo de la losa.

### Hipótesis de comprobación

En este caso para comprobar si es necesaria la capa de gravas se procede a resolver el problema con la losa y sin la pantalla de gravas. Los valores de las variables para simular esta situación son los siguientes:

1. Se coloca toda la pantalla, por tanto,  $p_p = 7$ .
2. Como no sustituye el primer metro de la solera de la excavación por gravas,  $new=0$ . Es decir, la variable booleana que indica si se pone o no capa de gravas es cero (falso).
3. Como en esta etapa no hay losa entonces  $losa=1$ . Es decir, la variable booleana que indica si se pone o no la losa de hormigón es uno (verdadero).

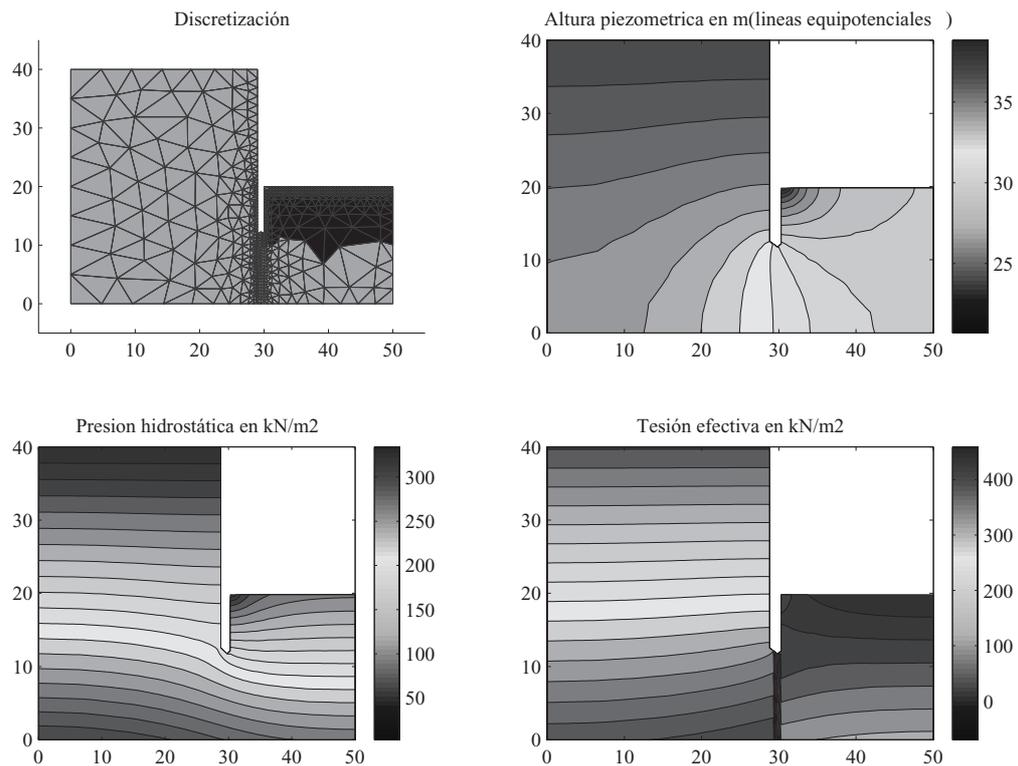


Figura 7.13: Discretización, líneas equipotenciales, líneas isobaras de la presión del agua, y líneas isobaras de la presión efectiva para la **hipótesis de comprobación**.

Una vez resuelto el problema de flujo, se obtienen las alturas piezométricas, las presiones de agua y de las tensiones efectivas en cada punto de la discretización. En la Figura 7.13 se muestra la discretización empleada en la que se observa la presencia de la pantalla, las líneas

equipotenciales en las que se aprecia el giro del flujo con respecto a la base de la pantalla (nótese que el flujo es perpendicular a las líneas equipotenciales). En este caso se observa como las equipotenciales encierran la salida o evacuación.

Nótese que el número de puntos que sifona es de 209, y que la mínima tensión efectiva es de  $\sigma' = -78 \text{ kN/m}^2$ , con lo cual no sólo no se elimina la posibilidad de sifonamiento sino que empeora. El número de los puntos de la discretización en el contacto losa terreno en el que la tensión es menor o igual que cero, es decir, que flotan, es de 38, lo que implica que la losa está flotando. Este resultado es lógico ya que prácticamente se trata de una situación cuasi-hidroestática. Los elementos que sifonan se muestran en color negro en la discretización de la Figura 7.13.

En este caso el caudal filtrado a la excavación por metro lineal es de  $Q = 0,0309 \text{ l/s}$  (sólo en la parte izquierda debido a la simetría), que se reduce ligeramente.

La conclusión es clara, es imprescindible la colocación de la capa de gravas para un correcto funcionamiento del sistema.

**Ejercicio 7.1 (Construcción de un garaje subterráneo).** Utilizando los datos del ejemplo de la Sección 7.2.4 y los ficheros indicados necesarios para su resolución, que están disponibles en el CD-Rom, se pide:

1. Escribir el código **matlab** necesario para la correcta resolución de problemas de flujo en medios permeables resolviendo la **ecuación de Laplace**.
2. Con ese código, generar un gráfico en el que se represente en el eje de abscisas la profundidad de pantalla en metros (m) y en el eje de ordenadas la tensión efectiva mínima en  $\text{kN/m}^2$  correspondiente. Para su realización se considerarán distintas profundidades de pantalla desde cero hasta 40,5 m con incrementos de 0,5 m. Este gráfico se empleará para determinar la profundidad de pantalla mínima que hay que colocar para evitar el sifonamiento durante la **etapa de construcción 1**.

Es imprescindible entregar un informe justificando los cálculos y la estructura general del programa, indicando los valores de las variables **pp**, **new**, **losa**, **k1** y **k2** que se han utilizado, analizando los resultados obtenidos, y contestando a todos los interrogantes planteados. ■

**Ejercicio 7.2 (Permeámetro de carga constante vertical).** En la Figura 7.14 se representa un permeámetro de carga constante y flujo ascendente. Se supone que existe una rejilla en la parte inferior de la muestra de arena, pero no en la superior, y que no hay fricción con las paredes del recipiente. Nótese que la altura  $H$  de la muestra de arena es de 1 metro, mientras que su ancho es de 0,5 metros.

Para unas condiciones determinadas se desea estudiar el proceso de filtración para comprobar si se produce sifonamiento o no. El coeficiente de permeabilidad de la arena es de  $0,9 \text{ cm/s}$ , y el incremento de altura de agua del depósito más elevado con respecto al más bajo es de  $\Delta H = 0,2 \text{ m}$ . Dada la discretización en elementos triangulares mostrada en la Figura 7.15, se pide:

1. ¿Qué ecuación gobierna el fenómeno de filtración en este caso?
2. Calcular analíticamente las alturas piezométricas en los nodos de la discretización. Justifica tu respuesta.
3. Calcular numéricamente mediante un programa de elementos finitos las alturas piezométricas en los nodos 2, 5, 8, 11 y 14 de la discretización, y comprueba la solución con la obtenida analíticamente.

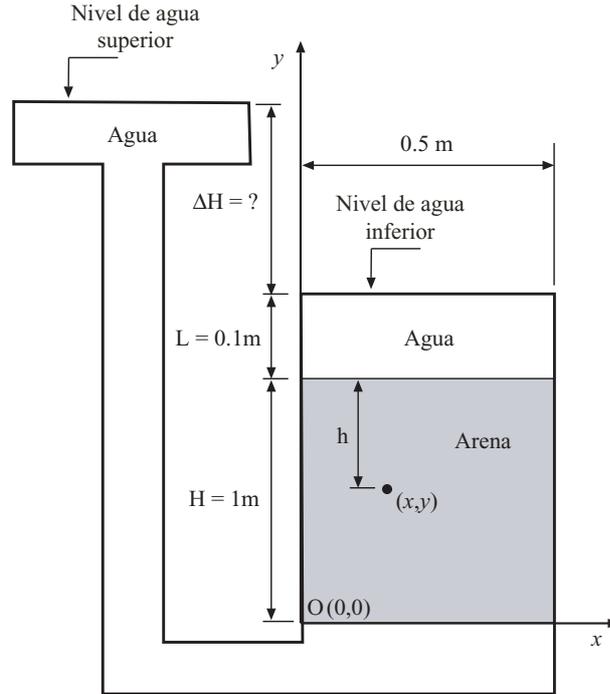


Figura 7.14: Permeámetro de carga constante (cotas en metros).

4. Calcular las tensiones efectivas en los nodos 2, 5, 8, 11 y 14 de la discretización para comprobar si efectivamente se produce sifonamiento. Para ello se emplea la siguiente expresión:

$$\sigma' = \sigma - p = \gamma_{\text{sat}} h - p, \quad (7.88)$$

donde  $\gamma_{\text{sat}} = 20 \text{ kN/m}^3$  es el peso específico saturado del terreno,  $h$  es la altura de la columna de arena por encima de cada punto calculado y  $p$  es la presión de agua en ese punto, que se calcula a través de la altura piezométrica mediante la siguiente expresión:

$$p = \gamma_w (\phi - y), \quad (7.89)$$

donde  $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$  es el peso específico del agua,  $\phi$  es la altura piezométrica, e  $y$  es la cota o altura a la que está situado el punto.

5. ¿Se produce sifonamiento?

■

**Ejercicio 7.3 (Permeámetro de carga constante en V).** En la Figura 7.16 se representa un permeámetro de carga constante. Se supone que existe una rejilla que evita que se escape la arena pero que permite el paso de agua, y que no hay fricción con las paredes del recipiente.

Para unas condiciones determinadas se desea estudiar el proceso de filtración para calcular las alturas piezométricas y presiones. Los coeficientes de permeabilidad de las arenas, arena<sub>1</sub> y arena<sub>2</sub> son de 0,9 y 9,0 cm/s, respectivamente,  $H = 1,000 \text{ m}$ , y el incremento de altura es de  $\Delta H = 0,5 \text{ m}$ . Dada la discretización en elementos triangulares mostrada en la Figura 7.17, calcular:

1. Alturas piezométricas en los nodos de la discretización.

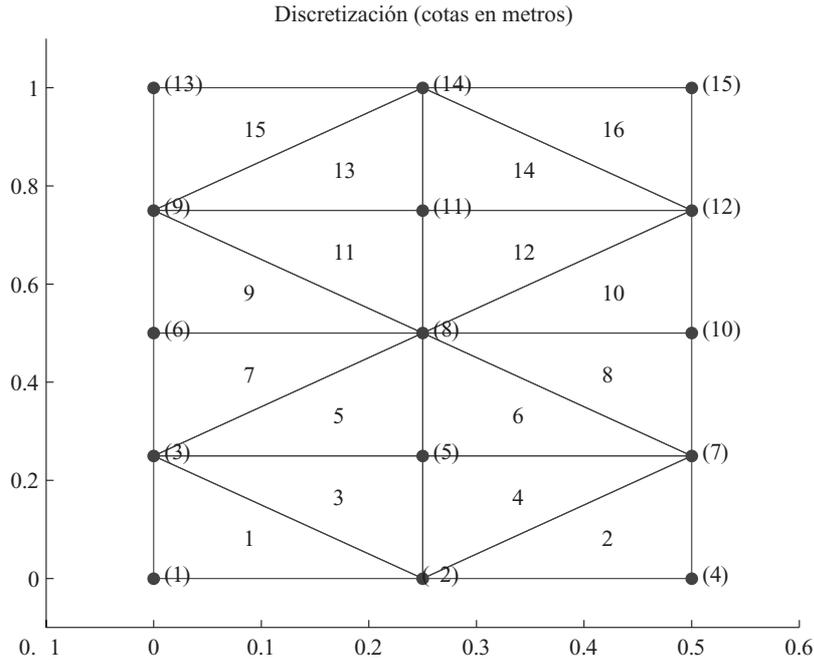


Figura 7.15: Discretización en elementos triangulares de la arena dentro del permeámetro de carga constante (cotas en metros).

2. Las presiones  $p$  en los nodos de la discretización, que se calcula a través de la altura piezométrica mediante la siguiente expresión:

$$p = \gamma_w(\phi - y), \tag{7.90}$$

donde  $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$  es el peso específico del agua,  $\phi$  es la altura piezométrica, e  $y$  es la cota o altura a la que está situado el punto.

3. Suponiendo que se intercambian las arenas 1 y 2 de posición (nótese que la arena 2 tiene un coeficiente de permeabilidad 10 veces mayor que la arena 1), ¿cómo se modifican las condiciones frente al sifonamiento en la parte de flujo ascendente?, ¿mejoran o empeoran?, razona la respuesta basándote en los resultados obtenidos y trata de dar una explicación física.



**Ejercicio 7.4 (Permeámetro de carga constante con sección variable).** En la Figura 7.18 se representa un permeámetro de carga constante y flujo ascendente con sección variable. Se supone que existe una rejilla en la parte inferior de la muestra de arena, pero no en la superior, y que no hay fricción con las paredes del recipiente. Nótese que la altura  $H$  de la muestra de terreno es de 1 metro (0,5 metros de arena y 0,5 metros de grava), mientras que su ancho es de 1 metro en la parte inferior y de 0,5 metros en la parte superior.

Para unas condiciones determinadas se desea estudiar el proceso de filtración para comprobar si se produce sifonamiento o no. El coeficiente de permeabilidad de la arena es de 0,5 cm/s, mientras que el de la grava es 10 veces superior al de la arena, y el incremento de altura de agua del depósito más elevado con respecto al más bajo es de  $\Delta H = 1,0 \text{ m}$ . Dada la discretización en elementos triangulares mostrada en la Figura 7.19, calcular:

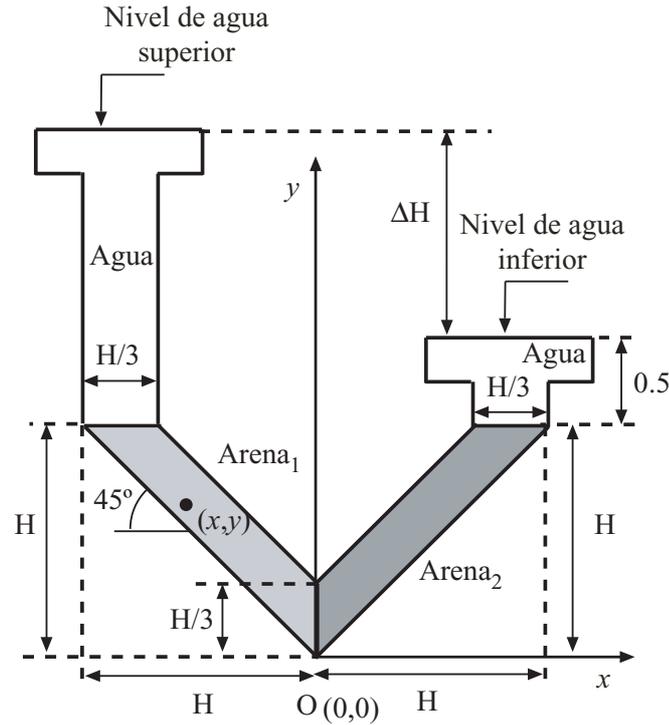


Figura 7.16: Permeámetro de carga constante en V (cotas en metros).

1. Indicar en las hojas adjuntas correspondientes al fichero de datos de la práctica de flujo para la excavación, qué elementos hay que modificar para resolver el problema propuesto en este ejercicio.
2. Alturas piezométricas en los nodos 2, 5, 8, 11 y 14 de la discretización.
3. Las tensiones efectivas en los nodos 2, 5, 8, 11 y 14 de la discretización para comprobar si efectivamente se produce sifonamiento. Para ello se emplea la siguiente expresión:

$$\sigma' = \sigma - p = \gamma_{\text{sat}} h - p, \quad (7.91)$$

donde  $\gamma_{\text{sat}} = 20 \text{ kN/m}^3$  es el peso específico saturado del terreno,  $h$  es la altura de la columna de arena por encima de cada punto calculado y  $p$  es la presión de agua en ese punto, que se calcula a través de la altura piezométrica mediante la siguiente expresión:

$$p = \gamma_w (\phi - y), \quad (7.92)$$

donde  $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$  es el peso específico del agua,  $\phi$  es la altura piezométrica, e  $y$  es la cota o altura a la que está situado el punto.

4. ¿Se produce sifonamiento?
5. ¿Qué ocurriría si se intercambia el orden de las capas de gravas y arenas?, ¿empeora la situación con respecto al sifonamiento? Justifica la respuesta y compruébalo numéricamente.

■

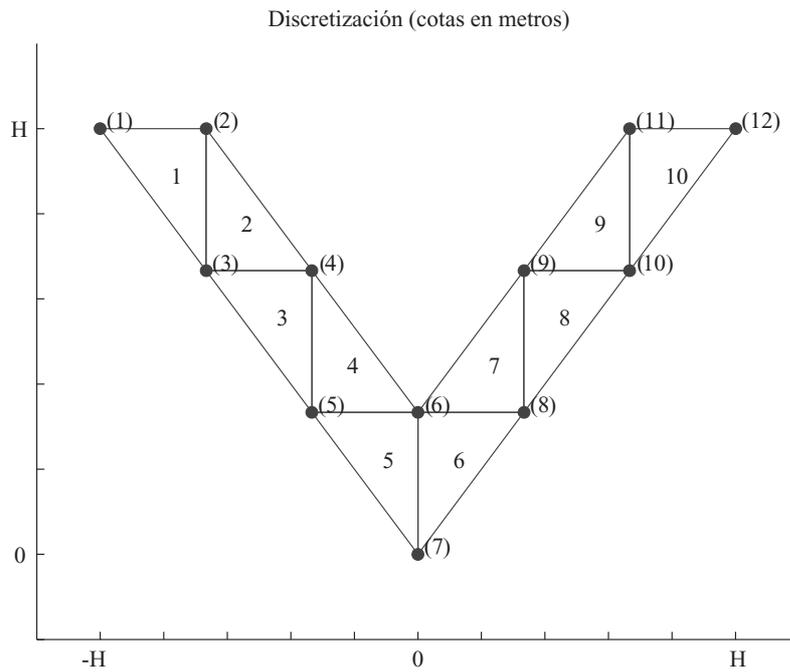


Figura 7.17: Discretización en elementos triangulares de la arena dentro del permeámetro de carga constante en V (cotas en metros).

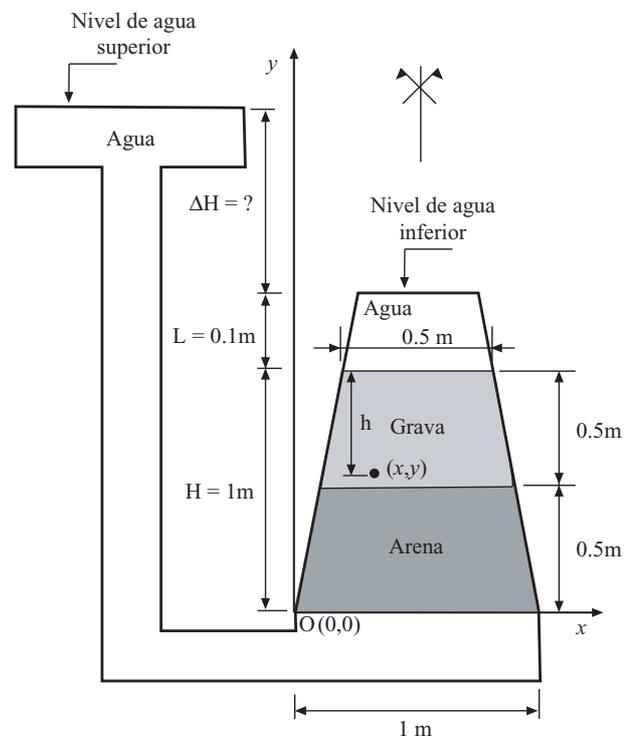


Figura 7.18: Permeámetro de carga constante con sección variable (cotas en metros).

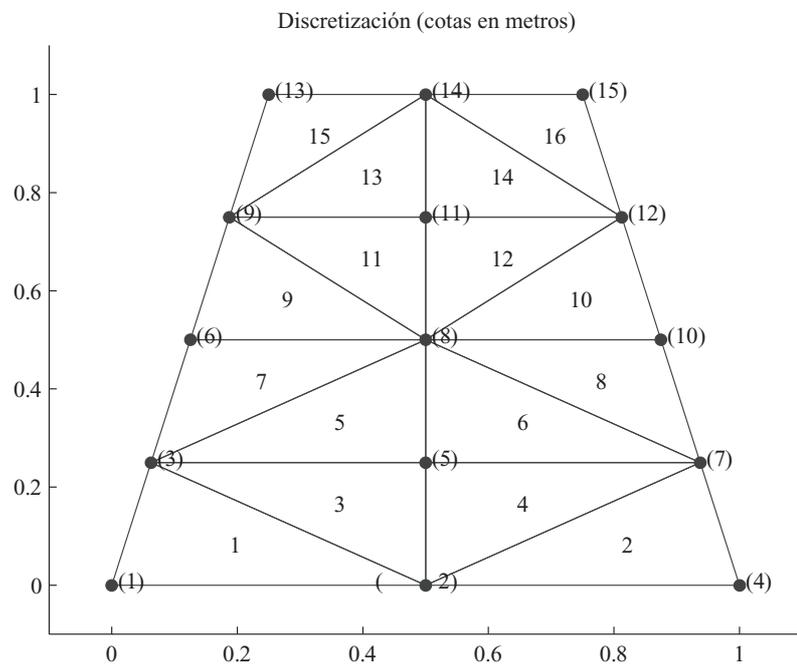


Figura 7.19: Discretización en elementos triangulares de la arena dentro del permeámetro de carga constante con sección variable (cotas en metros).

### 7.3. Torsión

Otro de los problemas en los que el estudio de su comportamiento se realiza mediante las ecuaciones de difusión-convección es el estudio de torsión en barras prismáticas. Para la deducción de las ecuaciones en este tipo de problemas se parte de la aproximación de Saint-Venant para problemas de torsión, que se basa en las siguientes hipótesis:

1. El cuerpo sujeto a estudio es un cuerpo prismático según el eje  $z$ , tal y como se muestra en la Figura 7.20;
2. El ángulo de torsión es constante según el eje  $z$ ;
3. La proyección de las secciones en el plano  $x-y$  tiene movimiento de cuerpo rígido (rotación alrededor del eje  $z$ ).

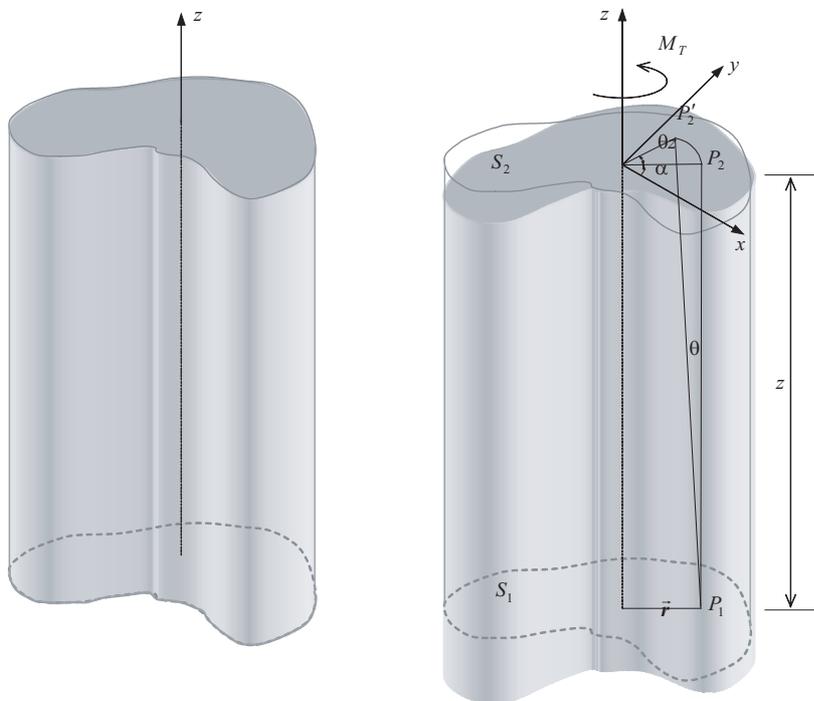


Figura 7.20: Barra prismática sometida a un momento de torsión.

Partiendo de estas hipótesis se procede a continuación a la deducción de las ecuaciones que permiten el estudio del problema de torsión. Para ello se considera un punto  $P_1$  situado en la sección fija  $S_1$  cuyo vector posición es  $\vec{r}$  (véase la Figura 7.20). Si se considera otra sección  $S_2$  (libre de girar y alabear) a una distancia vertical  $z$  de la sección  $S_1$ , y se proyecta el punto  $P_1$  sobre la sección  $S_2$ , se obtiene el punto  $P_2$ . Tras la aplicación de un momento de torsión, y dado que la sección  $S_2$  puede girar y alabear libremente, el punto  $P_2$  pasa a ocupar la posición  $P_2'$  tal y como se indica en la Figura 7.21.

Considerando el plano  $(x, y)$  sobre el que gira el punto  $P_2$ , y teniendo en cuenta que para pequeños giros, el arco y la cuerda son aproximadamente iguales, se pueden calcular geoméricamente los desplazamientos  $u$  y  $v$  concordantes con los ejes coordenados  $x$  e  $y$ , respectivamente

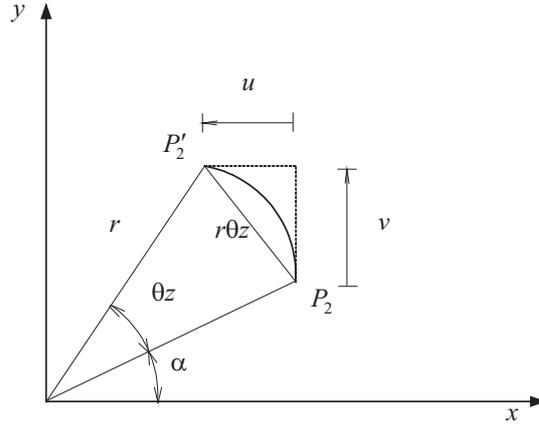


Figura 7.21: Desplazamientos en la sección del cuerpo prismático.

(véase la Figura 7.21):

$$\begin{cases} u = -r\theta z \sin(\alpha) = -y\theta z \\ v = r\theta z \cos(\alpha) = x\theta z. \end{cases} \quad (7.93)$$

El desplazamiento  $w$  del punto  $P_2$  según la dirección  $z$  depende de  $x$  e  $y$ , de forma que  $w = f(x, y)$ . Estos desplazamientos se denominan desplazamientos por alabeo cuya característica principal es que no dependen de  $z$ .

Las deformaciones en la barra prismática se pueden obtener mediante las relaciones desplazamiento-deformación dadas por la teoría de la elasticidad lineal (A.3), que quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (-\theta z + \theta z) = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( x\theta + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -y\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (7.94)$$

Utilizando la ley de Hooke dada por las ecuaciones (A.4) y sustituyendo en (7.94) se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = \frac{G}{2} \left( x\theta + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = \frac{G}{2} \left( -y\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (7.95)$$

donde  $G$  es el módulo de rigidez transversal. Nótese que las tensiones normales  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$  son nulas porque en el estudio de torsión no intervienen.

A continuación se plantean las ecuaciones de equilibrio :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho b_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho b_z = 0, \end{cases} \quad (7.96)$$

en las que al reemplazar los valores de las tensiones (7.95) quedan como:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\rho b_x \quad (7.97)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\rho b_y \quad (7.98)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\rho b_z, \quad (7.99)$$

donde (7.97) y (7.98) permiten el cálculo de las tensiones normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  en función de las fuerzas másicas según esas direcciones, y que son problemas que se pueden estudiar de forma desacoplada con respecto a la torsión. Nótese que en el caso de que  $b_x = b_y = 0$  las tensiones normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  serán idénticamente nulas.

Respecto a la ecuación (7.99) es importante señalar que se puede descomponer en dos. Nótese que, por un lado, tanto  $\tau_{xz}$  como  $\tau_{yz}$  no dependen de  $z$  y sí de  $x$  y de  $y$ , y por otro,  $\sigma_z$  y  $b_z$  no dependen ni de  $x$  ni de  $y$  y sí de  $z$ , por tanto la ecuación (7.99) se desacopla en dos:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\rho b_z; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (7.100)$$

Reemplazando las componentes de la tensión  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  dadas en (7.95) en esta última ecuación (7.100) se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{G}{2} \left( -y\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{G}{2} \left( x\theta + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] &= 0 \\ G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (7.101)$$

que se denomina **ecuación diferencial de torsión**, que se corresponde con la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 w = 0. \quad (7.102)$$

**Comentario 7.10** La ecuación (7.102) permite obtener los desplazamientos verticales en cualquier sección en el plano  $(x, y)$  debido al alabeo producido por el giro  $\theta$ , que se supone conocido. ■

### 7.3.1. Función de Tensión

En los problemas reales de torsión el objetivo es el estudio del comportamiento a torsión de un elemento prismático cuando éste se somete a un momento torsor ( $M_t$ ) en el eje  $z$ . En esos casos se ha de obtener la relación entre el momento torsor aplicado y el giro experimentado por la sección en función de las características elasto-mecánicas del elemento sometido a estudio. Dado que la ecuación (7.102) sólo permite el cálculo de desplazamientos verticales una vez conocido el giro se necesita emplear un método que permita relacionar  $M_t$  y  $\theta$ .

Para ello se va a definir una función auxiliar  $\phi$  que se denomina función de tensión, que por definición cumple que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \tau_{xz}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\tau_{yz}. \quad (7.103)$$

A continuación se sustituyen estas expresiones en la última ecuación de equilibrio en (7.100):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0. \quad (7.104)$$

**Definición 7.1 (Condiciones de compatibilidad).** *Son las ecuaciones resultantes de aplicar a las ecuaciones de equilibrio las relaciones desplazamiento-deformación.* ■

Las ecuaciones de compatibilidad vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\nu(1 + \nu)}{\nu - 1} \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2(1 + \nu) \frac{\partial b_x}{\partial x} \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\nu(1 + \nu)}{\nu - 1} \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2(1 + \nu) \frac{\partial b_y}{\partial y} \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= \frac{\nu(1 + \nu)}{\nu - 1} \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2(1 + \nu) \frac{\partial b_z}{\partial z} \\ (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= -(1 + \nu) \left( \frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial x} \right) \\ (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} &= -(1 + \nu) \left( \frac{\partial b_y}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial y} \right) \\ (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} &= -(1 + \nu) \left( \frac{\partial b_x}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (7.105)$$

donde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  y  $\Psi = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ . Teniendo en cuenta las hipótesis consideradas y las tensiones dadas por (7.95) se obtiene la siguiente expresión simplificada:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tau_{yz} &= \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = 0 \\ \nabla^2 \tau_{zx} &= \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Nótese que para la obtención y empleo de estas ecuaciones no es preciso que las fuerzas másicas  $b_x$ ,  $b_y$ , y  $b_z$  sean nulas, ya que no afectan a las tensiones producidas por el fenómeno de torsión, únicamente a las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , y  $\sigma_z$ .

Reemplazando las tensiones  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$  por sus valores (7.103) se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 \implies \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \implies \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \phi = 0. \end{aligned} \quad (7.106)$$

La ecuación (7.106) establece que la divergencia de la función tensión no varía ni con respecto a  $x$  ni con respecto a  $y$ , por tanto, integrando (7.106) se llega a la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F, \quad (7.107)$$

donde  $F$  es una constante desconocida para cuya obtención se precisa de una condición de contorno.

Previo paso a la obtención de la constante, de forma que se cumpla la condición de contorno adicional se obtiene una expresión análoga a (7.107) en la que se sustituye  $F$  en función de parámetros físicos del problema. Para ello se obtienen las derivadas de los desplazamientos verticales empleando las tensiones dadas por las expresiones (7.95), que quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} + \theta y \quad (7.108)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} - \theta x, \quad (7.109)$$

en las que al sustituir las tensiones por (7.103) quedan como:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{1}{G} + \theta y \quad (7.110)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{1}{G} - \theta x. \quad (7.111)$$

Si se resta la derivada de (7.110) con respecto a  $x$  menos la derivada de (7.111) con respecto a  $y$  se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{1}{G} + \theta y \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{1}{G} - \theta x \right] = 0, \quad (7.112)$$

que simplificando queda como:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = -2\theta \implies \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -2G\theta, \quad (7.113)$$

ecuación que es análoga a la ecuación (7.107) y de la que se deduce que la constante de integración vale  $F = -2G\theta$ , que depende únicamente de parámetros físicos.

Sin embargo, y pese haber logrado dar un significado físico a la constante de integración  $F$ , aun se desconoce el valor de  $\theta$ , para su cálculo será preciso introducir una condición de contorno. Esta condición de contorno en problemas de torsión consiste en el hecho de que la superficie del cuerpo prismático está libre de tensión normal debido al mecanismo de torsión. Teniendo esto en cuenta, a continuación se obtiene una ecuación adicional necesaria para la resolución del problema de torsión.

El vector tensión ( $\mathbf{t}$ ) en un punto cualquiera del sólido se define como:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \implies \begin{cases} t_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ t_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ t_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (7.114)$$

donde  $l$ ,  $m$ , y  $n$  son los cosenos directores del vector normal  $\mathbf{n}$ .

Teniendo en cuenta que en problemas de torsión los contornos se caracterizan porque su componente  $n$  asociada a  $z$  es nula, y considerando las tensiones en (7.95), (7.114) se transforma en:

$$t_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0, \quad (7.115)$$

cuyo valor se iguala a cero para que se cumpla la condición de contorno. Las demás componentes del vector que define el estado tensional son nulas.

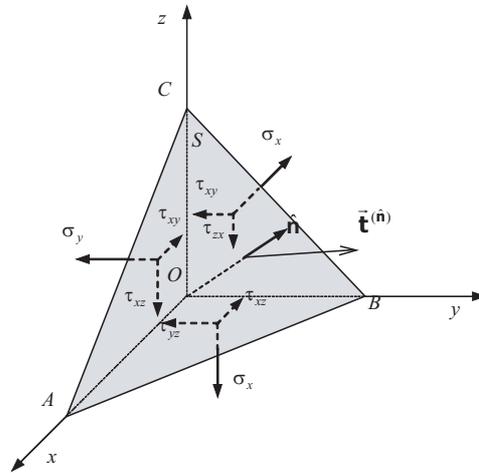


Figura 7.22: Tensiones actuantes en un diferencial tetraédrico.

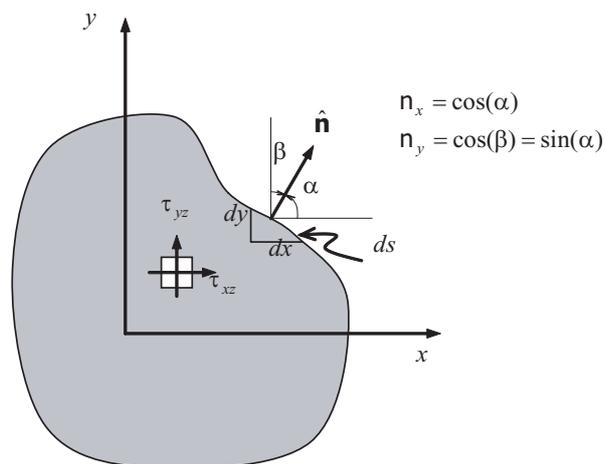


Figura 7.23: Detalle del contorno en una sección de una barra prismática.

Si se considera un elemento diferencial ( $ds$ ) en el contorno, sus cosenos directores  $l$  y  $m$  se expresan como (véase la Figura 7.23):

$$l = \frac{dy}{ds}; \quad m = -\frac{dx}{ds}. \quad (7.116)$$

Reemplazando tanto los valores de las tensiones en función del potencial tensión (7.103) como los cosenos directores (7.116) en la expresión (7.115) se obtiene la expresión de la condición de contorno:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( -\frac{\partial x}{\partial s} \right) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial s} = 0; \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (7.117)$$

donde  $\Omega$  es el contorno exterior, y que indica que la función de tensión en el contorno ha de ser constante. Nótese que esta es la única condición que ha de cumplirse, y por tanto, el valor de  $\phi$  en el contorno es arbitrario, por lo que se toma el valor cero.

El siguiente paso consiste en relacionar el momento de torsión ejercido con la función tensión. Para calcularlo se integran los momentos producidos por las tensiones en toda la sección:

$$\begin{aligned} M_t &= \iint [-\tau_{xz}y + \tau_{yz}x] dx dy = - \iint [\tau_{xz}y] dx dy + \iint [\tau_{yz}x] dx dy \\ &= - \iint \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} y \right] dx dy - \iint \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} x \right] dx dy. \end{aligned} \quad (7.118)$$

Dado que la integral abarca todo el área de la sección la integral (7.118) se ha de expresar como:

$$M_t = - \int_{x_{\max}}^{x_{\min}} \left[ \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} \frac{\partial \phi}{\partial y} y dy \right] dx - \int_{y_{\max}}^{y_{\min}} \left[ \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx \right] dy, \quad (7.119)$$

donde  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$ ,  $y_{\max}$ , y  $y_{\min}$  son las componentes máximas y mínimas de la sección considerada, mientras que  $x_{\max}(y)$ ,  $x_{\min}(y)$ ,  $y_{\max}(x)$  y  $y_{\min}(x)$  son, respectivamente, las componentes máximas de la sección considerada para una ordenada  $y$  y una abscisa  $x$  determinada. Nótese que todos estos valores pertenecen al contorno de la sección en la que se definió la condición de contorno.

Integrando por partes las integrales con respecto a  $y$  y con respecto a  $x$ , respectivamente, se obtiene:

$$M_t = - \int_{x_{\max}}^{x_{\min}} \left[ \phi y \Big|_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} - \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} \phi dy \right] dx - \int_{y_{\max}}^{y_{\min}} \left[ \phi x \Big|_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} - \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} \phi dx \right] dy, \quad (7.120)$$

en la que los términos  $\phi y$  y  $\phi x$  en el contorno son nulos debido a que la función potencial en el contorno se considera nula, con lo cual (7.120) se transforma en:

$$M_t = \int_{x_{\max}}^{x_{\min}} \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} \phi dy dx + \int_{y_{\max}}^{y_{\min}} \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} \phi dx dy = 2 \int_S \phi dS, \quad (7.121)$$

es decir, que el momento torsor es igual al doble de la integral de la función tensión en toda la sección.

Por tanto para la resolución del problema completo de torsión son necesarias la ecuación (7.113) que permite el cálculo de la función tensión para un valor de la constante  $F = -2G\theta$ , y además para esa función tensión, ha de satisfacerse la ecuación (7.121) que establece la compatibilidad entre el momento torsor empleado  $M_t$  y el giro  $\theta$  experimentado por la sección.

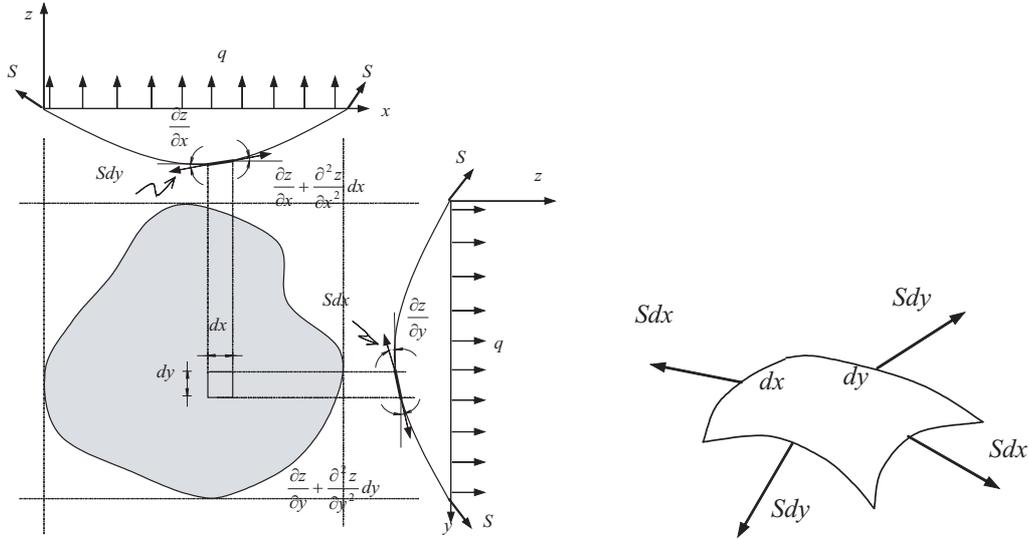


Figura 7.24: Membrana de Prandtl y tensión actuante en un elemento diferencial de membrana.

### 7.3.2. Analogía de la Membrana de Prandtl

El problema de torsión anterior se podría haber resuelto o planteado de forma diferente empleando la analogía de la membrana de Prandtl. Considérese una membrana fina sujeta en las extremidades de forma que los contornos permanecen inmóviles en todo momento. Aplicando una presión sobre esta membrana se deforma generándose unas tensiones de tracción  $S$  en las extremidades, tal y como se muestra en la Figura 7.24(a).

Si se toma un elemento diferencial de la membrana (véase la Figura 7.24(b)), y se calcula el equilibrio de fuerzas en la dirección  $z$  se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 qdx dy + Sdy \sin \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right) - Sdy \sin \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\
 + Sdx \sin \left( \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right) - Sdx \sin \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{7.122}$$

que para pequeñas deformaciones de la membrana ( $\sin(\theta) \approx \theta$ ) se simplifica, resultando en:

$$qdx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = 0,
 \tag{7.123}$$

que al dividir por el diferencial de área de la membrana  $dx dy$  queda como:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \implies \nabla^2 z = -\frac{q}{S},
 \tag{7.124}$$

expresión esta última análoga a la ecuación (7.107), de forma que:

$$\phi \equiv z
 \tag{7.125}$$

$$2G\theta \equiv \frac{q}{S}.
 \tag{7.126}$$

La condición de contorno que ha de cumplirse en la membrana es que la variación de la  $z$  con respecto a un diferencial de contorno  $s$  en todo el contorno de la membrana ( $\forall(x, y) \in \Omega$ )

sea nula, debido a que los desplazamientos de los contornos están impedidos, matemáticamente esta condición queda como:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 0; \forall (x, y) \in \Omega, \quad (7.127)$$

ecuación análoga a (7.117) si se emplean las equivalencias (7.125)-(7.126), por tanto el problema es totalmente equivalente.

Lo único que queda por resolver es la relación entre el momento torsor  $M_t$  del problema de torsión y su equivalente en el problema de la membrana. Para su estudio se parte de (7.121) y se reemplazan las variables con la equivalencia (7.125)-(7.126) con lo que se obtiene:

$$M_t = 2 \int_A \phi dA \equiv 2 \int_A z dA = 2V, \quad (7.128)$$

donde  $A$  es el área de la sección plana inicial y  $V$  es el volumen generado por la deformación de la membrana con respecto al plano inicial de la sección  $A$ . Por lo tanto, el equivalente al momento torsor es el doble del volumen de la membrana.

### 7.3.3. Formulación de Elementos Finitos para Problemas de Torsión

En esta sección se obtiene la formulación general del MEF para problemas de torsión en dos dimensiones (secciones planas), en la que también se emplea el método de Galerkin para la selección de las funciones de peso.

Los pasos para la resolución son los siguientes:

- **Paso 1: División del dominio en elementos.** Partiendo del dominio  $\Omega$  se subdivide en un número finito de elementos discretos  $n_{el}$ , en este caso el dominio es bidimensional.
- **Paso 2: Ecuaciones del MEF para el elemento.** La función tensión solución del problema en función de los valores nodales solución se aproxima a través de las funciones de forma:

$$\phi(x, y) = [\mathbf{N}(x, y)] \left\{ \phi^{(e)} \right\}, \quad (7.129)$$

en la que

$$[\mathbf{N}(x, y)] = [ N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad \cdots \quad N_{n_{ne}}(x, y), ] \quad (7.130)$$

y  $\left\{ \phi^{(e)} \right\}^T = \{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{n_{ne}} \}$ , donde  $\phi_i$  en este caso representa la función tensión en el nodo  $i$  del elemento y  $n_{ne}$  es el número de nodos por elemento.

La ecuación diferencial (7.113) ha de cumplirse en todo el elemento y dado que la solución que se va a calcular es aproximada, y el método de Galerkin establece que la integral ponderada del error entre la solución y la aproximación utilizando las funciones de forma como pesos, a lo largo de todo el volumen del elemento  $S^{(e)}$ , ha de ser nula. Por tanto ha de cumplirse la siguiente expresión matemática:

$$\int_{S^{(e)}} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + 2\theta \right] dS = 0; \quad i = 1, \dots, n_{ne}. \quad (7.131)$$

Nótese que (7.131) representa la integral de los *residuos ponderados*.

Integrando por partes los dos primeros términos en (7.131) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{S^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dS &= - \int_{S^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} dS + \int_{l^{(e)}} N_i \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} dl; \quad i = 1, \dots, n_{ne}, \\ \int_{S^{(e)}} N_i \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dS &= - \int_{S^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} dS + \int_{l^{(e)}} N_i \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} dl; \quad i = 1, \dots, n_{ne}, \end{aligned} \quad (7.132)$$

donde  $l^{(e)}$  es el contorno del elemento seleccionado, constituido por todas sus aristas.

Sustituyendo (7.132) en (7.131) se llega a:

$$\begin{aligned} - \int_{S^{(e)}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dS \\ + \int_{l^{(e)}} N_i \left[ \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dl + \int_{S^{(e)}} N_i 2\theta dS = 0; \quad i = 1, \dots, n_{ne}. \end{aligned} \quad (7.133)$$

Nótese que la primera integral de la segunda fila en (7.133) ha de calcularse en todas las aristas del elemento, y por definición de las funciones de forma, en la arista opuesta al nodo  $i$ -ésimo la integral es nula porque la función de forma es cero en toda la arista, por tanto sólo se calcula en el dominio  $l_i^{(e)}$  que incluye todas las aristas excepto la opuesta al nodo  $i$ .

Teniendo en cuenta (7.129) se puede expresar la función tensión en el elemento debido a la influencia del nodo  $j$  como:

$$\phi_j(x, y) = N_j \phi_j^{(e)}; \quad j = 1, \dots, n_{ne}, \quad (7.134)$$

de forma que la función tensión es la suma de las influencias de todos los nodos  $\phi^{(e)} = \sum_{j=1}^{n_{ne}} \phi_j^{(e)}$ .

Reemplazando en (7.133) el potencial  $\phi$  por  $\phi_j$ , y éste a su vez por (7.134) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \phi_j^{(e)} \int_{S^{(e)}} \frac{1}{G} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dS = \int_{S^{(e)}} N_i 2\theta dS; \\ i = 1, \dots, n_{ne}, j = 1, \dots, n_{ne}, \end{aligned} \quad (7.135)$$

en la que los términos a la izquierda de la igualdad constituyen el elemento  $(i, j)$  de la matriz de rigidez, mientras que el término de la derecha es el elemento  $i$ -ésimo del vector de términos independientes.

El problema de la ecuación (7.135) es que tanto  $\phi_j^{(e)}$  como  $\theta$  son desconocidos. Para solventar este problema se considera una única variable desconocida que se define de la siguiente manera:

$$\tilde{\phi}_j^{(e)} = \frac{\phi_j^{(e)}}{G\theta}, \quad (7.136)$$

con lo que (7.135) se transforma en:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j^{(e)} \int_{S^{(e)}} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dS = 2 \int_{S^{(e)}} N_i dS; \\ i = 1, \dots, n_{ne}, j = 1, \dots, n_{ne}, \end{aligned} \quad (7.137)$$

La ecuación anterior se puede expresar como:

$$k_{ij}^{(e)} \tilde{\phi}_j^{(e)} = p_i^{(e)}, \quad (7.138)$$

en la que  $k_{ij}^{(e)}$  es el término  $(i, j)$  de la matriz de rigidez del elemento debido a la integración de la ecuación de Poisson, mientras que  $p_i^{(e)}$  es la influencia en el término  $i$ -ésimo del vector de términos independientes del elemento debido al giro de torsión que se produce.

La expresión completa de la matriz de rigidez en forma matricial queda de la siguiente manera:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] \{\phi^{(e)}\} = \{\mathbf{p}^{(e)}\}, \quad (7.139)$$

en la que cada una de las submatrices y vectores se obtienen de la siguiente manera:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_{S^{(e)}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dS = \int_{S^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial x} & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial y} \end{bmatrix} dS, \quad (7.140)$$

donde la matriz  $[\mathbf{B}]$  contiene las derivadas de las funciones de forma. El término independiente asociado al giro queda como:

$$\{\mathbf{p}^{(e)}\} = \int_{S^{(e)}} 2 [\mathbf{N}]^T dS = 2 \int_{S^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n_{ne}} \end{bmatrix} dS. \quad (7.141)$$

- **Paso 3: Obtención del sistema discreto.** Una vez obtenidas las matrices de rigidez de cada uno de los elementos y los términos independientes, se procede con el procedimiento de ensamblaje:

$$[\mathbf{K}] = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} [\mathbf{k}^{(e)}]; \quad \{\mathbf{P}\} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \{\mathbf{p}^{(e)}\}, \quad (7.142)$$

donde  $[\mathbf{K}]$  es la matriz de rigidez global estacionaria del sistema, y  $\{\mathbf{P}\}$  es el vector de términos independientes. De esta forma es posible obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}] \{\tilde{\phi}\}. \quad (7.143)$$

- **Paso 4: Introducción de las condiciones de contorno esenciales.** En este caso, teniendo en cuenta la analogía de la membrana hay que establecer las condiciones que obligan a que el desplazamiento vertical del contorno sea nulo ( $z = 0$ ), que en el caso de la función de tensión implica que vale cero en todo su contorno  $\phi(x, y) = 0; \forall (x, y) \in \Omega$ . Esta condición es una condición esencial y necesaria para el correcto planteamiento y funcionamiento del método. Éstas se introducen en el sistema ensamblado (7.77) empleando el procedimiento ya visto en las Sección 4.2.7, que modifica la matriz de rigidez y el vector de términos independientes de forma que se satisfagan las condiciones de contorno.
- **Paso 5: Resolución del sistema lineal de ecuaciones.** Una vez modificado el sistema discreto se procede a su resolución, con lo cual se obtienen las tensiones modificadas nodales solución:

$$\{\tilde{\phi}\} = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{P}\}. \quad (7.144)$$

- **Paso 6: Cálculo del giro solución.** Cuando se han obtenido las tensiones modificadas solución, y teniendo en cuenta (7.121) y (7.136) se puede calcular el giro  $\theta$  que se produce en la sección despejando su valor de la siguiente ecuación:

$$M_t = 2 \int_{\Omega} \phi d\Omega = 2G\theta \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S^{(e)}} [N] \{ \tilde{\phi} \} dS = 2G\theta \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^{n_{ne}} \tilde{\phi}_j \int_{S^{(e)}} N_j dS, \quad (7.145)$$

donde  $\Omega$  representa todo el dominio del problema, es decir, todo el área de la sección transversal. Nótese que esta expresión no es más que el doble del volumen encerrado por la membrana.

Una vez calculado el giro  $\theta$  es posible calcular la rigidez a torsión ( $J_T$ ) que partiendo de su definición y considerando (7.145) queda como:

$$J_T^{(e)} = \frac{M_t}{G\theta} = 2 \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^{n_{ne}} \tilde{\phi}_j \int_{S^{(e)}} N_j dS. \quad (7.146)$$

- **Paso 7: Cálculo de las tensiones en el elemento.** Por último, una vez obtenidas las tensiones modificadas solución y el giro, es posible conocer la función tensión, y calcular las tensiones usando (7.103):

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & -\frac{\partial N_{n_{ne}}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{n_{ne}} \end{bmatrix}. \quad (7.147)$$

### 7.3.4. Matriz de Rigidez del Elemento Triangular de 3 Nodos

En esta sección se obtienen las expresiones para el cálculo de la matriz de rigidez y el término independiente del elemento triangular de tres nodos que permite la resolución del problema de torsión mediante el método de los elementos finitos. Nótese que las funciones de forma son las dadas en la ecuación (5.20), por lo que la matriz  $[B]$  con las derivadas de las funciones de forma queda como:

$$[B] = \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad (7.148)$$

donde  $A^{(e)*}$  es el área del tetraedro (5.22), en la que los coeficientes constantes  $c_i, b_i; i = 1, 2, 3$ , vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} b_1 &= (y_2 - y_3); & b_2 &= (y_3 - y_1); & b_3 &= (y_1 - y_2); \\ c_1 &= (x_3 - x_2); & c_2 &= (x_1 - x_3); & c_3 &= (x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (7.149)$$

Teniendo en cuenta estas funciones de forma, (7.148), y (7.149), las ecuaciones (7.140)-(7.141) se transforman en:

- **Matriz de rigidez para la resolución de la ecuación de Poisson:** la matriz de rigidez para el elemento triangular de tres nodos es:

$$[k^{(e)}] = \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} A^{(e)}. \quad (7.150)$$

- **El término independiente asociado al momento torsor:** Nótese que esta integral es análoga a (5.56) pero en esta ocasión se realiza teniendo en cuenta que la integral de un plano sobre una superficie plana es igual al volumen encerrado por el plano en esa superficie. Por tanto (7.141) queda como:

$$\left[ \mathbf{p}_1^{(e)} \right] = 2 \int_{S^{(e)}} \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y \\ a_2 + b_2x + c_2y \\ a_3 + b_3x + c_3y \end{bmatrix} dS = \frac{2A^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.151)$$

donde  $2A^{(e)}$  es el doble del volumen generado por la deformación de la membrana en el elemento, que se reparte de forma proporcional entre los tres nodos del mismo.

- **Cálculo del giro solución:** Si se emplea el triángulo de tres nodos, la ecuación (7.145) que liga el momento torsor con el radio de giro queda de la siguiente manera:

$$M_t = 2G\theta \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^3 \tilde{\phi}_j \frac{A^{(e)}}{3}, \quad (7.152)$$

con lo que se puede calcular el momento de inercia a torsión de la siguiente manera:

$$J_T^{(e)} = 2 \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^3 \tilde{\phi}_j \frac{A^{(e)}}{3}. \quad (7.153)$$

- **Tensiones en el elemento:** La expresión que permite el cálculo de tensiones en el elemento una vez conocida la función tensión es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz}^{(e)} \\ \tau_{yz}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^{(e)*}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}. \quad (7.154)$$

**Comentario 7.11** Nótese que, análogamente a lo que ocurría con el elemento tetraédrico, en las ecuaciones particularizadas para el elemento triangular intervienen tanto  $A^{(e)}$  como  $A^{(e)*}$ .  $A^{(e)}$  es el volumen del triángulo, que es siempre positivo, mientras que  $A^{(e)*}$  es el cálculo del área mediante la fórmula del determinante, y en función de la numeración de los nodos puede ser positivo, o negativo. ■

**Ejercicio 7.5 (Inercia a torsión de una barra prismática).** Considérese una barra prismática de sección cuadrada de lado  $2a$ , tal y como se muestra en la Figura 7.25. Se sabe que la solución analítica del momento de inercia a torsión para este problema es igual a  $J_T = 2,2496a^4$ . Utilizando distintas discretizaciones en elementos triangulares de tres nodos, obtener una curva de convergencia del problema, mostrando en una gráfica número de nudos de la discretización versus el momento de inercia calculado numéricamente  $J_T$ . ¿Con que número de nodos (y/o número de elementos) se obtiene una solución numérica razonable con respecto al valor exacto? Se considera como error relativo razonable  $\epsilon = 0,1\%$ . ■

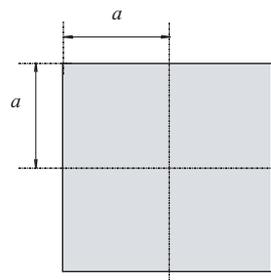


Figura 7.25: Sección cuadrada para el cálculo de la inercia a torsión  $J_T$ .



---

Apéndice A

# Ecuaciones Básicas de la Mecánica de Sólidos

---

## A.1. Elasticidad Lineal

En esta sección se exponen algunas de las expresiones más importantes de la Teoría de la Elasticidad Lineal, empleadas en el libro. Para más detalles acerca de dichas expresiones se aconseja consultar las siguientes referencias [Oliver and Agelet de Saraciber, 2000], [Mase, 1977], [Malvern, 1969], [Chaves, 2007].

### A.1.1. Tensor de Tensiones

Las componentes del tensor de tensiones simétrico de Cuachy ( $\sigma_{ij}$ ) empleando notación de Voigt e ingenieril son:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{Notación} \\ \text{de Voigt}}} \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

*Notación Ingenieril*

donde  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , son las tensiones normales y  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ , son las tensiones tangenciales.

El sentido positivo se indica en el elemento infinitesimal mostrado en la Figura A.1.

### A.1.2. Tensor de Deformación

En el régimen de pequeñas deformaciones, el tensor de deformación viene representado por el Tensor de Deformación Infinitesimal  $\varepsilon_{ij}$ . Las componentes del tensor de deformación en la Notación de Voigt e ingenieril son:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \xRightarrow{\substack{\text{Notación} \\ \text{de Voigt}}} \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

*Notación Ingenieril*

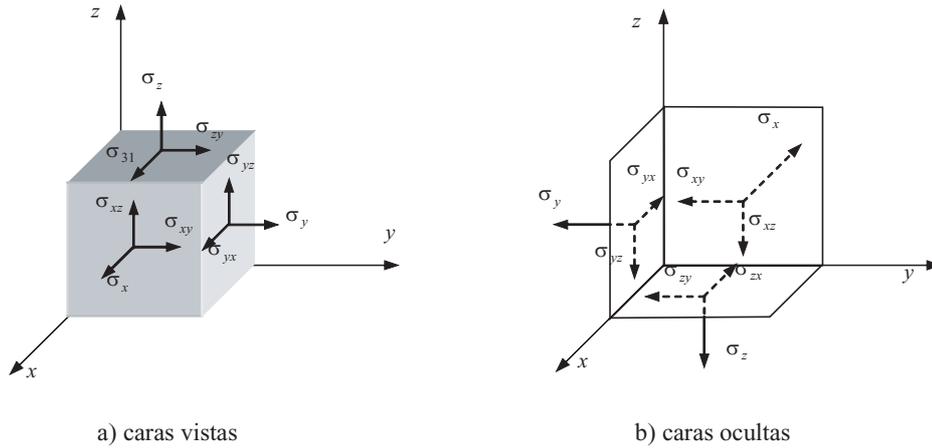


Figura A.1: Componentes del tensor de tensiones en un elemento infinitesimal.

### A.1.3. Relación Desplazamiento-Deformación

Las componentes del tensor de deformación infinitesimal,  $(\varepsilon_{ij})$ , están relacionadas con las componentes del campo de desplazamientos  $(u, v, w)$ , para el régimen de pequeñas deformaciones), mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

La relación anterior se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}] \{\mathbf{u}\},$$

donde la matriz  $[\mathbf{L}]$  es la matriz operador diferencial.

	$G = \mu =$	$E =$	$\kappa =$	$\lambda =$	$\nu =$
$f(G, E)$	$G$	$E$	$\frac{EG}{9G-3E}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$	$\frac{E-2G}{2G}$
$f(G, \kappa)$	$G$	$\frac{9G\kappa}{3\kappa+G}$	$\kappa$	$\kappa - \frac{2G}{3}$	$\frac{3\kappa-2G}{2(3\kappa+G)}$
$f(G, \lambda)$	$G$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\lambda + \frac{2}{3}G$	$\lambda$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$
$f(G, \nu)$	$G$	$2G(1+\nu)$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2G}{1-2\nu}$	$\nu$
$f(E, \kappa)$	$\frac{3\kappa E}{9\kappa-E}$	$E$	$\kappa$	$\frac{\kappa(9\kappa-3E)}{9\kappa-E}$	$\frac{3\kappa-E}{6\kappa}$
$f(E, \nu)$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$E$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\nu$
$f(\kappa, \lambda)$	$\frac{3(\kappa-\lambda)}{2}$	$\frac{9\kappa(\kappa-\lambda)}{3\kappa-\lambda}$	$\kappa$	$\lambda$	$\frac{\lambda}{3\kappa-\lambda}$
$f(\kappa, \nu)$	$\frac{3\kappa(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$3\kappa(1-2\nu)$	$\kappa$	$\frac{3\kappa\nu}{1+\nu}$	$\nu$

Tabla A.1: Relaciones entre las distintas propiedades mecánicas de los materiales.

### A.1.4. Ley de Hooke Generalizada

Las tensiones están relacionadas con las deformaciones a través de la ley constitutiva conocida como *ley de Hooke generalizada*:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\},$$

donde  $[\mathbf{C}]$  es la matriz *matriz constitutiva elástica*, que contiene la información de las propiedades elásticas del material. Nótese que es una matriz simétrica.

Para un material isótropo, la matriz  $[\mathbf{C}]$  únicamente depende de dos parámetros y viene dada por:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \tag{A.4}$$

donde las constantes  $\lambda, \mu$  son las constantes de Lamé. También se puede expresar la matriz constitutiva elástica en función de otros parámetros mecánicos, tales como el módulo de Young ( $E$ ), el módulo de elasticidad transversal ( $G$ ), el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), o el módulo volumétrico ( $\kappa$ ). Estos parámetros están relacionados entre sí según la Tabla A.1.

Alternativamente la matriz constitutiva elástica (A.4) se puede escribir de la siguiente manera:

$$[\mathbf{C}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

o alternativamente como:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \left(\kappa + \frac{4}{3}G\right) & \left(\kappa - \frac{2}{3}G\right) & \left(\kappa - \frac{2}{3}G\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(\kappa - \frac{2}{3}G\right) & \left(\kappa + \frac{4}{3}G\right) & \left(\kappa - \frac{2}{3}G\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(\kappa - \frac{2}{3}G\right) & \left(\kappa - \frac{2}{3}G\right) & \left(\kappa + \frac{4}{3}G\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

### A.1.5. Elasticidad Bidimensional

Las estructuras tridimensionales a veces presentan ciertas características geométricas y asociadas a las cargas actuantes que posibilitan tratarlas como problemas bidimensionales (2D) o incluso unidimensionales (1D), simplificando enormemente los cálculos y facilitando la interpretación de los resultados numéricos. En lo que respecta a la *Elasticidad Bidimensional*, los problemas se pueden clasificar en:

- Estado de tensión plana;
- Estado de deformación plana.

#### A.1.5.1. Estado de Tensión Plana

En este tipo de aproximación los elementos estructurales presentan una de las dimensiones (se considera la dirección  $z$ ) mucho más pequeña con respecto a las otras dos dimensiones, tal y como se muestra en la Figura A.2. Como consecuencia las componentes del tensor de tensiones según la dirección  $z$  son nulas. Un posible ejemplo lo constituyen las vigas de gran canto como la mostrada en la Figura A.3.

Para esta aproximación el estado de deformación viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Nótese que pese a que no hay tensión según la dirección  $z$ , sí que hay deformación ( $\varepsilon_z$ ) y viene dada por la expresión:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (\text{A.8})$$

La inversa de la expresión anterior nos proporciona la ley de Hooke para el caso de tensión plana:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Debido al principio de superposición, se puede incluir el efecto térmico en la relación constitutiva de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

donde  $\Delta T$  es la variación de temperatura, y  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica.

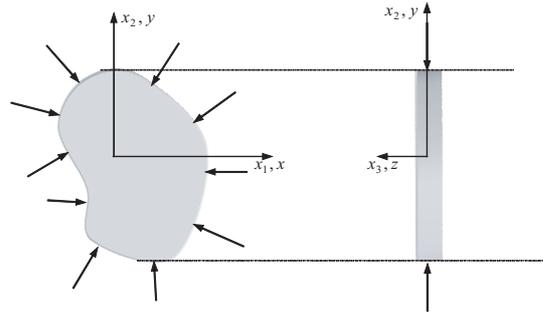


Figura A.2: Estado de tensión plana.

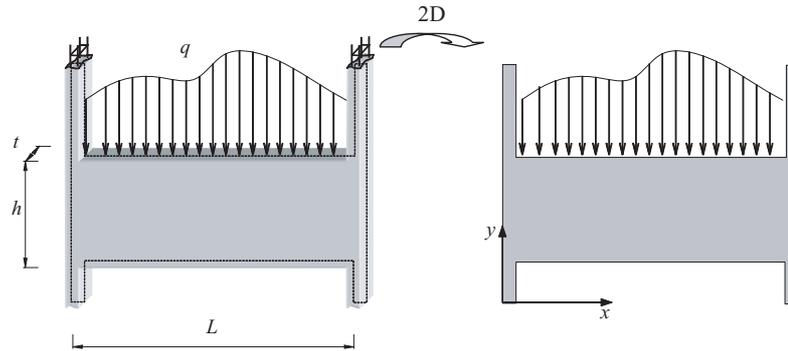


Figura A.3: Viga de gran canto.

La deformación producida por el efecto térmico viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

### A.1.5.2. Estado de Deformación Plana

Considérese un elemento estructural prismático en el que una de las dimensiones, en el sentido del eje prismático, es mucho mas grande que las otras dimensiones, y que presenta cargas aplicadas normales al eje prismático. En estas condiciones las deformaciones  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ , son nulas. Ejemplos de este tipo de estructuras son los muros de contención, cilindros bajo presión (véase la Figura A.4), presas (véase la Figura A.5), túneles como el mostrado en la Figura A.6 o zapatas corridas.

La ley de Hooke para el estado de deformación plana queda como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Pese a que no hay deformación según la dirección  $z$ , si existe tensión  $\sigma_z$  y viene dada por la expresión:

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (\text{A.13})$$

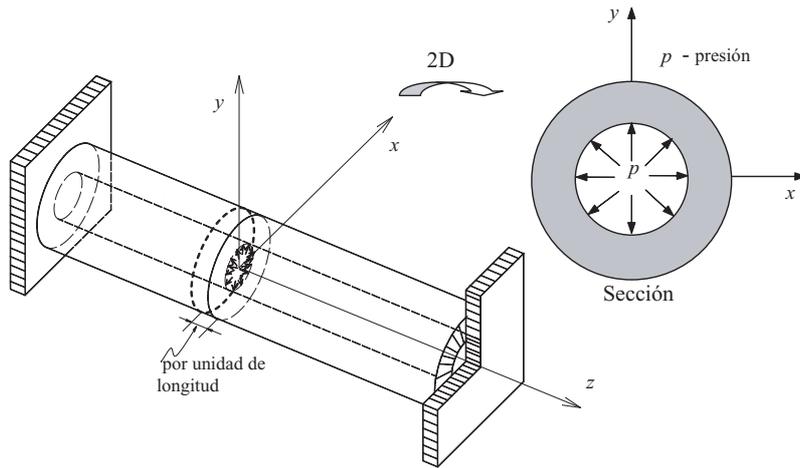


Figura A.4: Cilindro bajo presión.

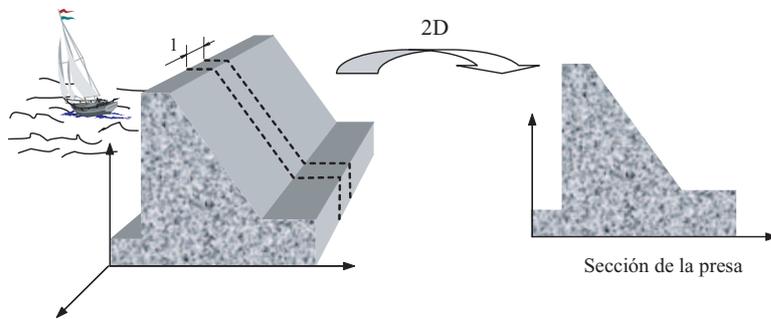


Figura A.5: Presa.

La inversa de la expresión A.12 viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{bmatrix} 1 - \nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Si en el sólido se consideran efecto térmicos la ley de Hooke queda como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{1 - 2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

La ley constitutiva para los estados de tensión y de deformación plana se pueden representar en una única expresión de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} \\ \bar{\nu} & 1 \\ & & \frac{1 - \bar{\nu}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

donde los valores de  $\bar{E}$ ,  $\bar{\nu}$  toman los siguientes valores en función del problema:

- Estado de tensión plana:

$$\bar{E} = E \quad ; \quad \bar{\nu} = \nu. \quad (\text{A.16})$$

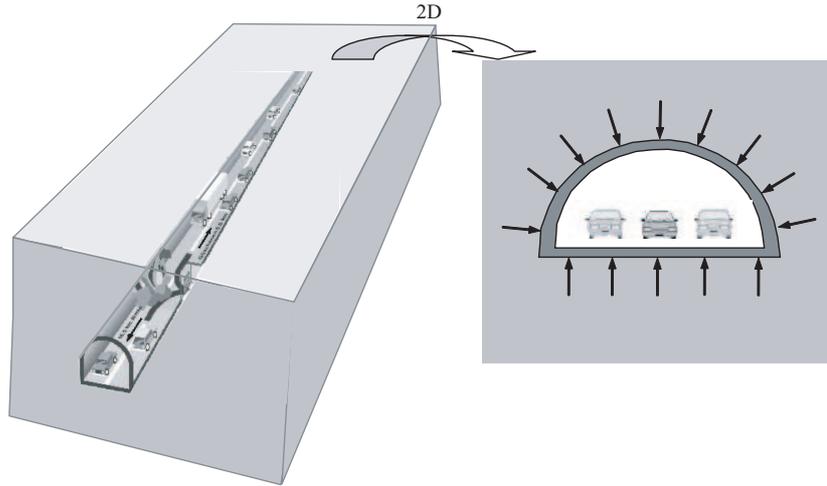


Figura A.6: Túnel.

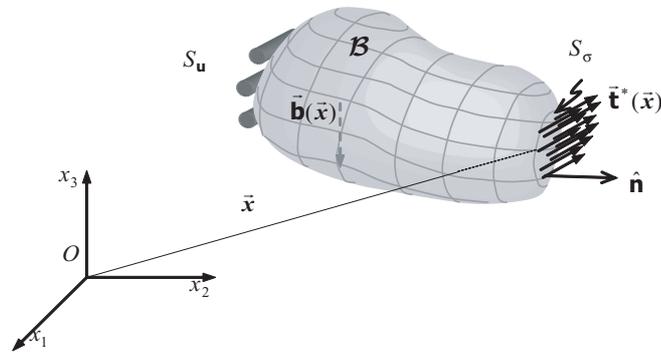


Figura A.7: Sólido en equilibrio.

- Estado de deformación plana:

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu} \tag{A.17}$$

## A.2. Problema de Valor de Contorno de un Sólido en Equilibrio

Considérese un cuerpo  $\mathcal{B}$  de volumen  $V$  y con densidad  $\rho_0$ . Sea  $S$  la superficie que delimita el volumen  $V$  y  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector normal a la superficie  $S$ . Se considera que el cuerpo está en equilibrio bajo la acciones externas: fuerzas másicas  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  y fuerzas de superficie  $\mathbf{t}^*(\mathbf{x})$ . Mientras que el contorno tiene una parte  $S_{\mathbf{u}}$  en la que los desplazamientos son conocidos y una parte  $S_{\sigma}$  donde el vector tension,  $\mathbf{t}^*(\mathbf{x})$ , es conocido, tal que  $\overline{S_{\mathbf{u}}} \cup \overline{S_{\sigma}} = S$  y  $S_{\mathbf{u}} \cap S_{\sigma} = \emptyset$  (véase la Figura A.7).

Bajo estas condiciones el Problema de Valor de Contorno viene gobernado por las siguientes ecuaciones:

1. Ecuaciones de Equilibrio:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 b_i &= 0_i.\end{aligned}\tag{A.18}$$

2. Ecuaciones Constitutivas del material elástico, lineal e isótropo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \\ \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.\end{aligned}\tag{A.19}$$

3. Ecuaciones Geométricas:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \nabla^{sym} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).\end{aligned}\tag{A.20}$$

Y además necesita de las **condiciones de Contorno** para su correcta definición:

1. Condiciones de contorno en desplazamientos:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ u_i &= u_{0i}.\end{aligned}\tag{A.21}$$

2. Condiciones de contorno en tensiones:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{t}^*(\mathbf{x}) \\ \sigma_{ij} n_j &= t_i^*.\end{aligned}\tag{A.22}$$

### A.3. Aplicación de la Elasticidad Lineal a Elementos Unidimensionales

Los elementos estructurales que presentan una de las dimensiones mucho más grande que las otras dos dimensiones presentan ciertas características que pueden simplificar enormemente el problema. Es el caso de las barras o vigas.

En esos casos, considerando que las dimensiones transversales son más pequeñas que la longitudinal y además, considerando el régimen de pequeñas deformaciones, la sección de la barra permanece plana cuando se deforma y como resultado, la variación de la deformación en la sección es lineal, al igual que la tensión, tal y como se muestran en la Figura A.8.

Si se hace un corte en una sección según la orientación del plano  $\Pi$ , el estado tensional de un punto situado en esta sección es el indicado en la Figura A.9

La integración de las tensiones sobre el área transversal nos proporciona los esfuerzos: normal  $N$ , el momento flector  $M$ , el esfuerzo cortante  $Q$ , y el momento torsor  $M_T$ . A continuación se describe cómo obtener estos esfuerzos.

#### A.3.1. Esfuerzo Normal y Momento Flector

Como la sección permanece plana tras la deformación, la distribución de tensión en la sección varía según la ecuación de un plano, tal y como se muestra en la Figura A.10. Se puede descomponer la tensión normal como se indica en la Figura A.10.

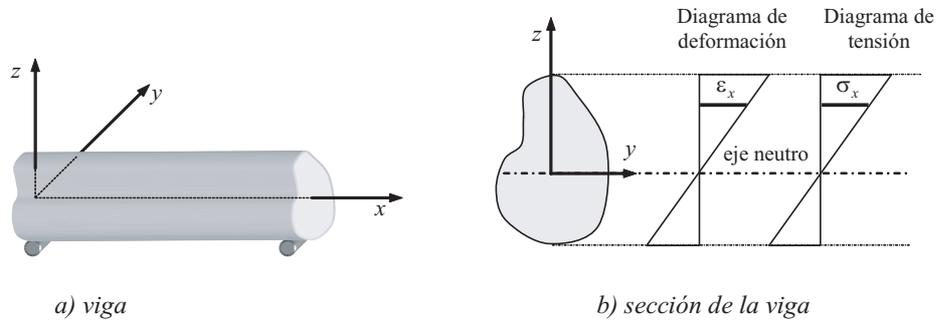


Figura A.8: Viga.

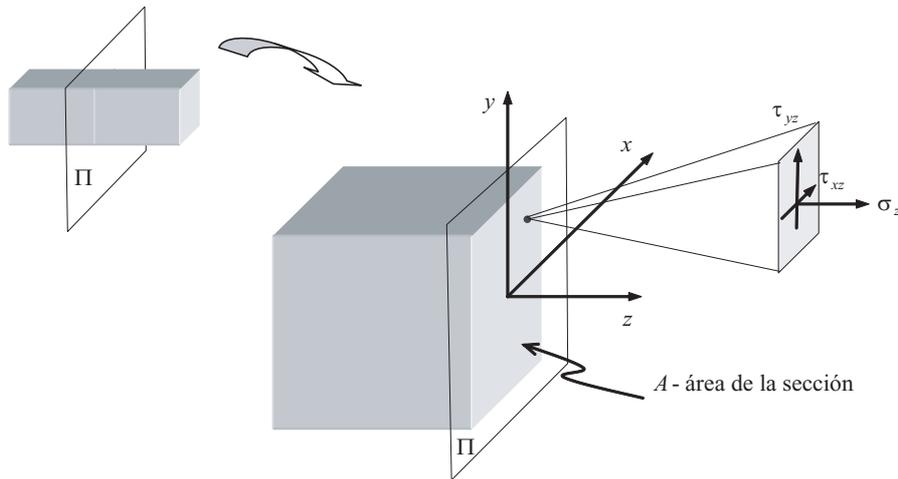


Figura A.9: Tensiones en la sección de una viga.

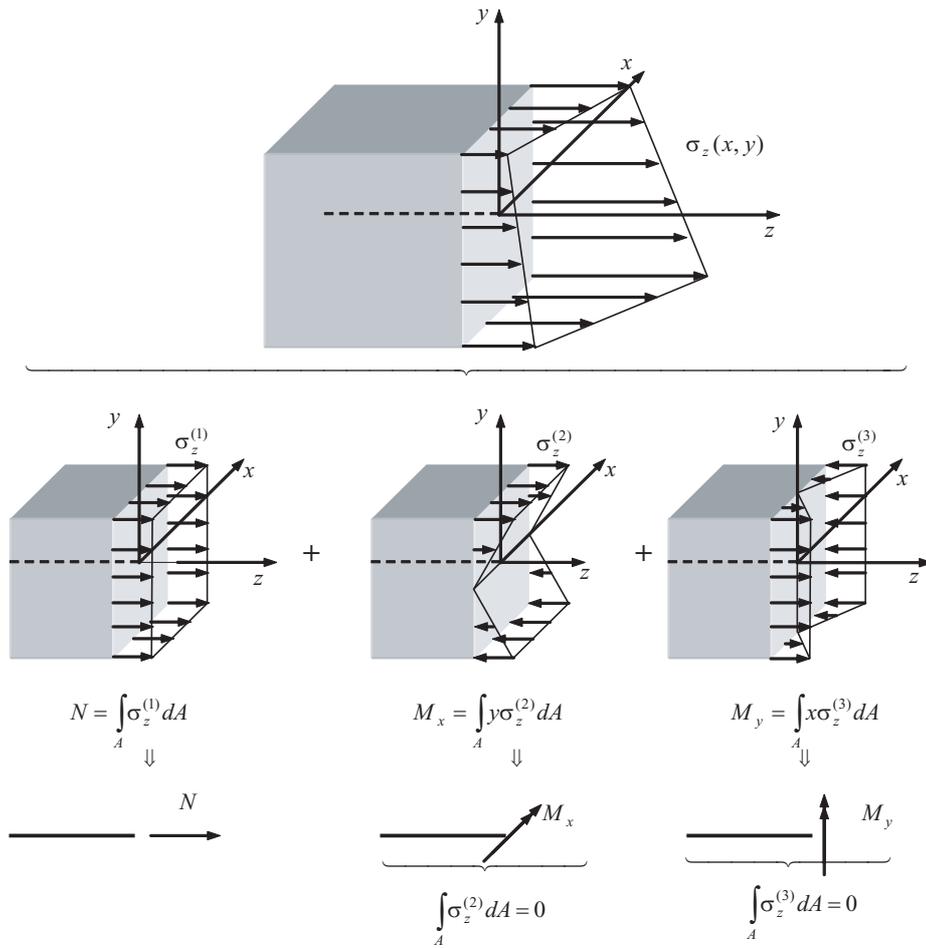


Figura A.10: Esfuerzo normal  $N$  y momentos flectores  $M_x$  y  $M_y$ .

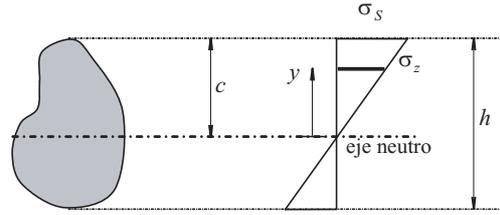


Figura A.11: Distribución de la tensión normal en la sección de una viga.

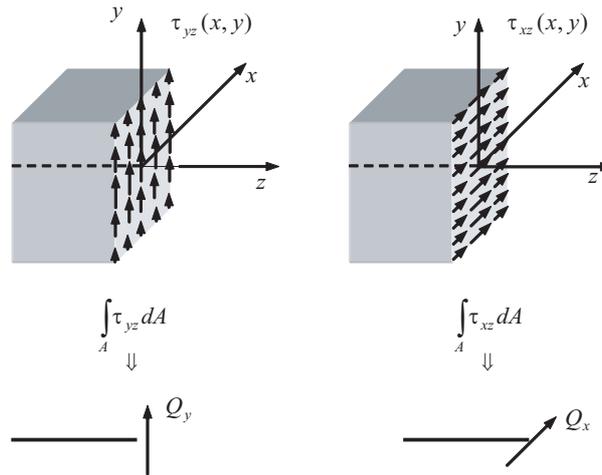


Figura A.12: Tensiones tangenciales y esfuerzo cortante.

Con la tensión normal se pueden obtener el esfuerzo normal ( $N$ ) y los momentos flectores  $M_x$  y  $M_y$ .

Considerando la Figura A.11, el momento flector  $M_x$  se puede expresar como:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A \frac{\sigma_S y}{c} y dA = \frac{\sigma_S}{c} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma_S}{c} I_x, \tag{A.23}$$

donde  $I_x$  es el momento de inercia respecto al eje  $x$ . Teniendo en cuenta que  $\frac{\sigma_S}{c} = \frac{\sigma_z}{y}$  se obtiene que:

$$\sigma_z(y) = \frac{M_x}{I_x} y. \tag{A.24}$$

Análogamente, se puede obtener que:

$$\sigma_z(x) = \frac{M_y}{I_y} x. \tag{A.25}$$

Debido a las tensiones tangenciales se producen los esfuerzos cortantes ( $Q_x, Q_y$ ), tal y como se muestran en la Figura A.12, y el momento torsor ( $M_T$ ) (véase la Figura A.13).

El alabeo de la sección es un fenómeno que surge debido al aumento de las tensiones tangenciales en un punto y disminución en otro, tal y como se muestran en la Figura A.14(a). En secciones circulares no hay alabeo, ya que la distribución de la tensión tangencial en la sección varía como se muestra en la Figura A.14(b).

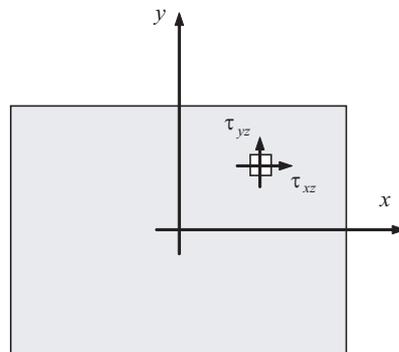


Figura A.13: Tensiones tangenciales y momento torsor.

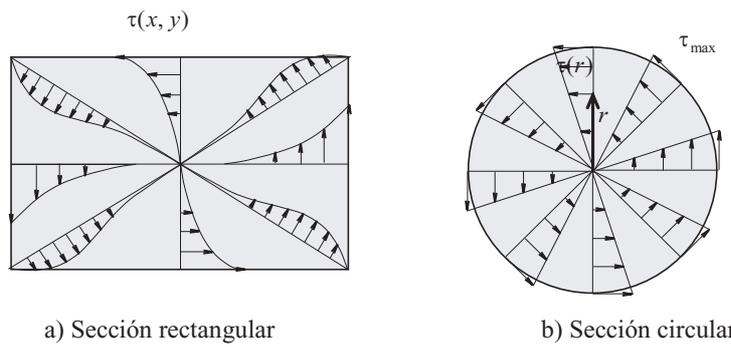


Figura A.14: Distribución de tensiones tangenciales.

### A.3.2. Energía de Deformación

La energía de deformación asociada a la tensión normal  $\sigma_z^{(1)}$  (véase la Figura A.10) puede ser expresada en función del esfuerzo normal de la siguiente manera:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_z^{(1)} \varepsilon_z dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA^2} \int_A dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx. \quad (\text{A.26})$$

Análogamente, se puede obtener la energía de deformación asociada a la tensión normal  $\sigma_z^{(2)}$  como:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_z^{(2)} \varepsilon_z dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{M_x}{I_x} y \frac{M_x}{I_x} y dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_x^2}{EI_x} dx. \quad (\text{A.27})$$

Por último, si se considera  $\sigma_z^{(3)}$ , se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx. \quad (\text{A.28})$$

Siguiendo el mismo procedimiento se puede calcular la energía de deformación total de una barra en función de sus esfuerzos, que viene dada por la siguiente expresión:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \varsigma \frac{Q_x^2}{GA} + \varsigma \frac{Q_y^2}{GA} + \frac{M_T^2}{EJ_T} \right) dx, \quad (\text{A.29})$$

donde  $\varsigma$  es el factor de la sección, y  $J_T$  es el momento de inercia a torsión.



---

## Apéndice B

# Almacenamiento en Banda

---

En general la matriz de rigidez de un sistema  $[\mathbf{K}]$  tiene muchos elementos iguales a cero. El número de ceros en una matriz de rigidez no depende de la numeración de los nudos, pero un cambio de numeración de los mismos permite cambiar la posición de los coeficientes.

En la actualidad hay técnicas que optimizan la resolución de un sistema de ecuaciones utilizando sólo los coeficientes distintos de cero. Una de las técnicas consiste en agrupar todos los elementos de la matriz de rigidez en una banda en torno a la diagonal principal, y almacenar únicamente los elementos de esa banda, tal y como se muestran en la Figura B.1.

La zona en la que se almacenan los coeficientes distintos de ceros se denomina *banda*. La longitud de la banda se conoce con el nombre de *ancho de banda* y depende de la diferencia máxima entre la numeración de los nodos en cada elemento. El semi ancho de banda viene dado por la expresión:

$$b = G_L (N_d + 1), \quad (\text{B.1})$$

donde  $G_L$  es el número de grados de libertad por nodo, y  $N_d$  es la diferencia máxima de la numeración de los nodos en el elemento. El ancho de banda es, por tanto, igual a  $2b$ .

Como ejemplo, supóngase una estructura con dos grados de libertad por nodo. El ancho de banda cambia de acuerdo con la numeración de los nodos de la estructura. Considérense las distintas numeraciones mostradas en la Figura B.2. Calculando la longitud del ancho de banda para las dos estructuras se obtienen los valores 24 y 6.

Nótese que si se almacena únicamente la banda que contiene los elementos distintos de cero es preciso reservar espacio en memoria para almacenar una matriz de dimensiones  $28 \times 24$ , mientras que con la numeración alternativa sólo sería necesario reservar espacio para una matriz de dimensiones  $28 \times 6$ , con el consiguiente ahorro de memoria.

**Comentario B.1** *Nótese que en matlab esta metodología no es especialmente importante, ya que existen métodos de almacenamiento y resolución de matrices dispersas, que únicamente almacenan los elementos que son distintos de cero. Pero puede ser determinante si se emplean lenguajes de computación alternativos* ■

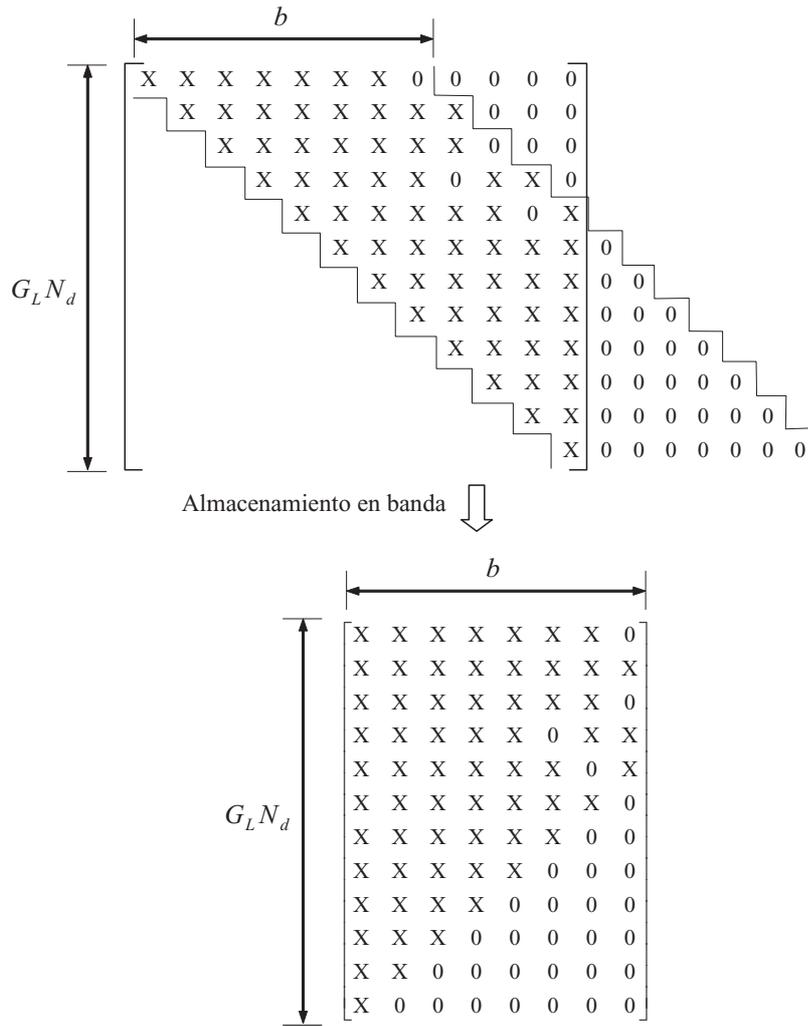


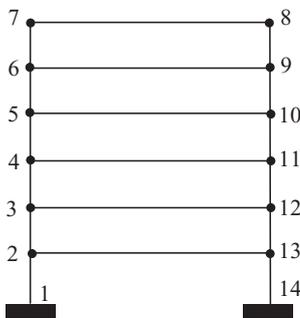
Figura B.1: Almacenamiento en semi-banda.

Estructura 1

$$G_L = 2$$

$$N_L = 13 - 2 = 11$$

$$b = 2(11 + 1) = 24$$

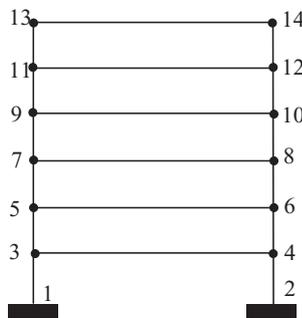


Estructura 2

$$G_L = 2$$

$$N_L = 3 - 1 = 2$$

$$b = 2(2 + 1) = 6$$



(B.2)

Figura B.2: Ejemplo de una estructura con distinta numeración de los nodos.

## Bibliografía

---

- [Batoz, 1982] Batoz, J. L. (1982). An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18:1077–1089.
- [Batoz et al., 1980] Batoz, J. L., Bathe, K. J., and Ho, L. W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15:1771–1812.
- [Chaves, 2007] Chaves, E. W. V. (2007). *Mecánica del medio continuo: Conceptos Básicos*. CIMNE, Barcelona, Spain.
- [Groenwold and Stander, 1997] Groenwold, A. A. and Stander, N. (1997). Optimal discrete sizing of truss structures subject to buckling constraints. *Struct. Opt.*, 14:71–80.
- [Jeyachandrabose et al., 1985] Jeyachandrabose, C., Kirkhope, J., and Ramesh Babu, C. (1985). An alternative explicit formulation for the dkt plate-bending element. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21:1289–1293.
- [Malvern, 1969] Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- [Mase, 1977] Mase, G. E. (1977). *Mecánica del medio continuo*. McGraw Hill, México, D.F.
- [Norrie and de Vries, 1973] Norrie, D. H. and de Vries, G. (1973). *The finite element method - Fundamentals and Applications*. Academic Press, London.
- [Oñate, 1992] Oñate, E. (1992). *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*. CIMNE, Barcelona.
- [Oliver and Agelet de Saraciber, 2000] Oliver, X. and Agelet de Saraciber, C. (2000). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Edicions UPC, Barcelona, Spain.
- [Zienkiewicz and Taylor, 2004a] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2004a). *El método de los elementos finitos. Vol. 1, Las Bases*. CIMNE, Barcelona, Spain.
- [Zienkiewicz and Taylor, 2004b] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2004b). *El método de los elementos finitos. Vol. 2, Mecánica de Sólidos*. CIMNE, Barcelona, Spain.



# Índice alfabético

---

- Altura piezométrica, 329
- Coefficiente de Poisson, 367
- Condición de contorno, 317
  - Dirichlet, 317, 330
  - esencial, 317, 330
  - natural, 317, 319, 330
  - Neumann, 317, 319, 330
- Condiciones de Contorno, 372
- Conducción térmica, 313
- Convección térmica, 314
- CST - Constant Strain Triangular, 195
- Deformación Infinitesimal, 365
- Deformación Plana, 369
- Ecuación de
  - conservación, 328
  - difusión-convección, 311, 316, 350
  - flujo de calor, 315
  - Laplace, 317, 325
  - Poisson, 316, 325
- Ecuación diferencial
  - elíptica, 317
  - parabólica, 317
- Ecuación diferencial de torsión, 352
- Ecuación Diferencial de Placas, 274
- Ecuaciones Constitutivas, 372
- Ecuaciones de Equilibrio, 372
- Ecuaciones Geométricas, 372
- Elasticidad Lineal, 365
- Elementos Isoparamétricos, 90
- Elementos Lagrangeanos, 95
- Energía de Deformación (forjado), 261
- Fuente, 328
- Fuerzas de Superficie, 206, 225
- Fuerzas Debido a Deformación Inicial, 206
- Fuerzas Másicas, 206, 225
- Fuerzas Nodales Equivalentes, 207, 225
- Función de tensión, 353
- Lamé, Constantes de, 367
- Ley de Darcy, 328
- Ley de Fourier, 313, 316
- Ley de Hooke, 368–370
- Ley de Newton del Enfriamiento, 315
- LST - Linear Strain Triangular, 222
- Método de Galerkin, 318
- Módulo de Elasticidad Transversal, 367
- Módulo de Young, 367
- Módulo Volumétrico, 367
- Matriz Constitutiva Elástica, 202, 367
- Matriz de Rigidez CST, 204, 205
- Matriz Jacobiana, 236
- Matriz Operador Diferencial, 366
- Polinomio de Pascal, 197, 242
- Problema
  - elíptico, 325
  - estacionario, 316, 321
  - parabólico, 325
  - transitorio, 321
- Proceso
  - estacionario, 328
- Régimen
  - estacionario, 311, 317
  - transitorio, 311, 317
- Radiación térmica, 315
- Residuo ponderado, 318, 331, 358
- Sumidero, 328
- Tensión Plana, 368
- Tensor de Deformación, 365
- Tensor de Tensiones, 365
- Teoría de Kirchhoff, 263, 269
- Teoría de Reissner, 263
- Teoría de Reissner-Mindlin, 263
- Teorema del Trabajo Virtual, 202

