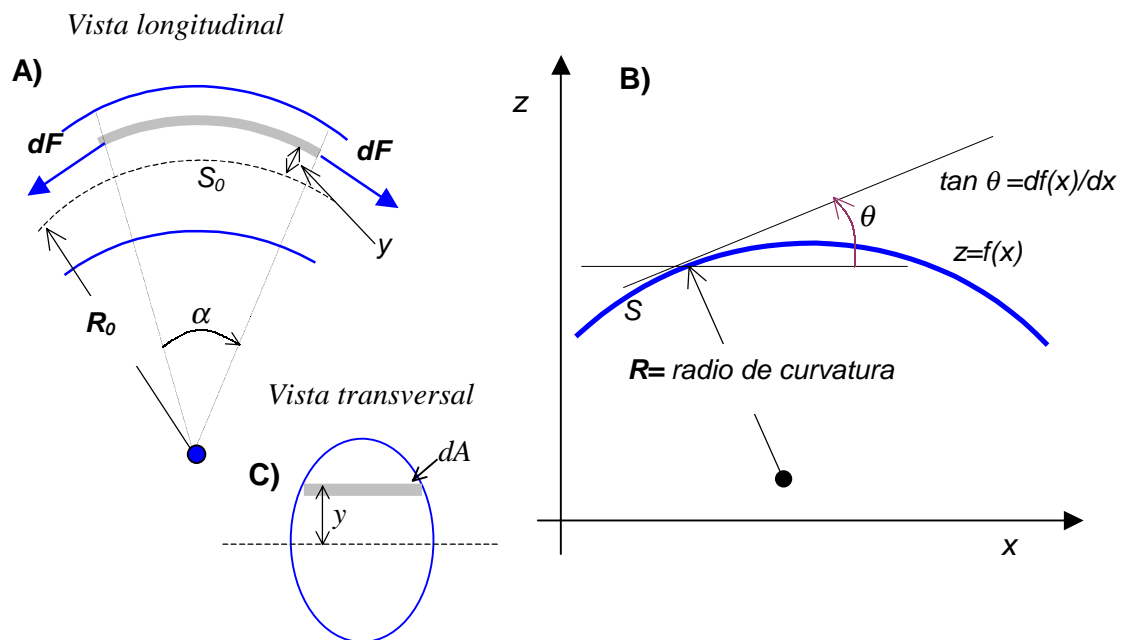


# Flexión y pandeo de vigas

## Laboratorio 5 – UBA

### Objetivo

Estudiar experimentalmente la forma que adopta una barra en flexión, esto es estudiar la “elástica” de la viga. También se busca determinar el módulo de elasticidad del material.



**Figura xx.1:** A) Barra sometida a flexión. A la izquierda se observa un tramo infinitesimal de la misma sometida a tracción por la parte superior y a compresión en su parte inferior. La línea de trazos indica la línea neutra, la cual no está sometida a tracción ni compresión. B) A la derecha observamos un tramo finito de la misma barra. C) En la zona central vemos una vista transversal de la barra.

### Introducción

Consideremos un tramo infinitesimal de una barra sometida a flexión, como se ilustra esquemáticamente en la figura xx.1. Es claro que mientras la parte superior de la barra se encuentra solicitada a tensiones de tracción su parte inferior está sometida a tensiones de compresión. Asimismo, habrá una superficie de la misma, cercana a su zona central, que no estará sometida ni a tracción ni a compresión. Esta superficie se conoce como la zona neutra de la barra, y en la figura xx.1.A) está representada por la línea de

trazos. Si tomamos un elemento infinitesimal de la barra, paralela a la zona o línea neutra a una distancia  $y$  de la misma, este segmento corresponde a la región sombreada de la figura xx.1a. Supondremos que el área transversal de este elemento es  $dA$ . Con  $R_0$  designamos el radio de curvatura de la zona neutra y llamamos  $S_0$  a la longitud del elemento de barra arco de la barra en consideración a lo largo de la zona neutra. La longitud del arco de que esta a una distancia  $y$  de la línea neutra lo designamos con  $S(y)$ . De la geometría del problema podemos escribir en primera aproximación:

$$\alpha = \frac{S(y)}{R_0 + y} = \frac{S_0}{R_0} \text{ por lo tanto } \Delta S(y) = S(y) - S_0 = \frac{S_0}{R_0} \cdot y \quad (\text{aa1})$$

Si  $df$  designa la fuerza infinitesimal, responsable de la tracción (o compresión) de este elemento infinitesimal de la barra, por la ley de Hooke tenemos:<sup>1,2,3</sup>

$$df = \left(E \cdot \frac{dS}{S_0}\right) \cdot dA = E \cdot \frac{y}{R_0} \cdot dA. \quad (\text{aa2})$$

El momento de esta fuerza infinitesimal, relativa a la línea neutra será  $dM=y \cdot df$ , por lo tanto el momento flector de la barra será:<sup>1,2,3</sup>

$$M = \int y \, df = \int \left(E \cdot \frac{dS}{S_0}\right) \cdot dA = \frac{E}{R_0} \cdot \int_{Area} y^2 \cdot dA, \quad (\text{aa3})$$

o bien:

$$M = \frac{E \cdot I}{R_0}, \quad (\text{aa4})$$

donde hemos definido el momento areal o *momento de inercia de la sección transversal* de la barra como:

$$I = \int_{Area} y^2 \cdot dA. \quad (\text{aa5})$$

Aquí  $E$  representa el módulo de rigidez o módulo de Young del material. El producto  $I \cdot E$  se conoce como el *coeficiente de rigidez* (“*flexural rigidity*” o “*Stiffness*”) a la flexión de la barra. Por su parte el radio de curvatura de la barra puede escribirse como:<sup>4,5,6</sup>

$$R = \frac{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}}{d^2 z/dx^2} = \frac{[f'^2(\phi) + g'^2(\phi)]^{3/2}}{(f'(\phi) \cdot g''(\phi) - f''(\phi) \cdot g'(\phi))} = \frac{dS}{d\theta}. \quad (\text{aa6})$$

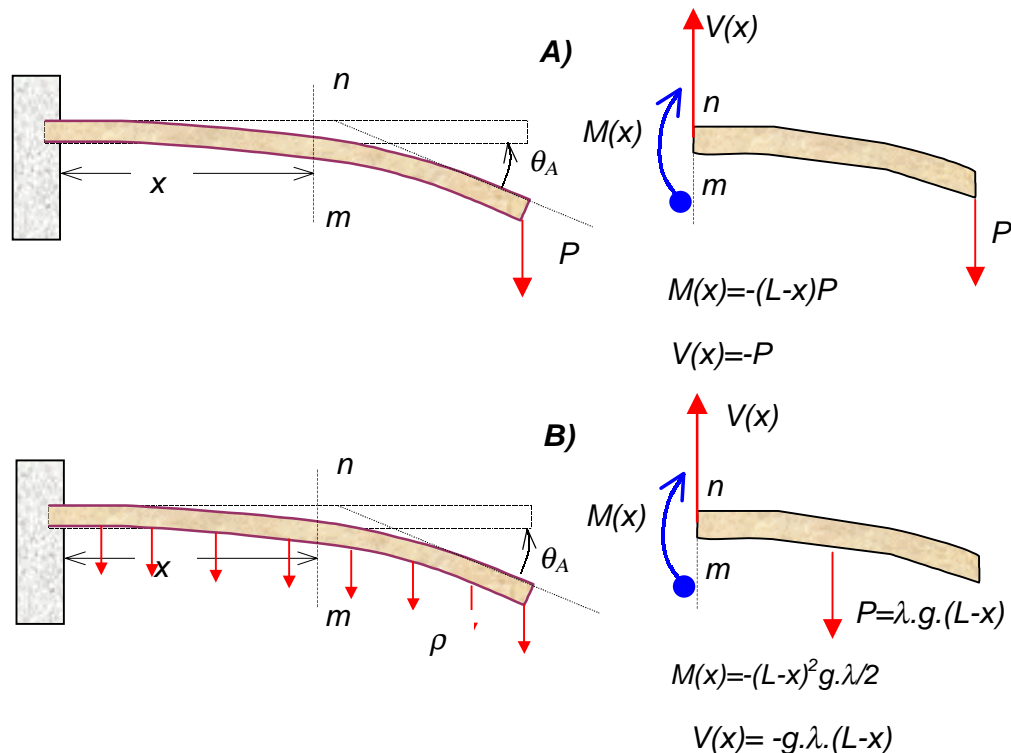
La primera forma de expresar el radio de curvatura corresponde al caso en que se dispone de la expresión de la curva de la forma  $z=z(x)$  y la segunda cuando la forma de la curva se expresa en forma paramétrica ( $x=f(\phi)$ ,  $z=g(\phi)$ ). La tercera forma, expresa el radio de curvatura en términos de la longitud de arco  $S$  y el ángulo  $\theta$ , que la tangente a la curva forma con el eje  $x$ , como se ilustra en la figura xx.1. Si la curvatura de la viga es pequeña, o equivalentemente, si el radio de curvatura  $R$  es mucho mayor que el tamaño de la viga, o sea si  $R \gg L$ , tenemos que:

$$R \approx \frac{1}{d^2 z/dx^2} = \frac{(f'(\phi))^3}{(f'(\phi) \cdot g''(\phi) - f''(\phi) \cdot g'(\phi))}. \quad (\text{aa7})$$

En este caso la relación aa.3 se escribe como:

$$M \approx E \cdot I \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (\text{aa8})$$

**Momentos flectores:** Un problema común en diversos problemas que involucran vigas, es determinar el valor del momento flector  $M(x)$  o momento resistente en un punto de coordenada  $x$ . Para ello imaginemos que la barra se corta en el punto de coordenadas  $x$  (línea  $mn$ ). Para mantener en equilibrio la sección que esta a la derecha de la línea  $mn$  será necesario una fuerza cortante  $V(x)$  (cortante resistente) y un momento flector  $M(x)$ , que en realidad realiza la sección de la viga a la izquierda de la línea  $mn$ . De las condiciones de equilibrio ( $\sum F_i=0$  y  $\sum M_i=0$ ) podemos obtener los valores de  $M(x)$  y  $V(x)$ .



**Figura xx2:** A) Barra empotrada de longitud  $L$ , sometida a flexión por una fuerza  $P$  aplicada en su extremo libre. B) Barra empotrada de longitud  $L$ , sometida a flexión por una fuerza uniforme  $g \cdot \lambda$  distribuida al lo largo de toda la barra. El objetivo en general es determinar el valor del momento flector  $M(x)$  o momento resistente en un punto de coordenada  $x$ . De las condiciones de equilibrio ( $\sum F_i=0$  y  $\sum M_i=0$ ) obtenemos los valores de  $M(x)$  y  $V(x)$ . El ángulo que forman las tangentes a la barra en sus dos extremos,  $\theta_A$ , se conoce con el nombre de ángulo de giro.

Algunos casos de interés son los siguientes:

✓ **Viga de peso despreciable empotrada con un extremo libre que sostiene un peso  $P$ :** esta situación se ilustra en la figura x.2.A). Si concediéramos la sección de la viga a la derecha de  $mn$ , de las condiciones de equilibrio es fácil obtener:

$$V(x) = -P \quad (\text{aa9})$$

y

$$M(x) = -P \cdot (L - x). \quad (\text{aa10})$$

De la expresión (aa.4) o (aa.8), para pequeñas deformaciones de la barra ( $1/R \approx d^2z/dx^2$ ) tenemos que:

$$z(x) \approx -\frac{1}{6} \cdot \frac{P \cdot L}{E \cdot I} \cdot x^2 \cdot \left(3 - \frac{x}{L}\right), \quad \theta_A = \frac{3 \cdot f}{2 \cdot L} \quad \text{y} \quad f \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I}. \quad (\text{aa11})$$

En estas últimas ecuaciones hemos tenido en cuenta las condiciones de borde del problema, más específicamente hemos impuesto las condiciones:  $z(0) = \partial z(0)/\partial x = 0$ .

✓ **Viga de con carga distribuida uniformemente,** empotrada y con el otro extremo libre: esta situación se ilustra en la figura x.2.B). Si concediéramos la sección de la viga a la derecha de  $mn$ , de las condiciones de equilibrio es fácil obtener:

$$V(x) = -g \cdot \lambda \cdot (L - x), \quad (\text{aa12})$$

aquí,  $g \cdot \lambda$  es carga por unidad de longitud,  $\lambda = \rho \cdot A$  la densidad lineal de masa,  $\rho$  la densidad (masa por unidad de volumen),  $A$  el área transversal de la barra y  $g$  la aceleración de la gravedad. También tenemos:

$$M(x) = -\frac{g \cdot \rho \cdot A}{2} \cdot (L - x)^2. \quad (\text{aa13})$$

De la expresión (aa.8), para pequeñas deformaciones de la barra tenemos que:

$$z(x) \approx -\frac{1}{24} \cdot \frac{g \cdot m \cdot L}{E \cdot I} \cdot x^2 \cdot \left(6L - 4x + \frac{x^2}{L}\right),$$

$$\theta_A = \frac{4 \cdot f}{3 \cdot L} \quad \text{y} \quad f \approx \frac{1}{8} \cdot \frac{m \cdot g \cdot L^3}{E \cdot I}. \quad (\text{aa14})$$

✓ **Viga de con carga distribuida variable  $g \cdot \lambda(x)$ ,** empotrada en un extremo y con el otro extremo libre: esta situación es una generalización de la ilustrada en la figura x.2.B). Si concediéramos la sección de la viga a la derecha de  $mn$ , de las condiciones de equilibrio obtenemos:

$$V(x) = -\int_x^L g \cdot \lambda(x') \cdot dx'. \quad (\text{aa15})$$

También tenemos:

$$M(x) = -g \int_x^L \lambda(x') \cdot (x - x') \cdot dx'. \quad (\text{aa16})$$

Si derivamos esta última expresión respecto de  $x$  obtenemos:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = -\int_x^L g \cdot \lambda(x') \cdot dx = V(x). \quad (\text{aa17})$$

Derivando nuevamente obtenemos:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = -g \cdot \lambda(x) = -g \cdot A(x) \cdot \rho(x) \quad (\text{aa18})$$

Combinando esta última expresión con (aa.7) para pequeñas deformaciones, obtenemos la importante relación de Euler Bernoulli:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} \approx E \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( I \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \lambda(x) \quad (\text{aa19})$$

Si la sección de la viga es uniforme, esta última expresión se reduce a::

$$EI \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = g \cdot \lambda(x) \quad (\text{aa20})$$

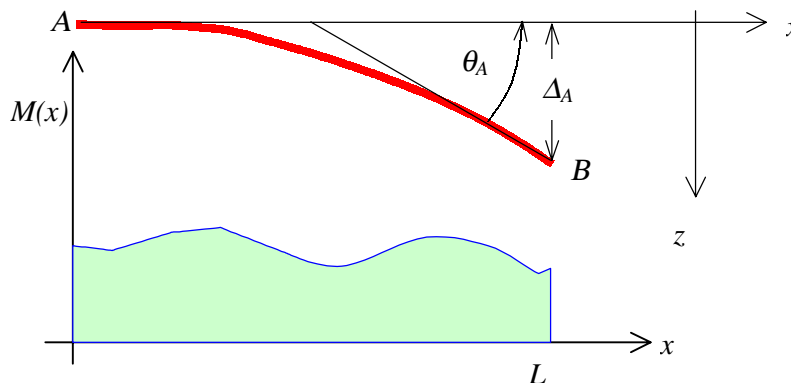
Usando el principio de D'alambert, esta última expresión nos permite escribir la ecuación diferencial del movimiento de la barra:<sup>4</sup>

$$EI \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \approx -\lambda(x) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (\text{aa21})$$

Finalmente, es útil de tener en cuenta dos teoremas de las áreas de los momentos, que pueden demostrarse a partir de la expresión (aa4),<sup>4,5</sup> para pequeñas deformaciones de una barra saber:

✓ *Primer teorema del área de momentos:* referida a la figura xx.3, si  $\theta_A$ , representa el ángulo entre las tangentes a la barra en sus dos extremos, conocido con el nombre de ángulo de giro, se cumple la siguiente relación:<sup>4,5</sup>

$$\theta_A = \int_0^L \frac{M(x) \cdot dx}{E \cdot I}. \quad (\text{aa22})$$



**Figura xx.3:** Barra de longitud  $L$ , sometida a flexión por un momento flector aplicado de forma general,  $M(x)$ , a lo largo de la misma.  $\theta_A$ , se conoce con el nombre de ángulo de giro. La distancia  $\Delta_A$  se mide a lo largo de una línea perpendicular a la barra.<sup>4,5</sup>

- ✓ *Segundo teorema del área de momentos:* si  $\Delta_A$  es la distancia entre la tangente en uno de los extremos de la barra al otro extremo de la misma, a lo largo de una dirección perpendicular a la barra (en su posición original sin deformación) se cumple que:<sup>4,5</sup>

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{M(x) \cdot x \cdot dx}{E \cdot I} \quad (\text{aa23})$$

Es importante señalar que estos teoremas son válidos tanto para toda la barra como para una porción de la misma.

### **Problema de Euler: pandeo de una viga.**

El problema de Euler consiste en encontrar la forma de una viga sometida a pandeo. La curva que describe dicha forma se conoce con el nombre de la “elástica” de la misma. En primer término analizaremos caso de pequeñas flexiones y seguidamente el caso de flexiones arbitrariamente grandes.

**Pequeñas deflexiones:** En este caso supondremos que tenemos una barra de sección uniforme vertical, empotrada en su parte inferior como se ilustra en la figura xx.4, sometida a una fuerza o carga  $F$  a lo largo de la misma. Nótese la diferencia con el caso analizado en figura xx.2, donde la fuerza se aplicaba perpendicular a la viga. El torque  $M(x)$  que la fuerza  $F$  ejerce sobre un punto de la barra de coordenada  $x$ , como vimos anteriormente (aa.9), puede expresarse como:<sup>1,2</sup>

$$M(x) = -F \cdot (u_0 - z(x)) \quad (\text{aa24})$$

Combinando esta expresión con (aa.3) y (aa.7) tenemos:

$$E \cdot I \left[ \frac{d^2 z}{dx^2} \right] = -F \cdot (u_0 - z(x)) \quad (\text{aa25})$$

En esta expresión, suponemos que el radio de curvatura es grande en comparación del largo  $L$  de la barra. La Ec.(aa22) también puede escribirse como:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \kappa^2 \cdot z(x) = -\kappa^2 \cdot u_0 \quad (\text{aa26})$$

con

$$\kappa^2 = \frac{F}{E \cdot I} \quad (\text{aa27})$$

La ecuación diferencial (23) es del mismo tipo que la que se encuentra al resolver el problema del oscilador armónico. Su solución es de la forma:

$$z = A \cdot \sin(\kappa \cdot x) + B \cdot \cos(\kappa \cdot x) + u_0, \quad (\text{aa28})$$

las condiciones de borde:  $z(0)=0$ ,  $dz(0)/dx=0$  y  $z(L)=u_0$  conducen a:  $B=-u_0$  y  $A=0$ . Por lo tanto:

$$z = u_0(1 - \cos(\kappa \cdot x)) \quad (\text{aa29})$$

Para que  $z(L) = u_0$ , tenemos que:

$$\kappa \cdot L = n \frac{\pi}{2}, \quad \text{con} \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (\text{aa30})$$

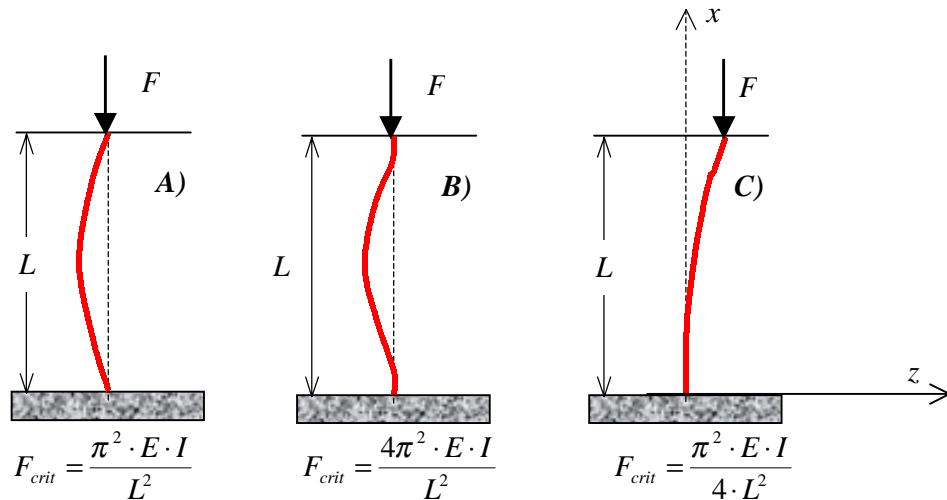
por lo tanto: <sup>1,2</sup>

$$F_{crit} = n^2 \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}, \quad \text{con} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{aa31})$$

El menor valor de  $\kappa$  corresponde a  $n=1$ . Esta condición establece el menor valor de la carga necesaria para que la barra se pandee. Para lograr deflexiones de orden superior,  $n=3, 5$ , etc, se requieren fuerzas mayores. La forma de la flexión para  $n=1$  y 3 se indican esquemáticamente en los diagramas de la derecha de la figura xx3.

Si la viga no está empotrada en su base, es fácil probar, siguiendo el procedimiento usado anteriormente que el valor de la fuerza crítica es:<sup>5</sup>

$$F_{crit} = n^2 \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}, \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{aa32})$$



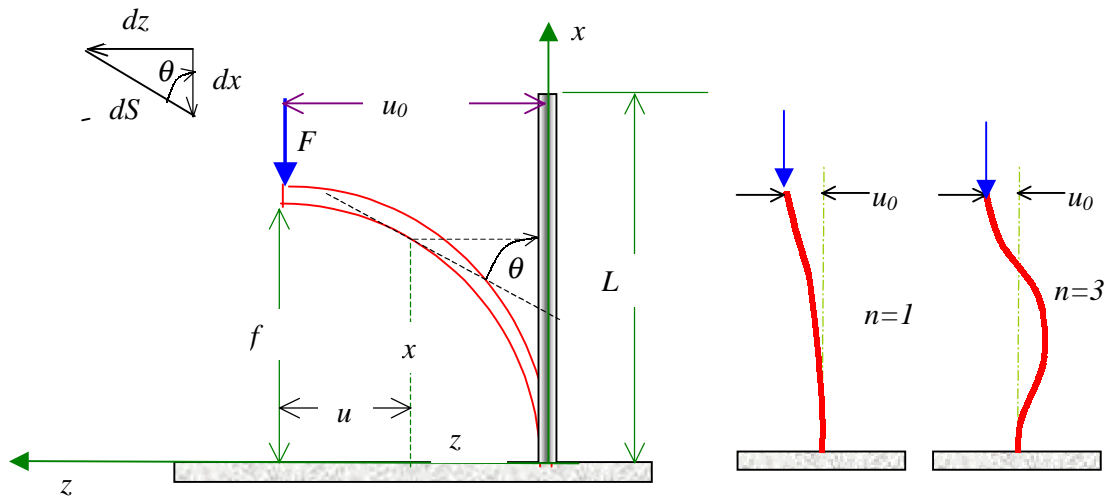
**Figura xx.4:** Pandeo de una viga con distintas condiciones de borde. A) ambos extremos libres, B) ambos extremos empotrados y C) extremo inferior empotrado y superior libre y móvil.

Una apreciación cualitativa pero útil de tener en cuenta, es el hecho que la energía necesaria para deformar una viga, y consecuentemente la fuerza necesaria para hacerlo, aumenta a medida que mayor curvatura se genera en la viga. Nótese que en el ejemplo de la viga del ejemplo de la figura xx.4, el caso de la viga doblemente empotrada corresponde al caso en que la longitud de la barra es igual a una longitud de onda completa, o sea  $\lambda=L$ . el caso A) de la misma figura corresponde a  $\lambda=2L$ . Para el caso C)  $\lambda=4L$ . Estas relaciones se correlacionan exactamente con los correspondientes valores de  $F_{crit}$  ( $=4\pi^2 \cdot E \cdot I / \lambda^2$ ).

Asimismo es interesante notar que para reflexiones transversales no se requiere una fuerza o carga crítica, al contrario de lo que ocurre para el caso del pandeo.

**Deflexiones mayores- Elástica:** Para deflexiones mayores es necesario usar la expresión exacta para el radio de curvatura,<sup>2,7</sup> la ecuación diferencial de la elástica se puede encontrar de la ecuación básica que establece la proporcionalidad entre la curvatura en cada punto de la barra y el momento flector en ese punto de la barra. El torque de las fuerzas externas sobre la barra, en un punto de coordenada  $z$  será  $F \cdot (u_0 - z)$ , por lo tanto:

$$E \cdot I \cdot \frac{d\theta}{dS} = F \cdot u_0 - F \cdot z(x) = F \cdot u \quad \text{con} \quad z(x) = u_0 - u(x) \quad (\text{aa33})$$



**Figura xx.5:** Pandeo de una viga.  $L$  representa su longitud,  $F$  es la carga vertical aplicada a la misma, cuya dirección coincide con la orientación original de barra sin carga. El parámetro  $f$  se denomina la flecha. La forma de la barra, llamada la “elástica” viene descrita por la función  $z(x)$ . De la figura tenemos que  $dx/dz = \tan \theta$ . Las condiciones de contorno son: para  $x=0$ ,  $z=0$  y  $dx/dz=0$ ; para  $z=u_0$ , tenemos  $\theta=\theta_0$  y  $ds/d\theta=0$ .<sup>2,7</sup>

Derivando esta expresión respecto de  $S$  y recordando que:

$$\frac{dz}{dS} = -\frac{du}{sS} = \sin \theta \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dS} = \cos \theta \quad (\text{aa34})$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la tangente a la curva y el eje  $x$ , tenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot \sin \theta . \quad (\text{aa35})$$

Definiendo:

$$\lambda^2 \equiv \frac{1}{A_0^2} = \frac{F}{E \cdot I} , \quad (\text{aa36})$$

la ecuación diferencial de la elástica se convierte en:



$$\frac{d^2\theta}{dS^2} + \lambda^2 \cdot \sin\theta = 0, \quad (\text{aa37})$$

Vemos que esta ecuación diferencial es idéntica a la ecuación diferencial del péndulo simple. Multiplicando esta última ecuación por  $d\theta/dS$  e integrando respecto de  $S$  obtenemos:

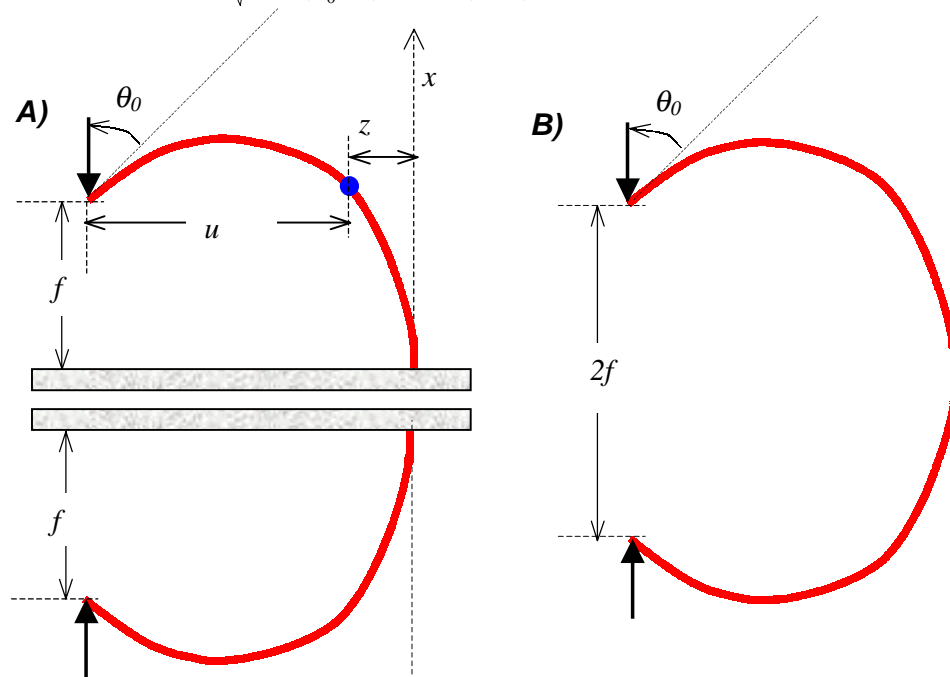
$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dS} \right)^2 - \lambda^2 \cdot \cos\theta = -\lambda^2 \cdot \cos\theta_0, \quad (\text{aa38})$$

La constante del segundo miembro de (aa38) surge de hacer cumplir las condiciones de bordes de la barra. En el extremo libre de la misma, el momento o torque en este punto es nulo, por lo tanto su curvatura de la misma ( $d\theta/dS$ ) también lo es. Por lo tanto para  $\theta=\theta_0$ ,  $d\theta/dS=0$ , donde  $\theta_0$  es el ángulo que forma la tangente a la barra en el extremo libre el eje  $x$ . De este modo podemos escribir (aa38) como:

$$dS = -\frac{d\theta}{\sqrt{2\lambda \cdot \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}} = \frac{d\theta}{2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}. \quad (\text{aa39})$$

Como suponemos que la longitud de la barra  $L$  no se modifica al flexionarse, tenemos:

$$L = \frac{1}{2 \cdot \lambda} \int_{-\pi/2}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{\lambda} K(\pi/2, k), \quad (\text{aa40})$$



**Figura xx.6:** Barra libre sometida a flexión. La misma se puede suponer como la superposición de dos barras empotradas como muestra la figura de la izquierda.<sup>7,8</sup> De este modo, la barra de la derecha, (B) de longitud  $2L$  y flecha  $2f$  se puede tratar con las mismas ecuaciones que la barra empotrada (A) de longitud  $L$  y flecha  $f$ .

donde introdujimos las variable  $k=\sin(\theta_0/2+\pi/4)$ . Aquí  $K(\alpha,k)$  es la integral elíptica incompleta de primera especie<sup>#</sup>.<sup>3</sup> Este relación es útil ya que establece una relación implícita de  $\theta_0$  como función de  $L$ ,  $\lambda$  y  $F$ . Combinando la expresión (aa.33) con la relación  $dz/dS=\cos\theta$  tenemos:

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{d\theta}{dz} \cdot \frac{dz}{dS} = \lambda^2 \cdot u_0 - \lambda^2 \cdot z(x) \quad (\text{aa41})$$

por lo tanto:

$$u(\theta) = u_0 - z(\theta) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta} . \quad (\text{aa42})$$

Es interesante notar que esta ecuación satisface las condiciones de borde: para  $z=0$ ,  $\theta=0$  y para  $z=u_0$ ,  $\theta=\theta_0$ . También tenemos la relación:  $u_0^2 \cdot \lambda^2 = \sin\theta_0$ . La otra ecuación paramétrica de  $x=x(\theta)$  se puede obtener de las relaciones  $dx/dz=\tan\theta$  y derivada de (aa42) respecto de  $\theta$ .

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{-\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} . \quad (\text{aa43})$$

Integrando esta ecuación obtenemos:

$$x(\theta) = -\frac{1}{2\lambda} \cdot \int_{-\pi/2}^{\theta} \frac{\sin\phi \cdot dt}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin t}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \{2E(k,\phi) - K(k,\phi)\}, \quad (\text{aa44})$$

donde introdujimos las variable  $k=\sin(\theta_0/2+\pi/4)$  y  $\sin\phi=\sin(\theta/2+\pi/4)/\sin(\theta_0/2+\pi/4)$ . Las funciones  $K(k,\phi)$  y  $E(k,\phi)$  son las integrales elípticas incompletas de primera y segunda especie<sup>3</sup> respectivamente. Las expresiones (aa42) y (aa44) son las ecuaciones paramétricas de la elástica. La ecuación (aa40) nos permite encontrar el ángulo  $\theta_0$  en función de  $L$ . Finalmente la flecha  $f$  se puede encontrar a partir de la expresión (aa44), haciendo  $x(\theta_0)$ , o sea:

---

<sup>#</sup> La integrales elípticas incompletas de primera especie se definen como:

$$K(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} \text{ y las La integrales elípticas incompletas de segunda especie se}$$

definen como:  $E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} \cdot dt$ . Las correspondientes integrales elípticas completas

se obtienen para el caso particular en que  $\phi=\pi/2$ . Estas funciones no puede expresarse en términos de funciones elementales. Para su cálculo es necesario realizar la integración numéricamente. Ver apéndice A.

$$f = x(\theta_0) = \frac{1}{2\lambda} \cdot \int_{\theta_0}^{-\pi/2} \frac{\sin t \cdot dt}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin t}} = \tag{aa45}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot [2 \cdot E(k, \pi/2) - K(k, \pi/2)]$$

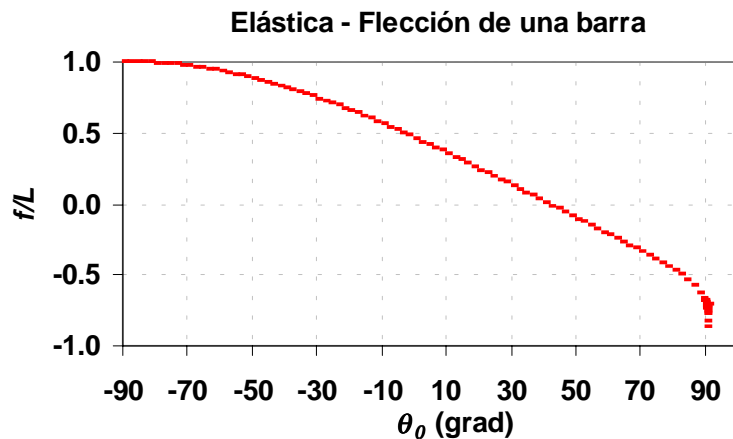
donde  $E(k, \pi/2)$  y  $K(k, \pi/2)$  son las integrales elípticas completas de segunda y primera especie respectivamente<sup>3</sup> y el parámetro  $k = \sin(\theta_0/2 + \pi/4)$ . En términos de estas funciones podemos escribir (aa40) como:

$$L = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{\lambda} K(k, \pi/2). \tag{aa46}$$

Finalmente, si tenemos una barra con dos extremos libre, la misma se puede suponer como la superposición de dos barras empotradas una invertida respecto de la otra como ilustra la figura xx.5. De este modo, las ecuaciones desarrolladas hasta aquí, para una barra empotrada de longitud  $L$  y flecha  $f$ , se pueden usar para describir una barra libre de longitud total  $2L$  y flecha  $2f$  entre sus extremos. Las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por la barra libre vendrán dada por las expresiones (aa42) y (aa44).<sup>7,8</sup> En la práctica, para describir analíticamente la forma de una barra de longitud  $2L$  y flecha  $2f$ , que por lo general son las magnitudes que fácilmente se pueden controlar y sirven de vínculos físicos del problema, se puede proceder de la siguiente manera:

- ✓ usamos las ecuaciones (aa45) y (aa46) para encontrar una relación matemática entre las variables  $f/L$  como función de  $\theta_0$ . Puede resultar útil generar un gráfico de  $f/L$  como función de  $\theta_0$ .

$$\frac{f}{L} = \left[ 2 \cdot \frac{E(k, \pi/2)}{K(k, \pi/2)} - 1 \right] \quad \text{con} \quad k = \sin(\theta_0/2 + \pi/4) \tag{aa47}$$



**Figura xx.7:** Gráfico de  $f/L$  como función del ángulo  $\theta_0$  según la relación universal (aa47)

- ✓ A partir del gráfico o la relación matemática (aa.47), obtenemos el valor de  $\theta_0$ , como función de los valores observados de  $f/L$ .

- ✓ Con el valor encontrado de  $\theta_0$ , utilizando las expresiones (aa42) y (aa44) podemos obtener la ecuación paramétrica de la forma de la elástica. Además podemos utilizar la expresión (aa45) para expresar  $\lambda = K(k, \pi/2)/L$ . De este modo obtenemos:

$$x(\theta) = \frac{L}{K(k, \pi/2)} \cdot \{2E(k, \phi) - K(k, \phi)\}, \quad (\text{aa48})$$

y

$$u(\theta) = u_0 - z(\theta) = \frac{L}{K(k, \pi/2)} \sqrt{2} \cdot \left[ \sqrt{\sin \theta_0} - \sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta} \right], \quad (\text{aa49})$$

que puede compararse con los valores medidos de  $x(z)$  para la elástica de una barra de longitud  $2L$  y flecha  $2f$ .

Es interesante notar que la relación  $f/L$  y la forma de una barra de una dada longitud  $L$  y un dado valor de  $f$  es universal, igual para todas las barras. Además hay un factor de escala universal, que relaciona la fuerza  $F$  con la rigidez de la barra dada por  $E.I$ , que se combinan para producir un dado valor de  $\lambda$ . según la expresión (aa36)

## Vibraciones transversales de una viga

Como vimos anteriormente, la ecuación de movimiento de una barra, para pequeñas amplitudes, viene dada por la Ec. (aa21). Mas específicamente, si la barra vibra en ausencia de roce o fricción, sin una fuerza impulsora, el movimiento de vibración libre viene dado por la ec.(aa21), con las condiciones de borde adecuadas para cada caso especial. Si la barra vibra, como es usual en un medio viscosa, aire, agua, etc. o debido a fuerzas de fricción internas del material, la ecuación de movimiento será:

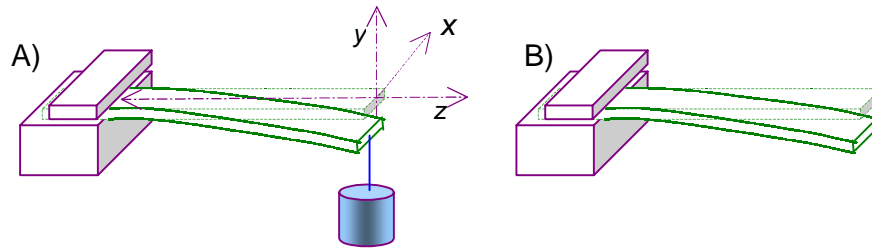
$$-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - b \frac{\partial y}{\partial t} \quad (\text{aa47})$$

y definiendo

$$c_0^2 = \frac{E \cdot I_x}{A \cdot \rho} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{b}{E \cdot I_x} \quad (\text{aa48})$$

la ecuación (aa47) se transforma en:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (\text{aa49})$$



**Figura xx7.** Barra de longitud  $L$ , soportada por una morsa y con el otro extremo libre. A la izquierda con una sobrecarga en su extremo y a la derecha sin sobrecarga y vibrando.

### Vibraciones forzadas de una barra

La ecuación de movimiento de una barra con vibración transversal, cuando existen fuerzas de fricción (internas del material o externas, p.ej. medio viscoso), caracterizada por un coeficiente de fricción  $b$  (por unidad de longitud) y además existe una fuerza impulsora  $F(z,t)$  por unidad de longitud (dirección  $z$ ), la ecuación de movimiento (aa46) o (aa47) de transforman en:

$$E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = F(z,t) \quad (\text{aa50})$$

### Barra empotrada con un extremo libre

Un caso de interés práctico es la forma que toma una barra de longitud  $L$  soportada por una morsa y de la que pende una sobrecarga  $m$  de su extremo como se ilustra en la Figura xx7.A). La función que describe la fuerza por unidad de longitud se puede escribir, usando la notación  $\delta(x)$  para describir la función delta de Dirac, como:  $F(z)=m \cdot g \cdot \delta(x-L)$ . Integrando la ecuación (aa50) obtenemos la forma de la curva que forma la barra viene dada por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{m \cdot g}{E \cdot I_x} \cdot (L - z) \quad (\text{aa51})$$

cuya solución es:

$$y(z) = -\left(\frac{m \cdot g}{2E \cdot I_x}\right) \cdot z^2 \left(L - \frac{z}{3}\right) \quad (\text{aa52})$$

Si la barra vibra sin sobrecarga (es decir con su extremo libre) la frecuencia de vibración se obtiene a partir de (14) con las condiciones de bordes  $(y(z=0)=0, \partial y / \partial z \Big|_{z=0} = 0,$

$\partial^2 y / \partial z^2 \Big|_{z=L} = 0$  y  $\partial^3 y / \partial z^3 \Big|_{z=L} = 0$ ), la frecuencia fundamental viene dada por la expresión siguiente expresión:<sup>6,9,10</sup>

$$f_1 = \frac{0.28}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_x}{A \cdot \rho}} = \frac{0.28}{L^2} \cdot c_0 \quad (\text{aa53})$$

### Vibraciones de una barra con ambos extremos libres

Similarmente, para una barra con sus dos extremos libres, la solución de (14) conduce a las siguientes frecuencia propias<sup>6,9,10</sup>:

$$f_1 = \frac{1.7908}{L^2} \cdot c_0 \quad \text{si } n=1 \quad (\text{aa54})$$

y

$$f_n = \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{L^2} \cdot c_0 \quad \text{si } n > 1 \quad (\text{aa55})$$

En presencia de roce o fricción, Ec. (aa49), las frecuencias se modifican ligeramente, si  $\omega_{0k}$  es la frecuencia natural sin roce (Ec. 18,19, 20) y las correspondientes frecuencias con roce son  $\omega_k$ , entonces:

$$\omega_k^2 = \omega_{0k}^2 + \delta^2 \quad \text{con} \quad \delta = \frac{I_x \cdot E}{2 \cdot A \cdot \rho} \cdot b = \frac{c_0^2}{2} \cdot b \quad (21)$$

en esta ecuación  $\delta$  representa el factor de atenuación que determina como la amplitud de oscilación decrece en el tiempo, o sea que para un dado punto de la barra, la oscilación en el tiempo puede escribirse como:

$$y(z_0, t) = B(z_0) \cdot \exp(-\delta \cdot t) \cdot \sin(\omega_k t + \varphi(z_0)), \quad (22)$$

aquí,  $z_0$  indica la coordenada de la barra en la que se observa la oscilación.

## Procedimientos y métodos

### Arreglo experimental

### Proyecto 1.- Medición del módulo de Young de alambres de cobre, acero, etc. por método de carga y descarga.

**Equipamiento recomendado:** Alambre de cobre esmaltado de espesores entre 0.20 a 0.35 mm. Un potenciómetro, un sensor de fuerzas y una sistema de adquisición de datos por computadora.



$$F = \frac{h}{H_0} \cdot F_m \quad \Delta l = \frac{1}{2} d \cdot \theta$$

**Figura xx8.** Alambre de longitud  $L$ , soportado por una barra vertical libre de rotar y ligada a un sensor de fuerza. La fuerza medida por el sensor de fuerza  $F_m$  se relaciona con la fuerza  $F$  que tracciona el alambre. Un potenciómetro mide el ángulo de rotación  $\theta$  de su eje, que suponemos tiene diámetro  $d$ . La fuerza  $F$  puede aplicarse colgando pesos del extremo del alambre.

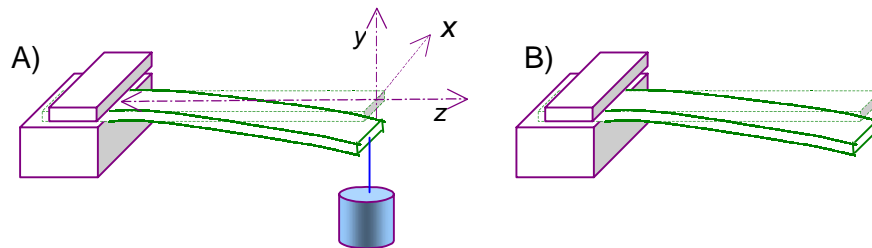
Hay muchos modos de realizar este experimento, una posible realización se ilustra en la figura xx.8. Esta realización es susceptible de implementarse usando un sistema de adquisición de datos asociado a una computadora. De este modo se puede medir  $\Delta l$  como función de la fuerza aplicada  $F$ . Como suponemos el diámetro del alambre  $\phi$  conocido (se puede medir directamente) como la longitud  $L$ , este dispositivo nos permite en principio estudiar la relación entre la deformación unitaria del alambre  $\varepsilon = \Delta l / L$  y el esfuerzo  $\sigma = F / (\pi \cdot \phi^2 / 4)$ .

- ✓ Usando el dispositivo experimental de su elección, estudie la relación entre  $\varepsilon$  como función del esfuerzo  $\sigma$  para varios diámetros  $\phi$  de alambres del mismo material. Para cada diámetro grafique  $\sigma$  para de  $\varepsilon$ . ¿Es posible graficar todos los alambre de mismo material en un mismo grafico de  $\sigma$  en función de  $\varepsilon$ ? ¿de ser este último el caso, que puede concluir de este estudio? ¿Es la relación entre  $\sigma$  y  $\varepsilon$  lineal?
- ✓ A partir de su estudio obtenga el valor de la pendiente del grafico de  $\sigma$  en función de  $\varepsilon$ . Como se compara el módulo de elasticidad  $E$  obtenido de su estudio con los valores conocidos para estos materiales.
- ✓ Para uno de sus alambres estudie la relación de  $\sigma$  en función de  $\varepsilon$  tratando el alambre sobrepase el limite de fluencia. Grafique la relación entre  $\sigma$  y  $\varepsilon$  para la carga y la

descarga del material. ¿Son la trayectoria de carga y descarga idénticas en este caso?  
¿Observa deformación permanente después de traccionar el material?

## Proyecto 2.- Medición del módulo de Young de barras por método estático- Deflexión de barras. Medición cargas y flecha.

**Equipamiento recomendado:** Barras de aluminio, bronce, hierro o acero de aproximadamente 1 m y sección transversal uniforme. Las dimensiones y forma pueden variar, pero secciones rectangulares de 12x2 mm pueden ser adecuadas. También barras de secciones circulares de diámetros de 8 a 15 mm pueden servir para este experimento. Una vez implementada la técnica, claramente la misma se puede usar para estudiar otras muestras de características similares a las sugeridas. Para este proyecto se requiere dos reglas milimetradas u opcionalmente un comparados micrométrico.



**Figura xx7.** Barra de longitud  $L$ , soportada por una morsa y con el otro extremo libre. A la izquierda con una sobrecarga en su extremo y a la derecha sin sobrecarga y vibrando.



### **Proyecto 3.- Medición del módulo de Young de barras por método estático- Deflexión de barras. Determinación de la forma mediante fotografías digitales cargas y flecha**

**Equipamiento recomendado** Barras de aluminio, bronce, hierro o acero de aproximadamente 1 m y sección transversal uniforme, similares a las usadas en el proyecto anterior y una cámara digital o webcam para obtener una imagen digitalizada de la barra.

### **Proyecto 4.- Medición del módulo de Young de barras por método dinámico- Deflexión de barras. Fotointerruptores.**

**Equipamiento recomendado:** Barras de aluminio, bronce, hierro o acero de aproximadamente 1 m y sección transversal uniforme, similares a las usadas en el proyecto anterior y un fotointerruptor conectado a una computadora.

### **Proyecto 5.- Medición del módulo de Young de barras y tubos por**

**Equipamiento recomendado:** Tubos huecos de bronce acero o aluminio de espesores entre 0.1 a 2 mm y de varia longitudes entre 10 a 90 cm. Un micrófono conectado a una computadora con tarjeta digitalizadora de sonido o bien y un micrófono conectado a un sistema de adquisición de datos por computadora.

**método dinámico. Sonido emitido por la muestra al ser golpeada.  
Grabación del sonido- Sound card.**

**Proyecto 6.- Determinación de la fuerza crítica de pandeo de una viga.**

**Equipamiento recomendado:** Alambre de cobre esmaltado de espesores entre 0.15 a 0.25 mm. Un potenciómetro, un sensor de fuerzas y una sistema de adquisición de datos por computadora.

**Proyecto 7.- Determinación de la forma de una barra para grandes curvaturas.**

**Equipamiento recomendado:** Barras de aluminio, bronce, o de plástico flexible de aproximadamente 50 cm a 90 cm y sección transversal uniforme. Lo importante es que estos barras o flejes se puedan doblar sin presentar deformaciones permanentes. Cámara digital o webcam para obtener una imagen digitalizada de la barra deformada. Si no se dispone de una cámara digital se puede usar un lápiz para registrar la forma de la barra deformada sobre un papel milimetrado.

## Referencias

1. S.P. Timoshenko, *History of strength of materials* (Dover, N.Y. 1983) pp.28-40.
2. P. A.A. Laura y M. J. Maurizi, *Introducción a la mecánica de los sólidos*, Eudeba, Buenos Aires 1979. pp. 249-256
3. M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables* (NBS 1964) pp. 591-592 ([www.convertit.com](http://www.convertit.com))
4. F.V. Warnock “*Strength of materials*” Sir Issac Pitman & Sons, London 1935
5. Nash, W.A.: “*Strength of Materials,*” Schaum’s outline series, 2nd edition, McGraw-Hill, INC, N.Y. 1998
6. Seto W.W.: “*Mechanical vibrations,*” Schaum’s outline series, McGraw-Hill, INC, N.Y. 1970. (Vibraciones Mecánicas – Mc Graw-Hill NY 1970 )
7. A. Valiente, “*An experiment in nonlinear beam theory*” Am. J. Phys. **72**, 1008 -1012 (2004).
8. Th. Hopfl, D. Sander, and J. Kirshner,, “*Demonstration of different bending profiles of a cantilever caused by a torque or a force*” Am. J. Phys. **68**, 1113 -1115 (2001).
9. *Introducción a la Teoría de las Vibraciones Mecánicas* - F. L. Babio y H.M. Cortés - Ed. Labor S.A. Barcelona 1970
10. *Matemáticas superiores para Ingenieros y Científicos – L.A. Pipes* - Mc Graw-Hill NY 1970
11. *A Student Project on Wind Chimes* – G.W. Baxter and K.M. Hagenbuch – Phys. Teach. **36**, 204 (1998) y Phys. Teach. **36**, 209 (1998)
12. *Manual del Ingeniero* - Hütte - Ed. Gustavo Gili S.A. Barcelona 1980
13. *Handbook of Chemistry and Physics* – CRC - Lide, D.R. (Ed.) - Springer - 80th ed. 1999
14. *Manual de Física Elemental* – N.I. Koshkin y M.G. Shirkévich – MIR Moscú 1975

## Experimentos:

1. Medición del módulo de Young de alambres de cu, al, etc. por método de carga y descarga.
2. Medición del módulo de Young de barras por método estático- Deflexión de barras. Medición cargas y flecha
3. Medición del módulo de Young de barras por método estático- Deflexión de barras. Determinación de la forma mediante fotografías digitales cargas y flecha
4. Medición del módulo de Young de barras por método dinámico- Deflexión de barras. Fotointerruptores.
5. Medición del módulo de Young de barras y tubos por método dinámico. Sonido emitido por la muestra al ser golpeada. Grabación del sonido- Sound card.

6. Determinación de la fuerza crítica de pandeo de una viga.