# NÚMEROS COMPLEJOS

## 1. *La unidad imaginaria*

Es el número denotado por $j$, tal que:

$$j^2 = -1 \quad ....(1.1)$$

**Nota**. En los cursos de matemática se usa el símbolo **i** para denotar la unidad imaginaria; pero, en los cursos aplicados a electrónica se usa el símbolo $j$ y se reserva **i** para la intensidad de corriente.

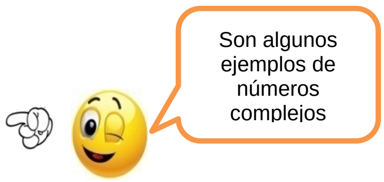
## 2. *Número Complejo*.

Es una combinación de la unidad imaginaria con dos números reales: x e y. Se denota, generalmente, por $z$ y es de la forma:

$$\mathbf{z} = x + yj \ldots \quad (2.1)$$

Ej.

1) $z = 3 + 2j$
2) $z = -3 + 4j$
3) $z = 5j$

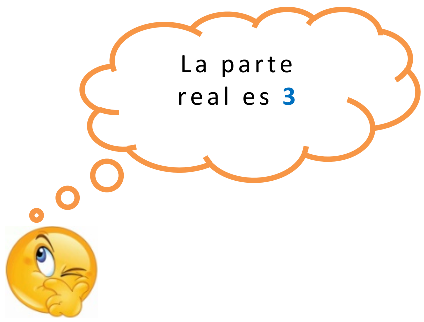


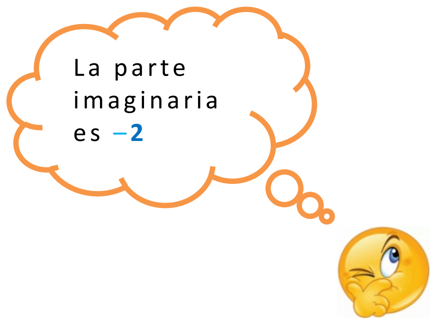

## 3. *Partes de un número complejo*

En (2.1) la *parte real* de $z$ es $x$, la *parte imaginaria* es $y$. En símbolos:

$$\mathrm{Re}\{\mathbf{z}\} = x, \quad \mathrm{Im}\{\mathbf{z}\} = y \ldots \quad (3.1)$$

Ej. En $z = \mathbf{3} - \mathbf{2}j$ se tiene: $\mathrm{Re}\{\mathbf{z}\} = 3$ e $\mathrm{Im}\{\mathbf{z}\} = -2$



**Nota**. Si $y = 0$, entonces $z$ se identifica con el número real $x$:

$$z = x + 0j = x.$$

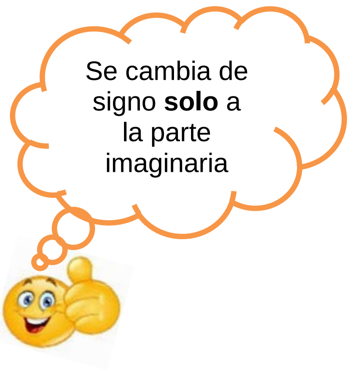
Viceversa, todo número real x se puede escribir como el complejo $x + 0j$, esto es $x = x + 0j$.

Si $x = 0$ entonces el complejo $z = 0 + yj$ se denomina imaginario puro, y se escribe $z = yj$

## 4. *Conjugado*

El conjugado de (2.1) se denota por $\bar{z}$ y se define por:

$$\bar{z} = x - yj \ldots \quad (4.1)$$




Ej.

1. Si $z = 4 + 5j$, entonces $\bar{z} = 4 - 5j$
2. Si $z = 3 - 2j$, entonces $\bar{z} = 3 + 2j$
3. Si $z = -4j$, entonces $\bar{z} = 4j$

## 5. *Operaciones*

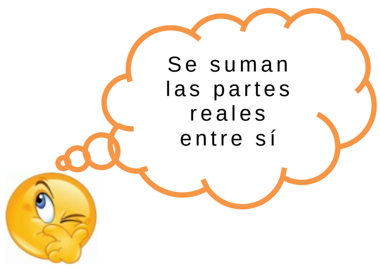
5.1 ***Suma***. Sean $z_1 = x_1 + y_1j$ y $z_2 = x_2 + y_2j$

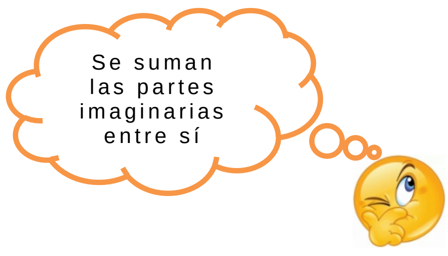
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)j$$

Ejs.

1) $z_1 = 4 + 5j$; $z_2 = 3 - 2j$, entonces:

$$z_1 + z_2 = (4+3) + (5-2)j = 7 + 3j$$




2) $3 + 2j - 5 + j + 1 - 5j = -1 - 2j$

La resta es similar, pero se tiene en cuenta la regla de los signos para las operaciones respectivas.

Ejs.

3) $(4 + 5j) - (3 - 2j) = 4 + 5j - 3 + 2j = 1 + 7j$
4) $(3 + 2j) - (5 - j) = 3 + 2j - 5 + j = -2 + 3j$

5.2 ***Producto por un número real***. Si $\mathbf{z} = x + yj$ y $\boldsymbol{r}$ es un número real, entonces:

$$\boldsymbol{r}\mathbf{z} = \boldsymbol{r}x + \boldsymbol{r}yj$$

Ej. $3(3 - 2j)=9-6j$

Ambas operaciones se pueden combinar:

Ej.

$$3(3 - 2j)+ 2(4 + 5j)-2j= \mathbf{17+2}j$$

En la parte real: $3x3+ 2x4=\mathbf{17}$

En la parte imag: $3(-2)+2x5-2=\mathbf{2}$

5.3 ***Producto de complejos***. $z_1 = x_1 + y_1j$ y $z_2 = x_2 + y_2j$

$z_1z_2 = (x_1 + y_1j)(x_2 + y_2j)=( x_1x_2- y_1y_2)+( x_1y_2+ x_2y_1)j$

Ejs.

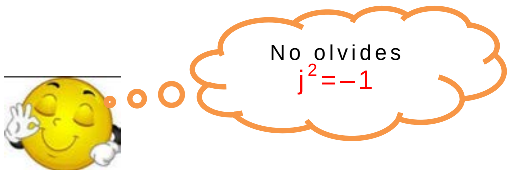
1. $(3 - 2j)(4 + 5j)=\mathbf{22+7}j$

   En la parte real: $3x4-(-2)x5=\mathbf{22}$

   En la parte imag: $(-2)x4+3x5=\mathbf{7}$

El producto se puede efectuar aplicando la ley distributiva, como se ve en el siguiente ejemplo.

2. $(3 - 2j)(5 +3j) = 15 +9j -10j -6j^2 = 15 - j -6(-1) = 21- j$




Las identidades como, por ejemplo, la diferencia de cuadrados o el binomio de Newton, también valen para complejos.

Ej.

1. $(3 - 2j)^2=3^2-2(3)(2j)+(2j)^2$
   $=9-12j+4j^2$
   $=9-12j+4(-1)$
   $=5-12j$

2. $(4 + 5j)^2= 4^2-2(4)(5j)+(5j)^2 =-9+40j$

Para un complejo $z = x + yj$, se tiene una propiedad notable:

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \ldots \quad (5.1)$$

Ej.

1. $(3 + 2j)(3 - 2j) = 3^2 + 2^2 = 13$
2. $(5 + j)(5 - j) = 5^2 + 1^2 = 26$

**Potencias de *j*:**

$$j^0 = 1,\quad j^1 = j,\quad j^2 = -1,\quad j^3 = -j$$

$$j^4 = 1,\quad j^5 = j,\quad j^6 = -1,\quad j^7 = -j\ldots \quad \text{etc.}$$

En general: $j^{(4n + r)} = j^r \ldots (5.2)$

Ej.

$$j^{26} = j^{4x6 + 2} = j^2 = -1$$

Si n es un entero positivo se tiene:

$$j^{-n} = \frac{1}{j^n} \ldots (5.3)$$

### 5.4 *División de complejos*

La división se realiza con el apoyo de la identidad (5.1).

Ej. $\frac{1+2j}{2\text{-}3j} = \frac{1+2j}{2\text{-}3j} \times \frac{2+3j}{2+3j} = \frac{2+3j+4j+6j^2}{4-9j^2} = \frac{2+7j+6(-1)}{4-9(-1)} = \frac{-4+7j}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13}j$

Nótese que se multiplican, simultáneamente, el numerador y el denominador por la conjugada del denominador, luego se realizan las operaciones correspondientes.

### 5.5 *Potenciación*

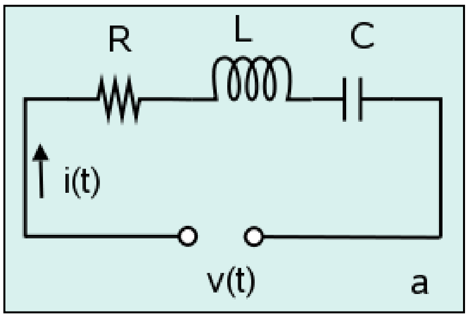
Las potencias se calculan usando el binomio de Newton.

Ejs.

5. $(2 + 4j)^2 = 2^2 + 2(2)(4j) + 16j^2 = 4 + 8j + 16(-1) = -12 + 8j$
6. $(1-j)^3 = 1^3 - 3(1^2)j + 3(1)j^2 - j^3 = 1 - 3j - 3 + j = -2 - 2j$

## 6. *Algunas aplicaciones a la electricidad.*

Para un circuito RLC:



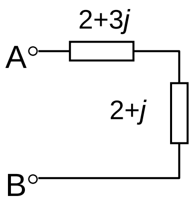

La impedancia Z tiene un valor de

$$Z = R – (X_L – X_C)j$$

se pueden dar los siguientes casos:
$X_L > X_C$: circuito inductivo.
$X_L < X_C$: circuito capacitivo.
$X_L = X_C$: circuito resistivo.

Ej. Calcular la impedancia equivalente en los siguientes circuitos (las resistencias se miden en ohms):

a)

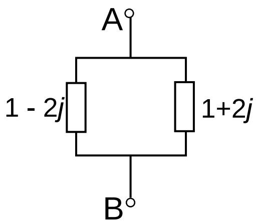



Sol.

Puesto que las impedancias están en serie, la impedancia equivalente es la suma de las impedancias dadas:

$$Z_{eq} = (2 + 3j) + (2 + j) = 4 + 4j$$

b)




Sol.

Puesto que las impedancias están en paralelo, la impedancia equivalente es:

$$Z_{eq} = \frac{(1–2j)(1+2j)}{1–2j+ 1+2j} = \frac{1+4}{2} = 2,5$$

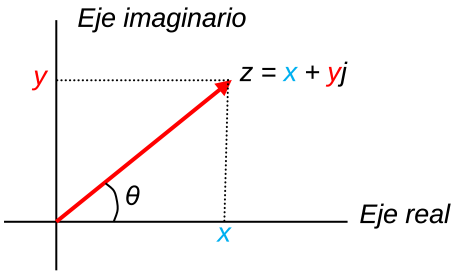
## 7. *Conjugada de las operaciones*

7.1 $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ 7.2 $\overline{(z_1\, z_2)} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$

7.3 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ 7.4 $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

## 8. *Representación en el plano comlejo.*

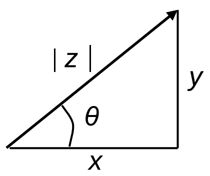
Los números complejos se pueden graficar en el llamado plano complejo, tal como se muestra:




La flecha representa, gráficamente, al complejo *z*.

## 9. *Módulo*

La longitud de la flecha del gráfico anterior se puede calcular por el teorema de Pitágoras, esta longitud se denomina *módulo* de *z* y se representa por | *z* |.




$$|\, z\, | = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \ldots(9.1)$$

Ej. |3+4j| = $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

**Nota**. Por la identidad (5.1) podemos escribir:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad \ldots(10.2)$$

- También se cumple: $|z| = |\bar{z}|$ ...(10.3)

## 10. *Argumento*

El ángulo $\theta$ se denomina *argumento* y se calcula mediante:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0 \ldots \ (11.4)$$

**Nota**. En la calculadora esta función sólo da ángulos en el primer y cuarto cuadrante. Para el segundo y tercero hay que sumar $\pi$ (o 180º, según el sistema que se emplee) al ángulo dado por la calculadora.

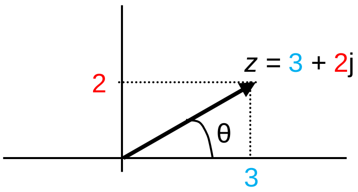
Para $x$ = 0, $\theta$ es $\pi/2$ si y > 0 o $-\pi/2$, si y < 0

Ej. Determinar el argumento de los siguientes complejos:

a) z= 3 +2j  b) z= –3 + 5j

Sol.

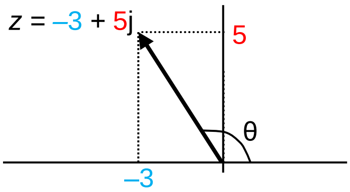
a) Este complejo está en el primer cuadrante, luego su argumento se calcula directamente:




$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}69º$$

b) Este complejo está en el segundo cuadrante, luego, para calcular su argumento se procede de acuerdo a la nota correspondiente a 11.4

c)



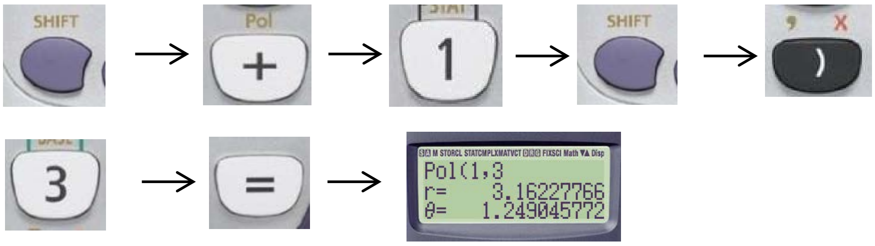

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{-3}\right) + 180º = 120{,}96º$$

Empleando la calculadora se puede calcular directamente el módulo y el argumento del complejo:

Ej. Calcular módulo y argumento de z= 1+3j

Sol.

Programamos la calculadora en modo “pol”:




Tenemos, simultáneamente:

el *módulo* r =3, 1623

y el *argumento θ* =1,2490 rad<> 71,565º

**11.** *Formas:*
*Trigonométrica*
*Fasorial*
*Exponencial.*

¿Cómo se expresa un complejo en su *forma trigonométrica o polar*?

En el triángulo (9.1) podemos establecer las siguientes relaciones trigonométricas:

$$x = |z|\cos\theta \ldots (a),$$
$$y = |z|\operatorname{sen}\theta \ldots (b)$$

Reemplazando (a) y (b) en (2.1), y factorizando | *z* | se tiene:

$$z = |z|(\cos\theta + j\ \operatorname{sen}\theta) \ldots \ (11.1)$$

Esta forma se denomina *forma trigonométrica* de *z*.

Ej. Expresar los siguientes complejos en su forma trigonométrica

a) z= 3 +2j          b) z= –3 + 5j

Sol.

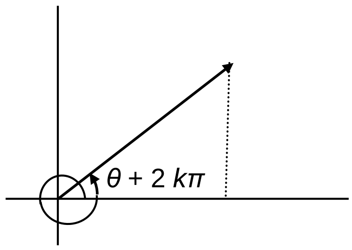
a) $|z| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ ; θ = 33,69º

$z = \sqrt{13}(\cos 33.69º + \operatorname{sen} 33,69º\ j)$

b) $|z| = \sqrt{(-3)^2+5^2} = \sqrt{34}$ ; θ = 120,96º

$z = \sqrt{34}(\cos 120,96º + \operatorname{sen} 120,96º\ j)$

**Nota**. Puesto que $\theta + 2k\pi$ es coterminal con $\theta$ para todo k entero ($k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Convendremos en llamarle *argumento* de $z$ al ángulo $\theta + 2k\pi$, para un $k$ fijo:




$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \text{ fijo.}$$

El valor del argumento que pertenece al intervalo $[-\pi, \pi\rangle$ se denomina *argumento principal*, se denota por $\mathrm{Arg}(z)$ y se cumple:

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \quad \ldots (11.2)$$

- La expresión $\cos\theta + \mathrm{sen}\theta j$ se puede escribir, abreviadamente, como *cis*$\theta$, luego (11.1) se puede escribir, también, como:

$$z = |z|\,cis\theta \ldots (11.3)$$

- Otra forma abreviada de escribir (11.1) es la *forma fasorial*:

$$z = |z| \angle \theta \quad \ldots (11.4)$$

Ej.

a) $z = 3 + 2j = \sqrt{13}\angle 33.69^o$

b) $z = -3 + 5j = \sqrt{34}\angle 120{,}96^o$

*La identidad de Euler*

Euler demostró la siguiente identidad, para $\theta$ en **radianes**:

$$e^{\theta j} = \cos\theta + \mathrm{sen}\theta\, j \quad \ldots (11.5)$$

Dejamos en claro que esta no es una escritura abreviada, como las anteriores, sino una identidad ($e^{\theta j}$, también se denomina fasor).

Esta identidad permite reescribir (11.1) como:

$$z = |z|\, e^{\theta j} \ldots (11.6)$$

Esta última se denomina la *forma exponencial* de z.

Ej.

a) $z = 3 + 2j = \sqrt{13}\, e^{0,59}$ (33.69º < > 0,59 rad)

b) $z = -3 + 5j = \sqrt{34} e^{2,11}$ (120,96º < > 2,11rad)

De acuerdo con (12.1) es fácil demostrar que $e^{\theta j}$ tiene propiedades similares a las potencias de números reales.

11.7 $e^{\theta_1 j}\, e^{\theta_2 j} = e^{\theta_1 j+\theta_2 j} = e^{(\theta_1+\theta_2)j}$

11.8 $\dfrac{e^{\theta_1 j}}{e^{\theta_2 j}} = e^{\theta_1 j-\theta_2 j} = e^{(\theta_1-\theta_2)j}$

11.9 $\left(e^{\theta j}\right)^n = e^{n\theta j}$

11.10 $e^{-\theta j} = \dfrac{1}{e^{\theta j}}$

11.11 Una propiedad fundamental de $e^{\theta j}$ es su carácter periódico, con un periodo igual a $2\pi j$:

$$e^{(\theta+2\pi)j} = e^{\theta j} \quad \dots (11.12)$$

En general, para $k$ entero, se tiene:

$$e^{(\theta+2k\pi)j} = e^{\theta j} \quad \dots (11.13)$$

11.14 El módulo de $e^{\theta j}$ es igual a 1 para cualquier $\theta$: $|e^{\theta j}| = 1$

**Nota**. La propiedad 11.9 facilita el cálculo de potencias de un complejo.

Ej. Si $z = e^{6j}$ entonces $z^3 = (e^{2j})^3 = e^{6j}$

*Argumento y módulo del producto y división de complejos.*

Si $z = |z|e^{\theta j}$, $w = |w|e^{\varphi j}$, multiplicando y dividiendo estos complejos se tiene:

$$zw = |z|e^{\theta j}\ |w|e^{\varphi j} = |z||w|\ e^{(\theta+\varphi)j} \quad \dots\dots (*)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|e^{\theta j}}{|w|e^{\varphi j}} = \frac{|z|}{|w|}e^{(\theta-\varphi)j} \quad \dots\dots (**)$$

De (*):

11.15 $\arg(zw) = \theta + \varphi = \arg(z) + \arg(w)$

El argumento de un producto se obtiene sumando los argumentos de los factores.

11.16 $|zw| = |z||w||e^{(\theta+\varphi)j}| = |z||w|$

El módulo de un producto se obtiene multiplicando los módulos de los factores

De (**):

a. $\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$.

El argumento de un cociente se obtiene restando los argumentos de los términos de la división.

11.17 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\left|e^{(\theta-\varphi)j}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

El módulo de un cociente se obtiene dividiendo los módulos de los términos de la división

Ej. Sean $z = 3e^{(\pi/2)j}$, $w = 2e^{\pi j}$ entonces:

$$zw = (3e^{(\pi/2)j})(2e^{\pi j}) = 6e^{(\pi/2+\pi)j} = 6e^{(3\pi/2)j}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3e^{\frac{\pi}{2}j}}{2e^{\pi j}} = 1{,}5e^{\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)j} = 1{,}5e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)j}$$

**Nota**. En estos ejemplos se nota que la forma exponencial facilita el cálculo de productos y cocientes y potencias; pero no así para sumas y restas.

## 12. *La identidad de Moivre*

Si expresamos 11.9 en forma polar se tiene:

$$(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta j)^n = \cos(n\theta)+\operatorname{sen}(n\theta)j$$

que se denomina identidad de *Moivre.*

## 13. *Raíz n-ésima*

El cálculo de la raíz $n$ – ésima de un complejo se facilita si empleamos la forma exponencial acompañada de la propiedad 11.13.

Sea $z = |z|e^{\theta j}$, se tiene:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|e^{\theta j}}=\sqrt[n]{|z|e^{(\theta+2k\pi)j}}=\sqrt[n]{|z|}e^{\frac{(\theta+2k\pi)}{n}j}$$

$$k = 0;\ 1;\ 2;\ldots;\ n-1 \qquad (13.1)$$

**Nota**. Para cada valor de k se obtienen raíces diferentes, esto es, una raíz n– ésima compleja tiene n raíces diferentes.

Ej. Calcular las tres raíces cúbicas de la unidad.

Sol.

Sea z = 1, expresamos el complejo en forma exponencial: $z = e^{0j}$

Luego,

$$\sqrt[3]{z}=e^{\frac{(0+2k\pi)}{3}j} \qquad k = 0;\ 1;\ 2.$$

Para k= 0: $z_1 = e^{\frac{(0+2(0)\pi)}{3}j} = e^{0j} = 1 = 1+0j$

Para k= 1: $z_2 = e^{\frac{(0+2(1)\pi)}{3}j} = e^{\frac{2\pi}{3}j} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Para k= 2: $z_3 = e^{\frac{(0+2(2)\pi)}{3}j} = e^{\frac{4\pi}{3}j} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) j = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Si cada complejo $z_1$, $z_2$ y $z_3$ lo elevamos al cubo se obtiene la unidad, esto es: $(1+0j)^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1.$

## 14. *Funciones de variable compleja.*

Es una función con dominio y rango en los complejos.

Ej. $f(z) = z^2$ es una función de variable compleja.

La variable $z$ representa un número complejo. Así, si $z = 2 + j$, para nuestro ejemplo se tiene:

$$f(2 + j) = (2 + j)^2 = 4 + 4j + j^2 = 3 + 4j.$$

A cada valor de $z$ le corresponde un único valor para $f$, estas funciones se denominan univaluadas o simplemente valuadas

A diferencia de las funciones de variable real -que asigna un solo valor a la variable dependiente por cada valor de la independiente- las de variable compleja pueden asignar más de un valor a la variable dependiente para un valor de la independiente.

Ej.

La función $f(z) = \sqrt[3]{z}$ le asigna tres raíces a cada valor de z. Así, en el ejemplo desarrollado en 17 vimos que a z= 1 le corresponden tres raíces: 1; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Las funciones como las de este ejemplo se denominan *multivaluadas*.

14.1 ¿Qué es una función *polinómica*?

Es una función de la forma

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

- Si $n = 0$, $f(z)$ se denomina *constante*.
- Si $n = 1$, $f(z)$ se denomina *lineal*.
- Si $n = 2$, $f(z)$ se denomina *cuadrática*.
- Si $n = 3$, $f(z)$ se denomina *cúbica*.

- Si $P(z) = (z - z_0)^n P_1(z)$, entonces $z_0$ se denomina un *cero de orden n*, siempre que $P_1(z_0) \neq 0$. Si $n = 1$, $z_0$ es un *cero simple*.

Ej.

Los ceros de la función $f(z) = z^3 + 4z$, se obtienen igualándola a cero y resolviendo la ecuación correspondiente.

$$z^3 + 4z = z(z + j)(z - j) = 0$$

Luego los ceros son: 0; j y –j.

14.2 ¿Qué es una función *racional*?

Si $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios, se define la función racional como:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Los ceros de $Q(z)$, que no son ceros de $P(z)$, se denominan *polos* de *f*.

Ej. Determinar los ceros y polos de $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + zj}$
Sol.

i) Cálculo de los ceros: $z^2 - 1 = 0 \rightarrow z = \pm 1$.

ii) Cálculo de los polos: $z^2 + zj = 0 \rightarrow z(z + j) = 0 \rightarrow z = 0; -j$.

14.3 ¿Cómo se define la función *exponencial* compleja?

Es la función definida por.

Para $z = x + yj$ se tiene:

$$e^z = e^{x+y\,j} = e^x e^{yj} = e^x\,(\cos y + \operatorname{sen} y\; j)$$

De esta relación se deducen las siguientes propiedades:

14.3.1 $|e^z| = e^x$; $\arg(z) = y$
14.3.2 $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
14.3.3 $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

Ej. Evaluar $f(z) = e^z$ para $z = 2 + 3j$

Sol.

$$\begin{aligned} f(2 + 3j) &= e^{2+3j} = e^2(\cos 3 + \operatorname{sen} 3\; j) \\ &= e^2 \cos 3 + e^2 \operatorname{sen} 3\; j \\ &= -7{,}32 + 1{,}04j \end{aligned}$$

**Nota**. El cálculo de seno y coseno ha sido realizado en radianes.

14.4 ¿Cómo se define la función *logaritmo neperiano* compleja?

Se define como:

$$\ln(z) = \ln(|z|e^{arg(z)\,j}) = \ln|z| + \ln e^{arg(z)\,j} = \ln|z| + arg(z)\,j$$

**Nota**. $f(z) = \ln(z)$ no está definida para $z = 0$

Propiedades:

14.4.1 $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$
14.4.2 $\ln(z^{z_1}) = z_1 \ln(z)$
14.4.3 $\ln(z_1 / z_2) = \ln(z_1) - \ln(z_2)$

Para $z = |z|e^{arg(z)\,j} \neq 0$, se tiene:

$$\ln(z) = \ln|z| + (Arg(z) + 2k\pi)\,j$$

Cada valor de $k$ origina una *rama* de ln.

Ej. $\ln(2 - j) = \ln\sqrt{5} + \arctan(-1/2)j$ ( considerando k = 0)
$= 0{,}805 - 0{,}464j$

14.5 ¿Cómo se define la función *seno* compleja?

Se define como:

$$\text{sen}(z) = \frac{e^{zj} - e^{-zj}}{2j},$$

Ej. Calcular sen(j).

Sol.

$$\text{sen}(j) = \frac{e^{jj} - e^{-jj}}{2j} = \frac{e^{-1} - e}{2j} = -\frac{e - e^{-1}}{2}j = -1{,}175j$$

14.5 ¿Cómo se define la función *coseno* compleja?

Se define como:

$$\cos\theta = \frac{e^{\theta j} + e^{-\theta j}}{2},$$

Ej. Calcular cos(j).

Sol.

$$\cos(j) = \frac{e^{jj} + e^{-jj}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = 1{,}543$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Efectuar las siguientes operaciones:

1. $2 + 3j + 5 - 6j - 3(-1 - j)$

2. $(1 + 3j)(2 + j) - \dfrac{j}{3+4j}$

3. $\dfrac{(2+j)(3-2j)}{(2+j)+(3-2j)}$

4. $j^{526} + 2j^{-227}$

5. $j^{405} - 3j^{646} + 4j^{357}$

6. $(1 - j)^2 + (1 - \ \ 3j)^3$

7. $(\overline{1 + j})^6 - 2(1 - j)^{-6}$

8. $(2+5j)^3(2 - j)^5$

9. $(-1+3j)^4:(-1-j)^3$ 10. $\sqrt{3 - 4j}$

11. $\sqrt[3]{-1}$ 12. $\sqrt[3]{(2+j)^2}$

II. Expresar en forma polar, fasorial y exponencial, los siguientes complejos:

1. $2 + 5j$ 2. $2 - j$ 3. $-1 + 3j$ 4. $-1 - j$

III. Efectuar:

1. $\dfrac{6e^{\frac{\pi}{2}j}\left(e^{\frac{3\pi}{4}j}\right)^8}{2e^{\frac{\pi}{6}j}}$ 2. $(2\angle 30^\circ)^3(3\angle 10^\circ)^{-3}$

3. $\dfrac{(3\angle 45^\circ)^2(1-j)}{2e^{\frac{\pi}{3}j}}$ 4. $\dfrac{(4\angle 35^\circ)(3\angle 20^\circ)}{(6\angle 25^\circ)}$

IV. Resolver:

1. $3z + 5 - 2j = z + j$ 2. $e^{\theta j} = 1$

3. $e^{\theta j} = -1$ 4. $jz + 3 - 2z = z + 4j$

5. $z^2 + z + 1 = 0$ 6. $z^2 + 4 = 0$

7. $z^2 + 4 = 3j$ 8. $z^3 = j$

9. $z^3 - 2j = j + 1$ 10. $z^3 + z = 0$

V. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

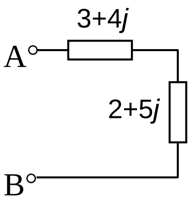
1. $\begin{aligned} 2z + 4w &= 10 - 2j \\ -z + 2w &= 3 + 5j \end{aligned}$

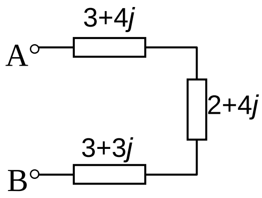
2. $\begin{aligned} 3z + jw &= 1 \\ (2+j)z - 2w &= -3 - 5j \end{aligned}$

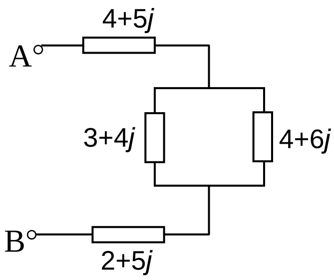
3. $\begin{aligned} jz - 2w &= -3 - 2j \\ -z + 3w &= 3 + 2j \end{aligned}$

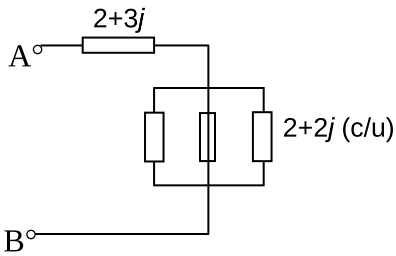
4. $\begin{aligned} 2z + jw &= 7 + 2j \\ (1+j)z - 2w &= -1 + 5j \end{aligned}$

VI. Calcular la impedancia equivalente en los siguientes circuitos (las resistencias se miden en ohms):

1. 


2. 


3. 


4. 


VII. Determinar las partes real e imaginaria de:

1. $\dfrac{1}{1+nj}$

2. $\dfrac{n}{2+nj}$

3. $\dfrac{nj}{1-nj}$

4. $\dfrac{n(-1)^n}{n-(-1)^n j}$

5. $\dfrac{(-1)^n + nj}{1+n-nj}$

6. $\dfrac{(-1)^n - 1}{1+nj}$

VIII. Calcular:

1. $e^{2-3j}$

2. $e^{2-\pi j}$

3. $\ln(-j)$

4. $\ln(1-j)$

5. $\operatorname{sen}(j)$

6. $\cos(1+j)$

7. $\operatorname{sen}(j^j)$

8. $\cos(j) + \operatorname{sen}(-j)$

9. $\ln(2+3j)^{2j} + \cos^2(1-j)$

10. $\sqrt[3]{\ln(j)}$ + senh(1+ $j$ + $j^2$ + $j^3$)

Los logaritmos se calculan para $k$=0.

X. Definir las funciones trigonométricas: sec$z$, csc$z$, tan$z$, cot$z$.

XI. Demuestre que:

1. sen (– $z$) = sen $z$

2. cos (– $z$) = cos $z$

3. $\text{sen}^2\, z + \cos^2 z = 1$

4. $e^{zj} = \cos z + j \text{ sen } z$

5. $e^{-zj} = \cos z - j \text{ sen } z$

6. $\text{sen}(z_1+z_2) = \text{sen } z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \text{sen } z_2$

7. $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \text{sen } z_1 \text{sen } z_2$

XII. Resolver:

1. sen $z$ = 0 2. cos $z$ = 0

3. sen $z$ = 1 4. cos $z$ = 1

XIII. Hallar las partes real e imaginaria de las siguientes funciones, para $z = x + yj$

1. $f(z) = z^{-1}$ 2. $f(z) = z^2$

3. $f(z) = jz + z^2$ 4. $f(z) = ze^z$

5. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ 6. $f(z) = \dfrac{z}{1+z}$

Aplicaciones.

Corrientes trifásicas

http://profe-alexz.blogspot.pe/2011/12/circuitos-trifasicos-teoria-y.html

file:///C:/Users/Instructor/Downloads/1772694154.Problemas%20resueltos%20trifasica%20(2).pdf

http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Trif%C3%A1sica.pdf

http://www.fceia.unr.edu.ar/tci/utiles/Apuntes/Cap%2010-2013%20TRIF.pdf

file:///C:/Users/Instructor/Downloads/Dialnet-EjerciciosResueltosYExplicadosDeCircuitosMonofasic-467052.pdf

Circuitos con impedancias

https://www.fing.edu.uy/if/cursos/fis2/Extras/ca.pdf

http://es.wikihow.com/calcular-la-impedancia

http://www.sapiensman.com/electrotecnia/problemas23.htm

http://www.monografias.com/trabajos105/impedancia-y-admitancia/impedancia-y-admitancia.shtml

http://www.proyecto987.es/corriente_alterna_10.html