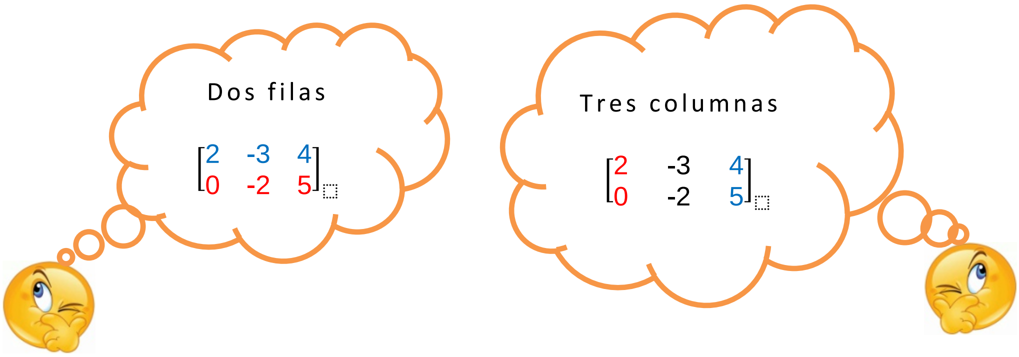
MATRICES

1. *Concepto de Matriz*

Una *matriz* de orden $n \times m$ es un arreglo rectangular de números en n filas y m columnas. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2x3} ,$$

es una matriz que tiene dos filas (líneas horizontales) y tres columnas (líneas verticales), por lo tanto es de orden 2x3.



2. *Elemento de una matriz*

Es cada número que conforma la matriz, se designa por a_{ij} donde i designa la fila y j la columna donde se encuentra ubicado el elemento.

Ej.

1. a_{23} es el elemento que se ubica en la segunda fila y en la tercera columna, luego $a_{23}=5$.

2. a_{12} es el elemento que se ubica en la primera fila y en la segunda columna, luego $a_{12}=-3$.

3. *Represen-tación.*

Una matriz de orden nxm se puede representar, en forma general, de la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

En forma abreviada:

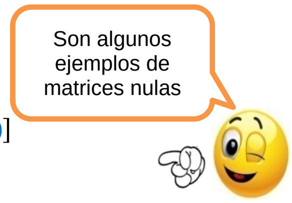
$$M = [a_{ij}]_{n\times m},$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\dots,n\ ;\quad j=1,\ 2,\ 3,\dots,m$$

4. *Matriz nula*

Es la matriz $M = [a_{ij}]_{n\times m}$, tal que $a_{ij} = 0\ \forall\ i,\ j$. Más fácil, es la matriz *cuyos elementos*, todos, *son ceros*.

Ejs.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *Matriz cuadrada*

Es la matriz $M = [a_{ij}]_{n\times m}$, tal que $n = m$. Dicho de otra manera: tiene el mismo número de filas que columnas. El orden se abrevia escribiendo:

$$M = [a_{ij}]_n.$$

Ej.

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_2$ es una matriz cuadrada de orden 2x2.

   Brevemente diremos que es de orden 2

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3$ es una matriz cuadrada de orden 3.

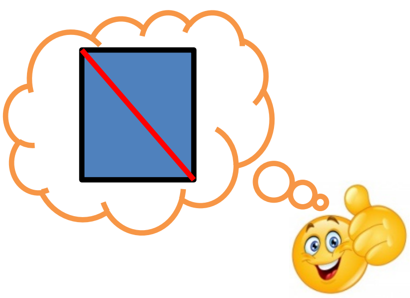
6. *Diagonal de una matriz*

Sea A una matriz cuadrada de orden n, su diagonal es el conjunto $D = \{a_{ij}\ /\ i = j\} = \{a_{11};\ a_{22};\ a_{33};\dots;\ a_{nn}\}$

Ej.

1. $M = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_3$ $D=\{5,\ 3\}$

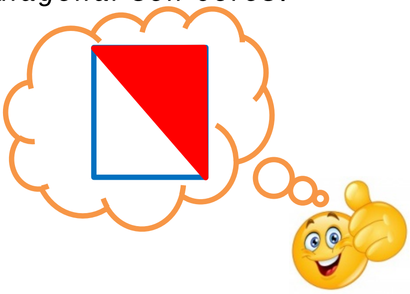
2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3$ $D=\{-1, -2,\ 1\}$



7. *Matriz Triangular Superior.*

Es la matriz $M = [a_{ij}]_n$, tal que $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$. Dicho de modo más sencillo, *todos los elementos debajo de la diagonal son ceros*.

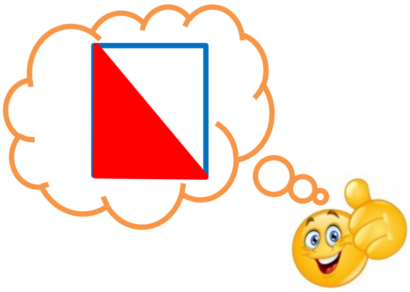
Ej. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & -2 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}_3$



8. *Matriz Triangular Inferior.*

Es la matriz $M = [a_{ij}]_n$, tal que $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$. Es decir, *todos los elementos encima de la diagonal son ceros*.

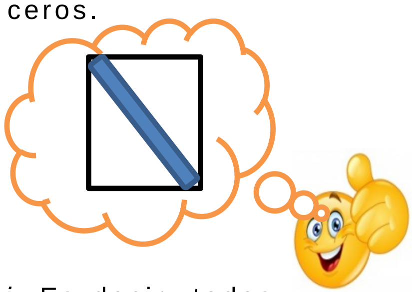
Ej. $A = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & -2 & \mathbf{0} \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}_3$



9. *Matriz Diagonal*

Es la matriz $M = [a_{ij}]_n$, tal que $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$. Es decir, todos los elementos debajo y encima de la diagonal son ceros.

Ej. $A = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \end{bmatrix}_3$



10. *Matriz Escalar*

Es la matriz diagonal tal que $a_{ij} = k, \ \forall i = j$. Es decir, todos los elementos de la diagonal son iguales entre sí

Ej. $A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}_3$

11. *Matriz identidad*

Es la matriz escalar tal que $a_{ij} = 1, \ \forall i = j$. Es decir, todos los elementos de la diagonal son iguales a 1.

Ej $\quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_3. \qquad I_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}_3$

Por supuesto que hay matrices identidad de mayor orden: I_4; I_5; I_6; etc.

12. *Matriz transpuesta*

Si $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, su transpuesta es $A^t = [a_{ji}]_{m\times n}$. Es decir, es la matriz que se obtiene de otra cambiando las filas por columnas.

$$\text{Ej. } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \; ; \; A^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_3$$

Nota. $(A^t)^t = A$.

13. *Matriz simétrica*

Si A es una matriz cuadrada y $A^t = A$, la matriz se denomina *simétrica*.

$$\text{Ej. } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_3 \; ; \; A^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_3$$

14. *Matriz antisimétrica*

Si A es una matriz cuadrada y $A^t = -A$, la matriz se denomina *antisimétrica*.

$$\text{Ej. } A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_3 \; ; \; A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}_3 = -A$$

15. *Suma de matrices*

Si $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ y $B = [b_{ij}]_{n\times m}$, su suma es:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times m}$$

Nota. Dos matrices son *conformes para la suma* si son del mismo orden.

Ej.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_3 + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0+4 & -2+2 & 3+1 \\ 2-3 & 1+0 & -1+6 \\ -3+2 & 1-1 & 4+0 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}_3$$

16. *Producto por un número*

Si $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, y $k \in IR$, entonces:

$$kA = [ka_{ij}]_{n\times m}$$

Ej.

$$5\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 5x0 & 5x(-2) & 5x3 \\ 5x2 & 5x1 & 5x(-1) \\ 5x(-3) & 5x1 & 5x4 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 15 \\ 10 & 5 & -5 \\ -15 & 5 & 20 \end{bmatrix}_3$$

Nota: $-B = (-1)B$, luego $A - B = A + (-1)B$.

17. *Producto de matrices*

Si $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ y $B = [b_{ij}]_{m\times p}$, entonces:

$$AB = \left[c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right]_{n\times p}$$

Nota: Dos matrices con *conformes para el producto* si el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda

Ej.

1. Nuestro primer ejemplo consistirá en aprender a multiplicar una matriz de una fila por una matriz de una columna.

$$[-1 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = [(-1)(-2)+4x3+0x6] = [14]$$

Se multiplica el primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna, luego el segundo elemento de la fila por el segundo elemento de la columna, y así sucesivamente. Se suman los productos y se obtiene el resultado.

2. Este procedimiento se hace extensivo al producto de una matriz de una fila por otra de más columnas.

Ej. $[-1 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = [(-1)(-2)+4x3+0x6 \quad (-1)(0)+4x1+0(-3)] = [14 \quad 4]$

En general el proceso se extiende para matrices que tengan conformidad para el producto.

18. *Propiedades*

En las siguientes propiedades se supone que las matrices A y B son conformes para sus respectivas operaciones, k, k_1 y k_2 son números reales

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $(A + B)^t = A^t + B^t$
4. $Ak = kA$
5. $k(A + B) = kA + kB$
6. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
7. $(kA)^t = kA^t$
8. $AB \neq BA$
9. $A(B+C) = AB + AC$
10. $(B+C)A = BA + CA$
11. $(AB)^t = B^tA^t$
12. $(kA)(B) = (A)(kB) = kAB$
13. $(k_1A)(k_2B) = k_1k_2AB$

Nota. Si I = matriz identidad: IA =AI = A

19. *Potencia*

Sea A una matriz cuadrada, sus respectivas potencias se definen como sigue:

$$A^0 = I; \quad A^1 = A; \quad A^2 = AA; \quad A^3 = A^2A; \ldots; \quad A^n = A^{n-1}A$$

$$\text{Ej. } \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 8 \\ -2 & 13 & 12 \\ -4 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

20. *Matriz inversa*

Sea A una matriz cuadrada. Si existe una matriz A^{-1} tal que:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$$

dicha matriz se denomina *inversa*.

Ej. Determinar la inversa de $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Sol.

Asumimos para la inversa una matriz de incógnitas: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. El producto de ambas debe dar la identidad.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto de ambas matices plantea los sistemas de ecuaciones:

$$2a-c=1 \qquad 2b-d=0$$
$$a+3c=0 \qquad b+3d=1.$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$a=3/7,\ b=1/7,\ c=-1/7,\ d=2/7$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

21. *Determinante*

Es una operación que se realiza con los elementos de una matriz cuadrada, se denota por: $|A|$ o $\det(A)$. Y se define de acuerdo a su orden.

1. ***Determinante de orden 2***.

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ej. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 4\times(-1) - 3\times 5 = -19$

2. ***Determinante de orden 3.***

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ \text{entonces:}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ej.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4) + 3(-1) + 4(3)$$

$$= 17$$

Nota. *Regla de Sarrus* (**solo para determinantes de orden 3**).

Se repiten debajo del determinante las dos primeras filas. Se multiplican por ternas los números unidos por las flechas en el sentido de las mismas. Se suman los productos en sus respectivas columnas y se resta de derecha a izquierda.

Ej.

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & -3 & 4 & \\ & 1 & 2 & -2 & \\ & 0 & 3 & -1 & \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ -12 & 1 & 2 & -2 & 12 \\ 3 & & & & 0 \\ \hline -9 & & & & 8 \end{array}$$

Det(A) = 8 – (–9) = 17

3. Determinantes de orden superior a tres.

Los determinantes de orden superior a tres se definen de manera similar a éstos últimos. Pero muchas veces es mejor calcularlos usando las siguientes propiedades:

1. Si una fila (o columna) es nula, el determinante es cero.

Ej. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$

2. Si una fila (o columna) es múltiplo de otra, el determinante es cero.

Ej. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 8 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$, porque la segunda fila es el doble de la primera.

3. Si se multiplica una fila (o columna) por un número, el determinante queda multiplicado por el mismo número.

Esta propiedad se usa más en el sentido de factorizar una fila o columna para simplificar los cálculos.

Ej. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 6 \\ 8 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 8 & 2 & -5 \end{vmatrix}$, factorizamos 2 de la segunda fila

$= 2\times 3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; factorizamos 3 de la tercera columna.

4. Si se permutan de lugar dos filas (o columnas) adyacentes, el determinante cambia de signo.

Ej. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 6 \\ 8 & 2 & -9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 8 & 2 & -9 \\ 4 & -4 & 6 \end{vmatrix}$ $f_2 \leftrightarrow f_3$

5. Si una fila (o columna) se multiplica por un número; y, luego, se le suma a otra fila (o columna), el determinante no se altera.

Ej. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 11 \\ -3 & -8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -1 \\ 4 & -4 & 6 \end{vmatrix}$ $-4f_1 + f_2$

$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ $3f_1 + f_3$

6. El determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de su diagonal principal.

Ej. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\times 2\times(-3) = -6$

Nota. Esta propiedad también se cumple para matrices diagonales.

7. $Det(A^t) = Det(A)$.

8. $|AB| = |A||B|$

22. *Submatriz.*

Si de una matriz cualquiera eliminamos un determinado número de filas o columnas, la matriz más pequeña que se obtiene es una submatriz.

Ej. $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, eliminado la tercera fila y las dos últimas columnas nos queda la submatriz: $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Si A es cuadrada y denotamos por M_{ij} la ***submatriz*** que resulta de eliminar la fila *i* y la columna *j*, el determinante $|M_{ij}|$ se denomina ***menor determinante***.

23. Cofactor.

El *cofactor* del elemento a_{ij} se denota por α_{ij} y se define como:

$$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Ej. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ 5 & 3 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ determinar los cofactores α_{11} y α_{32}.

Sol.

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}|M_{11}|=\begin{vmatrix}3 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$\alpha_{32}=(-1)^{3+2}|M_{32}|=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-(-7)=7$$

Nota. Un determinante se puede desarrollar multiplicando los elementos de cualquier fila o columna por sus respectivos cofactores y luego sumando los productos obtenidos.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$$

Ej. Calcular el determinante de la matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ 5 & 3 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ empleando la tercera columna.

Sol.

Calculamos los cofactores de la tercera columna:

$$\alpha_{13}=(-1)^{1+3}|M_{13}|=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-6$$

$$\alpha_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|=-\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-(-8)=8$$

$$\alpha_{33}=(-1)^{3+3}|M_{33}|=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-23$$

Ahora calculamos el determinante pedido:

$$\begin{vmatrix}-1 & 4 & 2\\ 5 & 3 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2(-6)+(-3)8+1(-23)=-59$$

24. *Adjunta.*

Se define la adjunta de una matriz cuadrada A como:

$$\text{Adj}(A) = [\alpha_{ij}]^t$$

Es decir es la transpuesta de la matriz de cofactores.

Ej. $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -11 & -6 \\ -4 & -5 & 8 \\ -18 & 7 & -23 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -18 \\ -11 & -5 & 7 \\ -6 & 8 & -23 \end{bmatrix}$

¿Cómo se puede calcular la inversa empleando *la adjunta*?

Si $\det(A) \neq 0$ se emplea la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A) \quad \ldots .24.1$$

Ej.

$$A^{-1} = \frac{1}{-59}\begin{bmatrix} 3 & -4 & -18 \\ -11 & -5 & 7 \\ -6 & 8 & -23 \end{bmatrix}$$

Nota. Por este método es muy sencillo calcular la inversa de una matriz de orden 2.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \ldots 24.2$$

Ej.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

25. *SEL.*

Es un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Obsérvese que no necesariamente m es igual n.

Si $m = n$, el sistema se denomina cuadrado. Nos ocuparemos sólo de los sistemas cuadrados.

26. *Forma matricial*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si representamos estas matrices por A, X, b, respectivamente, tendremos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} ,$$

A se denomina matriz de coeficientes, **X** es la matriz de incógnitas y **b** es la matriz de términos independientes.

El SEL se puede representar brevemente por:

$$AX = b \ldots .26.1$$

27. *Solución por la inversa.*

Su solución está dada por:

$$X = A^{-1}b \ldots .26.2$$

Ej.

Resolver

$$3x+2y=5$$
$$2x-4y=8$$

Sol. Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 8\end{bmatrix}$$

Usamos la fórmula 26.2: $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\ 8\end{bmatrix}$

Usamos la fórmula 24.2: $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{-16}\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 8\end{bmatrix}$

Efectuamos el producto de matrices:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{-16}\begin{bmatrix}-36\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36/16\\ -4/16\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9/4\\ -1/4\end{bmatrix}$$

De manera similar se procede para sistemas de tres incógnitas.

La ventaja de este método es que es muy fácil programarlo en Excel.

28. *Regla de Cramer*

En el sistema 26.1: Sea A_i la matriz que resulta de sustituir la columna i de A por **b**. Entonces:

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|} \quad \text{....28.1}$$

Ej.

Resolver

$$3x_1-2x_2+x_3=11$$
$$x_1+x_2+3x_3=10$$
$$-x_1-4x_2+2x_3=8$$

Usamos 28.1:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}11 & -2 & 1\\ 10 & 1 & 3\\ 8 & -4 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 2\end{vmatrix}}=\frac{98}{49}=2$$

$$x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 11 & 1\\ 1 & 10 & 3\\ -1 & 8 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 2\end{vmatrix}}=\frac{-49}{49}=-1$$

$$x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -2 & 11\\ 1 & 1 & 10\\ -1 & -4 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 2\end{vmatrix}}=\frac{147}{49}=3$$

ALGUNAS APLICACIONES

Las matrices tienen muchas aplicaciones en diversos campos de las ciencias y de la ingeniería. Aquí presentamos algunos ejemplos aplicativos.

1. En la robótica.

El modelo matemático para el movimiento de una articulación de un brazo robótico está dado por una matriz:

$$T = \begin{bmatrix} matrizde\ rotación & vector\ de\ traslación \\ transformación\ de\ perspectiva & escalado \end{bmatrix}$$

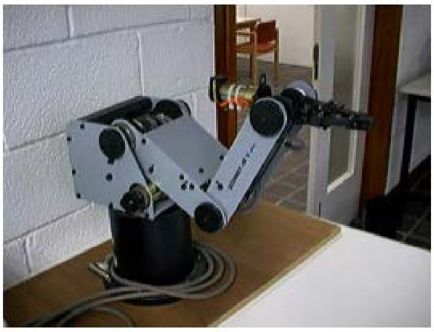


Figura 1. Fotografía del manipulador SCORBOT ER-VPlus en la que se observan los distintos elementos que componen la estructura mecánica y las articulaciones que las unen.

Fuente: Matemáticas y robótica Leopoldo Acosta Sánchez y Marta Sigut Saavedra
https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo2lp/1/msigut.pdf

Otras páginas sobre el tema

http://datateca.unad.edu.co/contenidos/299012/CURSO_DE_ROBOTICA_AVANZADA_2014.pdf

file:///C:/Documents%20and%20Settings/Administrador/Mis%20documentos/Downloads/PonenciaRobotica%20(1).pdf

http://www2.elo.utfsm.cl/~elo377/documentos/TMA-RoboticaJHS.pdf

2. En teoría de control.

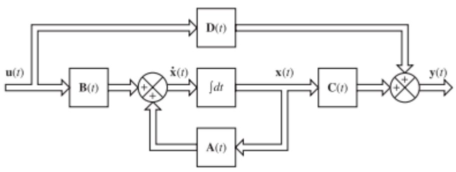
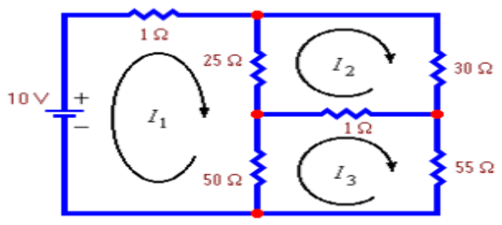


Figura 2-14. Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.

Fuente: Ogata, Ingeniería de control moderna.
https://hellsingge.files.wordpress.com/2014/10/ingenieria-de-control-moderna-ogata-5ed.pdf

3. En la electricidad.

Se usan matrices para determinar la corriente que circula por cada malla de un circuito eléctrico.



Fuente: Aplicaciones de las Matrices a la Solución de Problemas de Redes Eléctrica
http://www.abaco.com.ve/lineal/ProyectoCircuitos.pdf

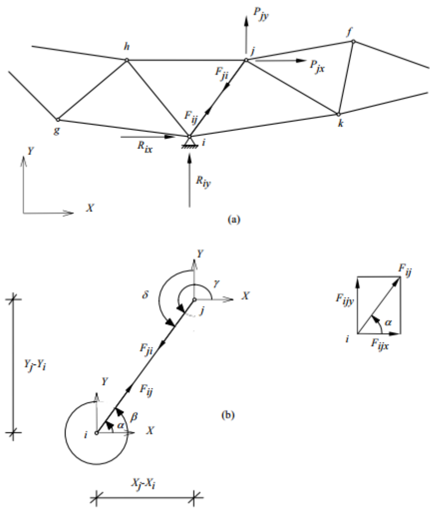
Otras páginas:

http://panamahitek.com/leyes-de-kirchhoff-el-metodo-zbus/

http://ramos.elo.utfsm.cl/~lsb/elo102/aplicaciones/aplicaciones/clases/c4.pdf

https://ingelibreblog.wordpress.com/2014/02/13/leyes-de-kirchhoff-y-metodo-de-mallas-resolucion-de-circuitos-electricos/

4. En estructuras mecánicas.



Fuente: Análisis de Estructuras Texto guía para prácticas Pascual Martí Montrull Gregorio Sánchez Olivares Pedro Martínez Castejón Concepción Díaz Gómez
http://www.upct.es/~deyc/publicaciones/AE_TGP.pdf

Otras páginas

http://ingmec.ual.es/~jlblanco/papers/blanco2012calculo_matricial_estructuras.pdf

http://cdigital.dgb.uanl.mx/la/1020147236/1020147236.PDF

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, efectuar las siguientes operaciones:

a) $2A - 3B + C$ b) $A - B - 2C$ b) $4A + B - 3C$
d) $3A^t + 2B - 4C$ e) $(A - 2B)^t + C$ f) $(2A - 3B)C^t$
g) $A^2 + (B^t)^2 + 2C$ h) $(AB)^t(3C)$

2. Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, efectuar:

a) $2A + 3B$ b) AB^t c) A^tB
d) $(2A^tB)C$ e) $2A^t(BC)$ f) AC

3. Resolver:

a) $2X + 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ b) $X + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^t = 4\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - 2X$

c) $X^t - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $X + 2\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t = 4\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3X$

e) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $3X - 2Y = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

f) $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $X - 2Y = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $A\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}B\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

4. Determinar las siguientes inversas:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

5. Efectuar:

a) $3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}-\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

6. Resolver:

a) $3X + 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = 4\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + X$

b) $5X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} - 3X$

7. Hallar una matriz X tal que $X + X^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ ¿Hay una sola solución?

8. Calcular las siguientes potencias de matrices:

a). $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{2}$ b). $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{3}$

c). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{2}$ d). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{3}$

9. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcular A^2, A^3,..., A^n.

10. Calcular los siguientes determinantes:

a). $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ b). $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

c). $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ d). $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

e). $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ f). $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

11. Efectuar las siguientes operaciones:

1. $3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

2. $-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

12. Calcular, usando propiedades:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & 7 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\begin{vmatrix} x-1 & x+3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5$ 2. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x & 4 \end{vmatrix} = 7x+2$

3. $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ 2 & 1 & x+1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 59$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ x & 1 & x \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2x-18$

14. Determinar la inversa de cada matriz empleando el método de la adjunta.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2$

15. Resolver:

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & -7 \\ 5 & 14 & 9 \end{bmatrix}$

3. $X\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} X^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -7 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$