MATEMÁTICA I

ÍNDICE

VII. NÚMEROS COMPLEJOS

1. **Concepto de número complejo.**
2. **Operaciones.**
3. **Formas: cartesiana, polar y exponencial.**
4. **Raíces de números complejos.**
5. **Función de variable compleja.**

VIII. ESTADÍSTICA.

1. **Gráficos: diagrama de barras, polígonos de frecuencia, frecuencias acumuladas, frecuencias relativas, sectores, histogramas.**
2. **Distribución de frecuencia.**
3. **Medidas de centralización.**
4. **Medidas de dispersión.**
5. **Probabilidad.**

Concepto de Funciones

1. ¿Qué es una ***variable***?

En matemática se denomina *variable* a un símbolo al que se le puede asignar un valor numérico cualquiera de un determinado conjunto. Otra definición similar nos dice que es un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto dado. Dicho conjunto es llamado, *universo o dominio* de la variable, y cada elemento del conjunto es un *valor* de la variable.

Por ejemplo, cada elemento del conjunto C={2, 5, 7, 10} se puede simbolizar por cualquier signo elegido libremente (usualmente usamos letras de nuestro alfabeto: *a, b, c*, …., o del griego: α, β, γ , δ…) acostumbramos a usar la letra "x"(o cualquier otra) y queda establecida la relación: "$x \in C$".

En el caso particular que el dominio sea un conjunto con un solo elemento (unitario) ya no tiene sentido hablar de variable, pues el símbolo representa a una ***constante***.

Por ejemplo,π (3,14159…), e (2,71828…), g (9,8…) son ejemplos de **constantes**.

Las magnitudes físicas representadas por su respectivo símbolo se tratan como variables matemáticas. Por ejemplo, la intensidad de corriente i toma valores en el conjunto de los números reales ($i \in$ IR), la variable distancia d toma valores desde cero hasta el infinito positivo ($d \in [0; \infty\rangle$), etc.

2. ¿Qué tipos de ***relaciones*** se pueden establecer entre dos o más variables?

Matemáticamente se pueden establecer relaciones de igualdad o de desigualdad.

Ejemplos:

1. $y = 2x + 1$ (su gráfica es una línea recta)
2. $x^2 + y^2 = 4$ (su gráfica es una circunferencia)
3. $y < x^2$. (su gráfica es una región del plano)
4. $v = ri$ (ley de Ohm)

También se pueden establecer relaciones definidas mediante una tabla de valores aunque no haya una fórmula (algebraica, trigonométrica o logarítmica) que las relacione. Ejemplos de ello son las siguientes tablas:

x	–3	0	1	4	5,5
y	2,01	1,32	3,00	5,41	8,79

x	–2	-2	1	3	5
y	2	1	3	5	9

Los valores de x e y se han escogido arbitrariamente

3. ¿Qué es una ***función***?

Una relación de modo tal que cada valor de x se corresponde, únicamente, con un solo valor de y, se denomina **función**; x se denomina variable *independiente* (VI) e y se denomina variable *dependiente* (VD).

En los ejemplos anteriores:

1. $y = 2x + 1$, es función porque cada valor de x se corresponde con un solo valor de y.

2. La relación definida por la primera tabla también es una función, pues a cada valor de x le corresponde uno solo de y, mientras que la segunda no es función, pues a -2 le corresponden dos valores de y: 2 y 1.

3. $y < x^2$ no es función, pues, a un valor de x le corresponden varios de y (por ejemplo, a $x = 3$ le corresponden todos los valores de y que son menores que 9).

4. La relación $x^2 + y^2 = 4$ no es función porque un valor de x se corresponde con dos de y (por ejemplo a $x=0$ le corresponden $y=\pm 2$)

4. La ***notación funcional***.

Al expresar una función, como por ejemplo $y = 2x + 1$, en su forma general: $y = mx + n$, ya no es posible distinguir cuál es la variable independiente. Para poder distinguirla se recurre a una nomenclatura denominada la *notación funcional*:

$$y = f(x),$$

la cual indica expresamente que la variable entre paréntesis (x) es la independiente que en adelante se denominará, brevemente, la *variable de la función*

Ej. En las siguientes funciones, la variable de cada una se resalta con letra roja entre paréntesis.

$$f(x) = mx + n$$
$$f(m) = mx + n$$
$$f(n) = ax + n$$

Las restantes letras que acompañan a las variables son constantes de la función, denominadas ***parámetros***.

5. ¿Cómo se ***evalúa*** una función?

Se le asigna a su variable un valor numérico; y, luego, se efectúan las operaciones indicadas por la regla de la función, *si ello es posible*.

Ejemplos.

1. Dada la función: $f(x) = 2x + 7$, para $x=3$, se tiene:

$$f(3) = 2(3) + 7 = 13$$

Similarmente: $f(-2) = 2(-2) + 7 = 3$

2. La función $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ no se puede evaluar en $x=2$, pues el denominador se haría **cero** y sabemos que no se puede dividir por cero, es decir, f(2) **no existe**.

3. En el caso de una función definida mediante una tabla se toman los correspondientes valores de *y*.

Para la función

x	–1	6	9
f(*x*)	2	0	7

Se tiene: $f(-1)=2$; $f(6)=0$; $f(9)=7$.

4 ¿Qué valores de *x* permiten evaluar la función $f(x) = \sqrt{x-3}$ de modo que f(x) se un número real?

Recordemos que para calcular una raíz cuadrada, cuyo resultado sea un número real, la cantidad subradical *no debe ser negativa*, en caso contrario se obtendrían números imaginarios. Esto significa que x – 3 debe ser mayor o igual que cero:

$$x - 3 \geq 0,$$

$$x \geq 3.$$

Es decir, esta función se puede evaluar para todo valor de *x* que sea mayor o igual que 3.

6. ¿Qué son el ***dominio y rango*** de una función?

El *dominio de una función* $y = f(x)$, es el *dominio de su variable independiente*, es decir,el conjunto de valores de x que determinan, cada uno, un correspondiente valor de *y*. Esto es, los valores que permiten valuar la función. El conjunto correspondiente de valores de $y= f(x)$, se denomina *rango*. Veamos algunos ejemplos:

1. Para la función definida por la tabla:

x	–3	0	1	4	5,5
f(*x*)	2,01	1,32	3,00	5,41	8,79

El **dominio** de *f* es el conjunto: $D_f = \{-3; 0; 1; 4; 5{,}5\}$.

Un valor fuera de este conjunto, por ejemplo: **3**, no pertenece al dominio, eso implica que f(**3**) no existe.

Su **rango** es el conjunto:

$$R_f = \{2{,}01;\ 1{,}32;\ 3{,}00;\ 5{,}41;\ 8{,}79\}.$$

2 Para la función definida por la regla de correspondencia

$$y = 2x + 3,$$

su dominio es el conjunto de todos los números reales, D_f = IR, pues todo número real se puede multiplicar por 2 y al resultado sumarle 3.

Puesto que el resultado de estas operaciones es a su vez un número real, su rango es todo IR.

3 Para la función definida por la regla de correspondencia

$$y = \frac{x}{x-1},$$

su dominio es el conjunto de todos los números reales, salvo el 1, es decir, D_f = IR – {1}, pues el número 1 anula al denominador (lo hace cero), esto hace imposible la división y por lo tanto no es posible determinar un correspondiente valor de *y* (por eso decimos que f(1) no existe). Su rango es IR – {1}.

4. Para la función $f(x) = \sqrt{x-3}$, su dominio es el conjunto de todos los números *x*, tales que *x* ≥3, tal como vimos anteriormente.

Puesto que la función está definida como una raíz positiva su rango es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que cero: $R_f = [0; \infty\rangle$

7. ¿Cómo se *grafica* una función?

Ilustremos con un ejemplo. Se sabe que la relación entre el espacio y el tiempo está dada por la ecuación:

$$e=vt.$$

Suponiendo que la velocidad de un móvil es 3m/s; y, que, además, en el momento inicial (*t* = 0) el móvil se encuentra en la posición cero (*e* = 0) entonces:

$$e = 3t$$

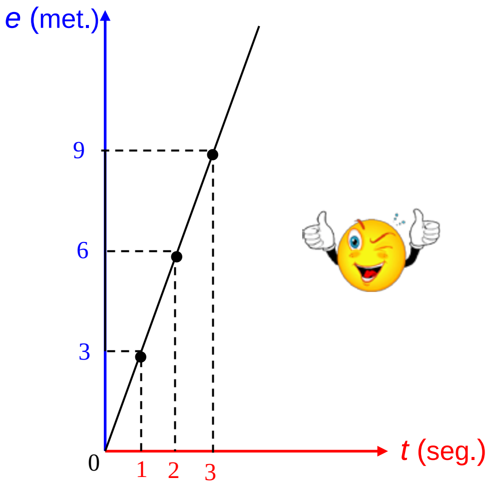
En este caso *t* es la variable independiente y *e* es la dependiente.

Le asignamos algunos valores a *t:* 1; 2; 3;… y evaluando obtenemos los correspondientes valores de e: 3; 6; 9;…. La presentación habitual es en forma tabular:

t (en segundos)	1	2	3	…
e (en metros)	3	6	9	…

Los valores asignados a *t* se escogen **libremente** pero tratando de que la evaluación de los mismos sea lo más sencilla posible.

Estos valores se grafican en un plano coordenado. En general, en el eje horizontal se ubican los de la variable independiente; y, en el vertical los correspondientes valores de la variable dependiente (veremos algunas excepciones más adelante). Se marcan los puntos determinados por las parejas de valores correspondientes: (1, 3), (2, 6), (3, 9) etc. y, luego, se unen con un trazo continuo siguiendo la tendencia marcada por los puntos.



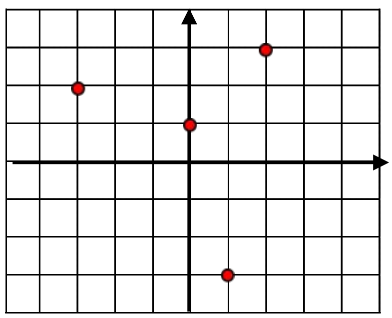
En el gráfico notamos que por cada segundo que transcurre, el móvil se desplaza 3 metros. Obviamente, en dos segundos el móvil se desplaza seis metros y así sucesivamente.

Cuando la función está definida por una tabla se grafican los pares dados por la tabla que define la función.

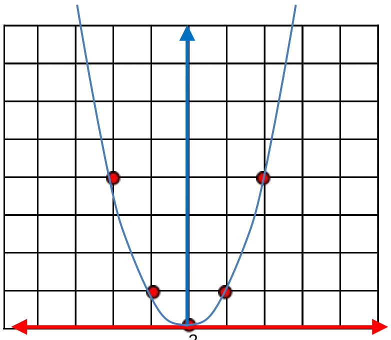
Ej. Dada la función definida por la tabla:

x	–3	0	1	2
f(*x*)	2	1	–3	3

Su grafica correspondiente es:



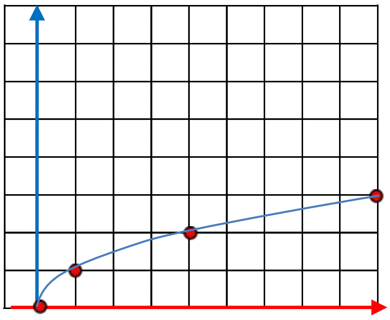
Veamos algunas funciones y sus correspondientes gráficas obtenidas tabulando sus respectivas variables.



$y=x^2$

x	···	–2	–1	0	1	2	···
y	···	4	1	0	1	4	···

Su dominio es todo IR y su rango el intervalo [0; ∞⟩



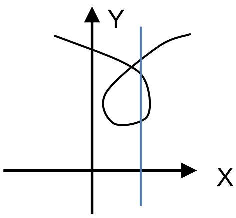
$y=\sqrt{x}$

x	0	1	4	9	···
y	0	1	2	3	···

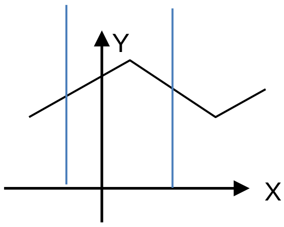
Su dominio es [0; ∞⟩ y su rango el intervalo [0; ∞⟩

8. ¿Cómo se reconoce *la* ***gráfica*** de una función?

La gráfica **no** corresponde a una función si *existen* verticales que la cortan en *más de un punto*. En *caso contrario* **sí** es una función.



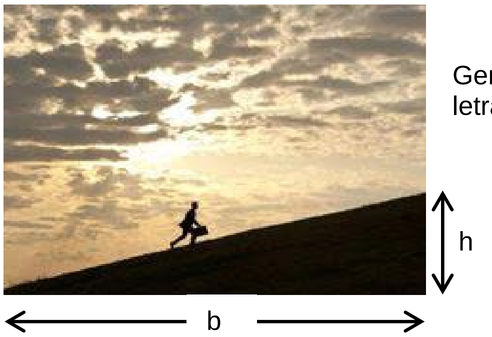
No es función



Es función

9. *Pendiente*

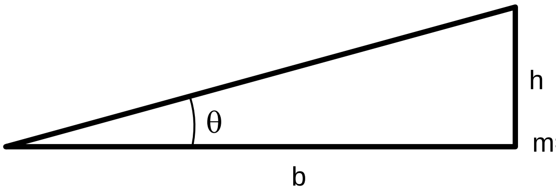
Un concepto muy importante en ingeniería es el concepto de **pendiente** que determina el grado de inclinación de un segmento recto respecto a una horizontal (por ejemplo, un plano inclinado, o una cuesta). Para ello calculamos la razón entre la altura y la base de un triángulo rectangulo asociado al segmento. La figura ilustra mejor la idea.



Generalmente se designa con la letra "*m*":

$$m=\frac{h}{b}$$

Esta idea concuerda con la razón trigonométrica *tangente* del ángulo adyacente a la base.



$$m=\tan\theta=\frac{h}{b}$$

Por ejemplo, en el cuadro anterior si b=10m y h=2m la pendiente será:

$$m=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

La razón 1/5 se interpreta como que "*a cada 5m de base le corresponde 1m de altura*".

También se puede expresar en decimales:

$$m = 0.2$$

Si multiplicamos por 100, la pendiente se expresa en porcentaje:

$$m= 20\%$$

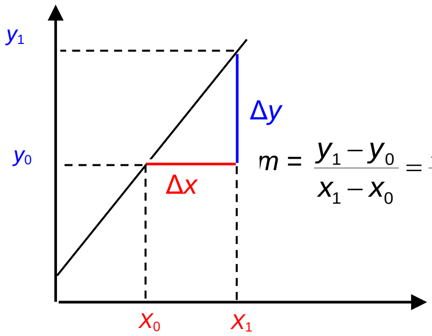
Inversamente, una pendiente del 5% equivale a 5/100 que simplificada es:

$$m=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$$

Es decir, por "*cada 20m de base hay 1m de altura*".

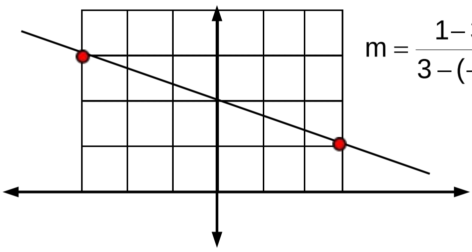
10. *Pendiente de una recta*

Para determinar la pendiente de una recta se toman dos puntos cualesquiera de la misma, y se calcula la pendiente del triángulo asociado, como lo muestra la siguiente figura.



$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por ejemplo, para determinar la pendiente de una recta que pasa por los puntos (–3; 3) y (3; 1) aplicamos la fórmula anterior:



$$m = \frac{1-3}{3-(-3)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Una pendiente ***negativa*** indica que cuando *x aumenta* entonces *y disminuye*. En este caso la gráfica de la recta está inclinada hacia la izquierda y se denomina ***decreciente***.

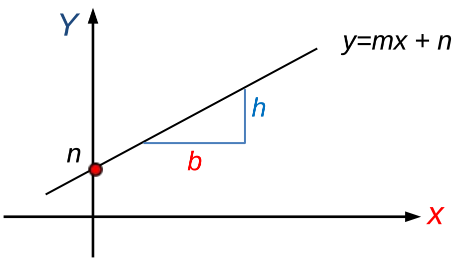
11. *Funciones elementales*.

1. Función lineal

Es una función de la forma:

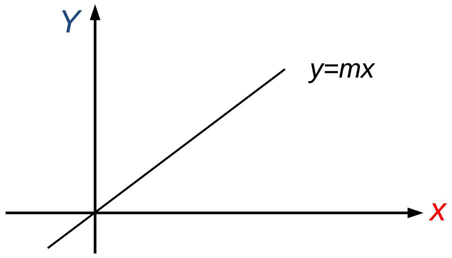
$$y = \boldsymbol{m}x + n$$

Su gráfica es una línea recta, ***m*** es su pendiente y *n* es la intersección con el eje Y

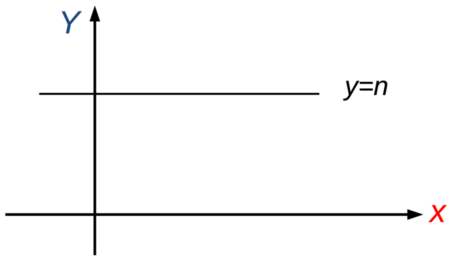


Casos especiales:

1.1. Si n=0: $y = mx$ (Es una recta que pasa por el origen (0, 0))

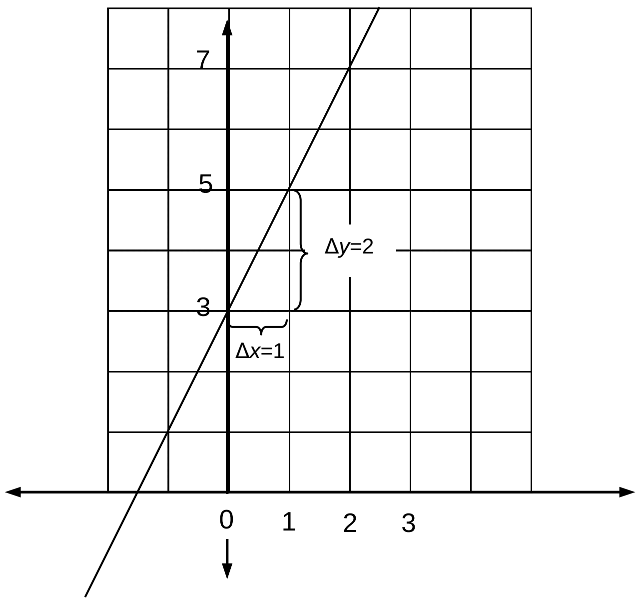


1.2. Si m=0: $y = n$ (constante)



Es una recta horizontal que corta al eje Y en y=n.

Un ejemplo de función lineal es: $y = \mathbf{2}x + 3$, su gráfica es la siguiente:



Notemos que por cada unidad de variación en x (Δx=1) se tienen dos unidades de variación en y (Δy=2). La razón (geométrica) de estas variaciones es de dos a uno y nos da la pendiente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$$

Muchas magnitudes físicas se relacionan linealmente. Ejemplos:

1. A velocidad (v) constante el espacio (*e*) y el tiempo (*t*) se relacionan linealmente:

$$e = vt + e_0$$

2. De acuerdo con la ley de Ohm, con una resistencia (R) constante, la intensidad de corriente (*i*) y el voltaje (*v*)se relacionan linealmente:

$$V = R\, i$$

3. De acuerdo con la ley de Hook, con una constante (k) de elasticidad, la fuerza (*F*) y la elongación (*x*) se relacionan linealmente:

$$F = k\, x$$

Veamos un cuadro comparativo:

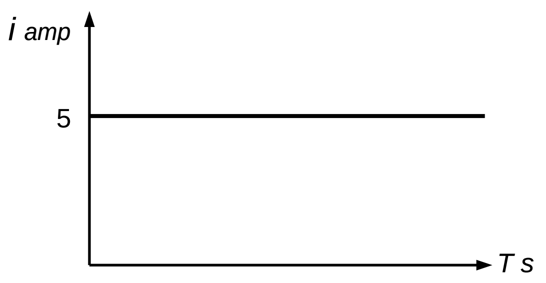
	VD		***pend***	*VI*		*Inters. eje Y*
Función lineal	*y*	=	***m***	*x*	+	*n*
Velocidad	*e*	=	***v***	*t*	+	e_0
Ley de Ohm	*V*	=	***R***	*i*		
Ley de Hooke	*F*	=	***k***	*x*		

En el ej. 1. La velocidad es la pendiente $\Delta e/\Delta t$. Las dos últimas corresponden al caso 1.1; es decir, sus gráficas son rectas que pasan por el origen de coordenadas y sus pendientes respectivas son ***R*** y ***k***.

4. Para una corriente continua de 5 amperes su ecuación se escribe:

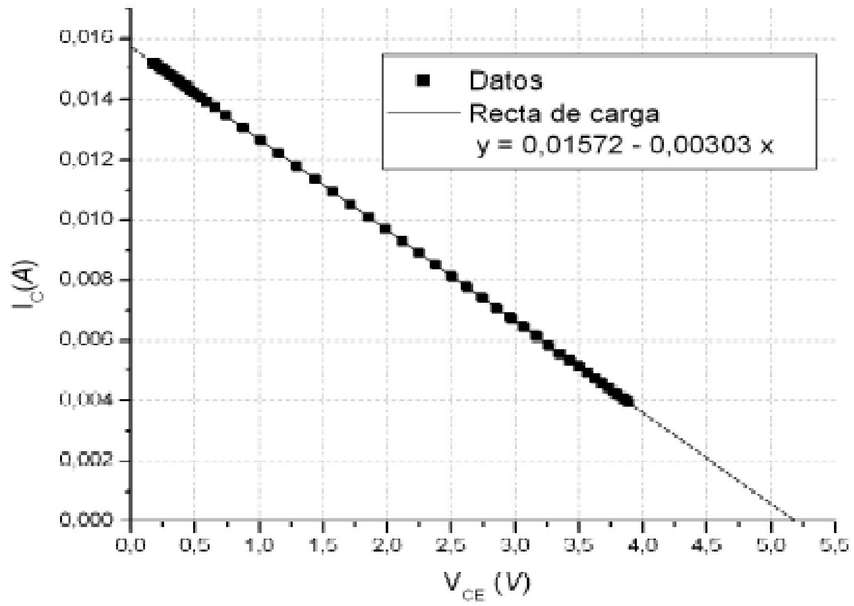
$$i = 5.\ (t > 0)$$

Es una función lineal que corresponde a m=0 y n= 5.



La interpretamos afirmando que *en todo momento la intensidad de corriente es de 5 amperios,* es decir se mantiene constante y no cambia con el transcurso del tiempo.

El siguiente gráfico muestra la relación entre la intensidad de corriente medida en amperios I(A) y la diferencia de potencial medida en voltios V(*v*) de un determinado circuito.



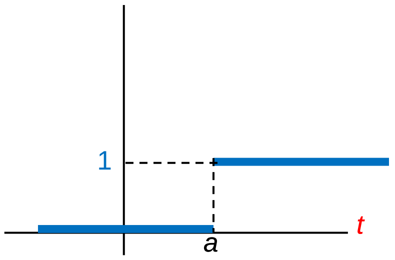
Obsérvese que esta relación es lineal y con pendiente negativa: ***m*** =– 0,00303

Fuente: http://focuslab.lfp.uba.ar/public/Electronica/Informes/Transistores_Fernandez-Ordonez.PDF.

12. La función *Salto unitario* de *Heaviside*.

Esta función se define de la siguiene manera:

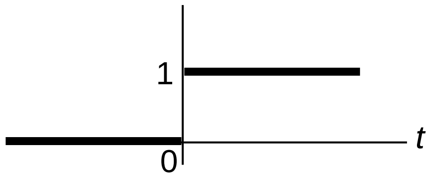
$$u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases}$$



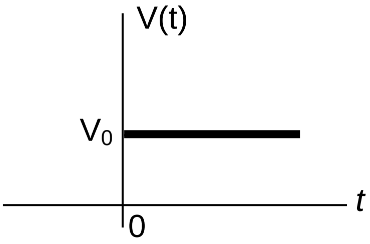
Esta función se puede asociar con la actividad o la inactividad: *cero*, si un sistema está inactivo hasta el instante *a,* y *uno* si el sistema se activa en ese instante y se mantiene en ese nuevo estado. En algunos textos se representa brevemente por $u_a(t)$.

Para a=0 la función y su gráfica se muestran a continuación:

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



Un voltaje continuo V(t) = V_0 se puede representar, también, por V(t) = $V_0 u(t)$

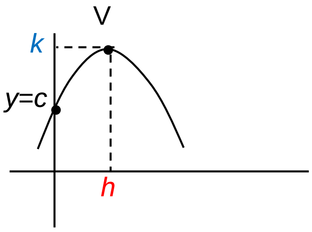


13. La ***función cuadrática***

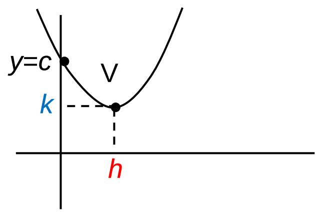
Es una función de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

corresponde a una ***parábola***, su gráfica presenta dos casos:



Si $a < 0$



Si $a > 0$

El punto V es el vértice de la parábola y sus coordenadas son:

$$h = -\frac{b}{2a} \quad , \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} .$$

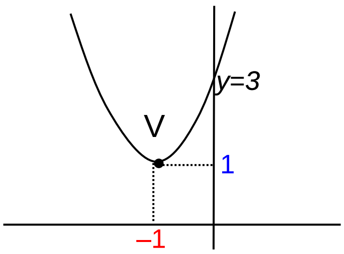
Intersecta al eje Y en $y=c$

Por ejemplo, la parábola $y = 2x^2 + 4x + 3$, tiene vértice en:

$$h = -\frac{4}{2(2)} = -1 \ \text{ e } \ k = \frac{4(2)(3) - (4)^2}{4(2)} = 1.$$

Intersecta al eje Y en y=3.

Su gráfica se esboza en la siguiente figura:

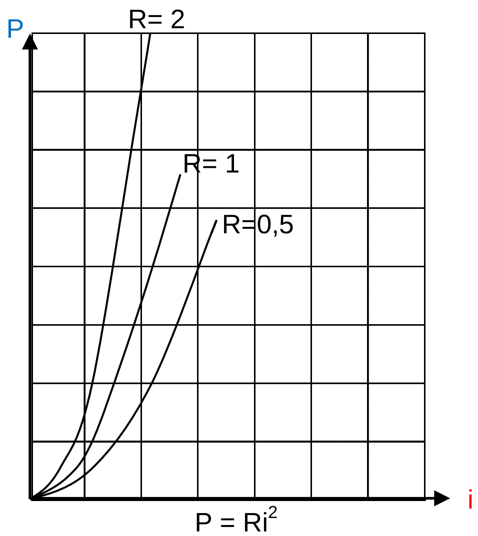


Al igual que antes muchas magnitudes físicas se relacionan de manera cuadrática. Ejemplos:

1. Si i (amperios) es el valor instantáneo de la corriente, P (vatios) estará expresada en watts.

$$P = R\,i^2$$

Considerando P como función de i, tenemos las siguientes gráficas para tres valores diferentes de R= 0,5; 1; 2



2. Cuando el dispositivo tiene una resistencia de valor R, la potencia también puede calcularse como:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

3. En Física la ecuación que rige el movimiento vertical de un objeto que se lanza libremente hacia arriba, sin rozamiento es la parábola:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

4. En el estudio de bombas hidráulicas las pérdidas de carga en tuberías se determinan mediante la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_L = \frac{fLv^2}{2Dg}$$

Donde: L: longitud de la tubería (m), f: factor de fricción (adimensional), v: velocidad del fluido (m/s), D: diámetro de la tubería (m), g: aceleración de la gravedad (m/s^2)

Es una función cuadrática considerando v *como* VI *y* h_L como VD.

5. El rendimiento puede ajustarse analíticamente mediante una parábola:

$$\eta = EQ^2 + DQ.$$

η: rendimiento de la bomba; D, E: constantes.

Es una función cuadrática que pasa por el origen, Q es la VI y η es la VD.

6. La altura de la bomba obedece a la ecuación

$$H=AQ^2 + BQ + C$$

H: altura de la bomba, Q caudal, A, B, C constantes. Q es la VI y H es la VD.

Veamos un cuadro comparativo.

	VD		VI			VI		
Función cuadrática	y=	a	x^2	+	b	x	+	c
Potencia eléctrica	P=	R	i^2					
Altura en lanzamiento libre	h=	-1/2g	t^2	+	V_0	t		
Carga en tubería	h_L=	fL/2Dg	V^2					
Rendimientode bombas	η =	E	Q^2	+	D	Q		
Altura de la bomba	H=	A	Q^2	+	B	Q	+	C

14. *Exponencial*

En general es una función de la forma:

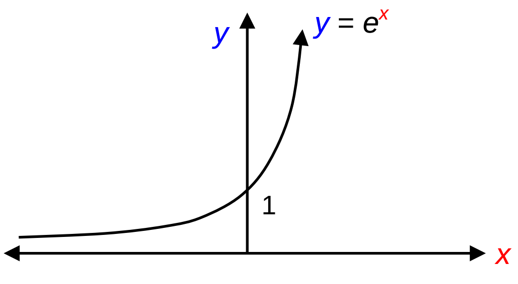
$$y = a^x;\ x \in \text{IR}.\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Un caso particular, ampliamente conocido, es:

$$y = \boldsymbol{e}^x;\ \ x \in \text{IR}.$$

e es la base de los logaritmos neperianos, su valor aproximado es 2,71828….

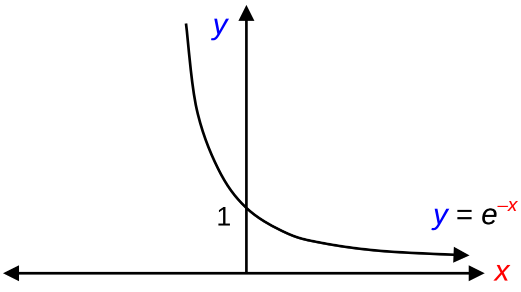
Un esbozo de su gráfica es:



La gráfica disminuye su altura cada vez más hacia la izquierda sin tocar ni pasar debajo del eje x, por eso decimos que este eje es una *asíntota horizontal* de la función.

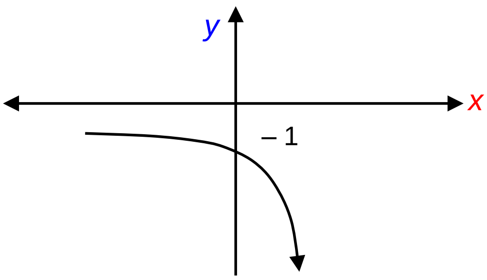
Vista de izquierda a derecha, la gráfica está subiendo rápidamente, por eso decimos que la función es ***creciente***.

El caso contrario es $y = e^{-x}$ cuya gráfica es ***decreciente***.

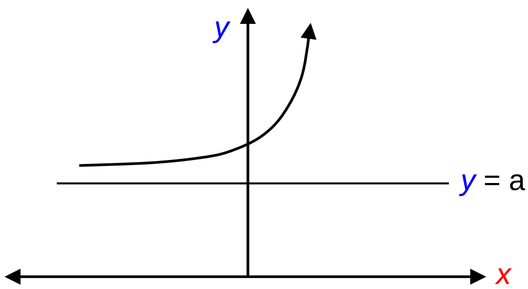


Este es un modelo matemático para muchas aplicaciones en la vida real. Cuando algo crece muy rápido se dice que "*tiene un crecimiento exponencial*" y cuando decrece rápidamente se dice que "*tiene un decaimiento exponencial*".

Algunas variantes y sus respectivas gráficas:



$y = -e^{x}$



$y = a + e^{x}$

Tiene las siguientes propiedades:

$e^{m}\, e^{n} = e^{m+n}$

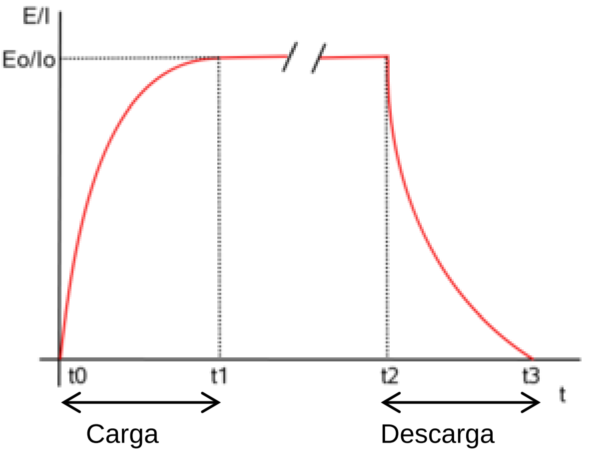
$(e^{m})^{n} = e^{mn}$

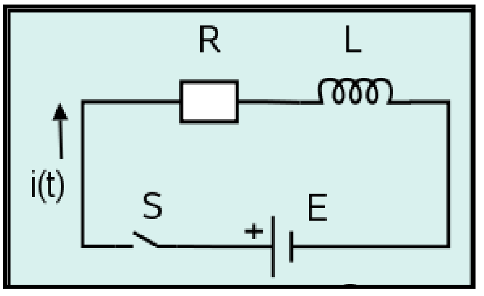
Esta función también se simboliza por: EXP(x).

Muchas magnitudes se relacionan de manera exponencial. Ejemplos:

1. En electrónica se presentan muchas de estas variantes en circuitos RC y RL en serie de corriente continua (CC).

   Veamos algunos ejemplos en RC:





Matemáticamente se pueden obtener las ecuaciones como se muestran en la siguiente tabla:

Carga en RL	Descarga en RL
$i(t) = Io(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$	$i(t) = Ioe^{\frac{-t}{\tau}}$

Fuente: Wikipedia.

2. La atenuación de una onda ultrasónica que viaja en un medio homogéneo está dada por:

$$A = A_0 e^{-\alpha x}.$$

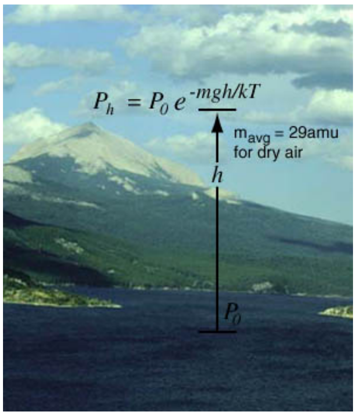
A_0 : Intensidad de la onda al iniciar el viaje.
A : Intensidad de la onda después de viajar una distancia x.
α : Atenuación constante.

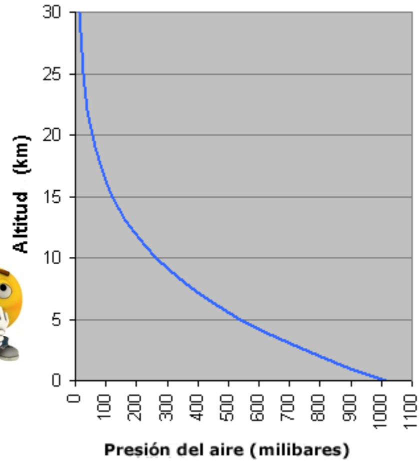
3. Cuando se quiere determinar la presión atmosférica a una determinada altura se usa la ecuación barométrica:

$$P(h)=P_0 e^{mgh/kT}$$

Donde P_0 es la presión al nivel del mar.

Se muestran gráficos ilustrativos en relación a esta ecuación





Fuentes:

Ventanas al Universo:
http://www.windows2universe.org/earth/Atmosphere/pressure_vs_altitude.html&lang=sp

Hyperphysics:
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Kinetic/barfor.html

¡Ah, los ingenieros! Obsérvese que la variable independiente h (altura) se encuentra en el eje vertical; y, la dependiente P (presión) está en el eje horizontal, contrariamente al uso corriente visto en la gráfica de funciones

15. *Logarítmo Natural o Neperiano*

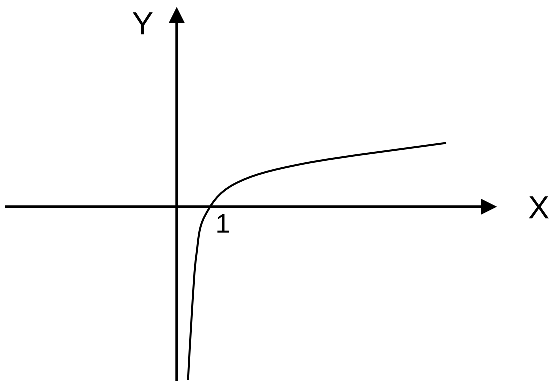
Es una función logarítmica definida en base ***e*** y se escribe:

$$y = \log_e(x);\ \ x > 0,$$

o más brevemente:

$$y = \ln x;\ \ x > 0.$$

Un esbozo de su gráfica es el siguiente:



Notamos que el eje Y es una *asíntota vertical*.

Las funciones *exponencial y logaritmo neperiano* son **inversas** entre sí. Esto implica que $y = e^x \leftrightarrow x = \ln y$.

Si en la tabla del circuito mostrado anteriormente quisiéramos determinar el *tiempo* en la carga y descarga tendríamos:

Tiempo de carga en RL	**Tiempo de descarga en RL**
$t = \tau ln\dfrac{Io}{Io - i(t)}$	$t = \tau ln\dfrac{Io}{i(t)}$

Los logaritmos neperianos tienen las siguientes propiedades:

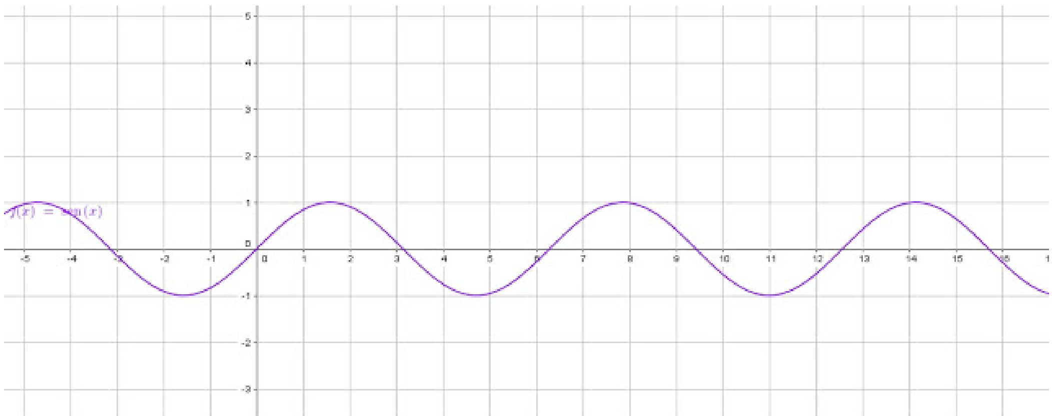
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. Si a y b son, ambos, positivos.
$\ln(a^b) = b\ln(a)$. Si a *es* positivo.

Para acceder a ellas en la calculadora se presiona "ln" para logaritmo neperiano y "shift→ln" para la exponencial.

16. *Seno*

Se denomina **función seno** a la aplicación de la razón trigonométrica **seno** a una variable independiente x expresada en **radianes**. Se denota por:

$$f(x) = \text{sen } x$$



- La función seno es *periódica* de **periodo 2π**: sen(x + **2π**) = senx.
- Su rango está entre –1 y 1: $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$.
- Su dominio es el conjunto de todos los números reales.
- Es una función *impar*: sen(–x) = –senx

En su forma general es:

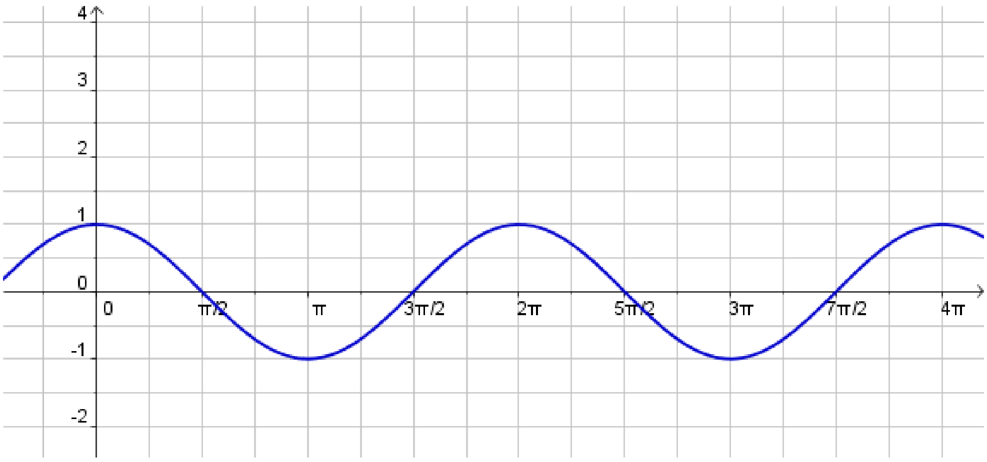
$$y = A\,\text{sen}(\omega x - \varphi).$$

A: Amplitud (ancho vertical de la onda).
ω: Pulsación o frecuencia angular.
φ: Fase.

17. *Coseno*

Se denomina **función coseno** a la aplicación de la razón trigonométrica **coseno** a una variable independiente *x* expresada en **radianes**. Se denota por:

$$f(x) = \cos x$$

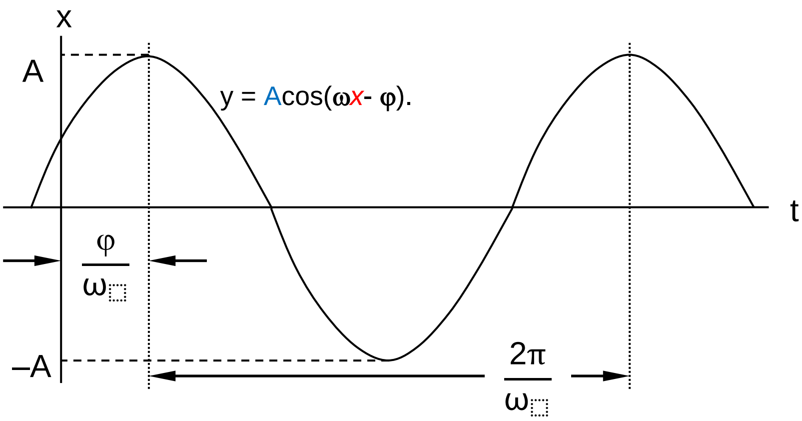


- La función coseno es periódica de **periodo 2π**: cos(x+**2π**) = cosx
- Su rango está entre –1 y 1: $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- Su dominio es el conjunto de todos los números reales.
- Es una función *par*: cos(–x) = cosx.

En su forma general es:

$$y = A\cos(\omega x - \varphi).$$

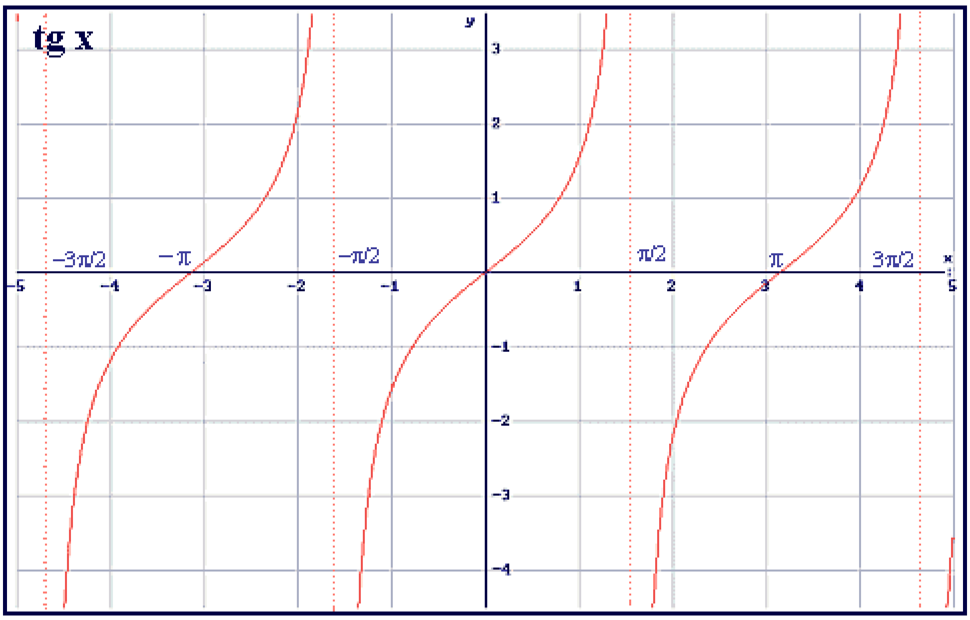
A: Amplitud (ancho vertical de la onda).
ω: Pulsación o frecuencia angular.
φ: Fase.



18. *Tangente*

Se denomina **función tangente** a la aplicación de la razón trigonométrica **tangente** a una variable independiente *x* expresada en **radianes**. Se denota por:

f(*x*) = tan *x*



- La función tangente es periódica de **periodo π**: tan(x+**π**) = tanx
- Su rango es el intervalo ⟨–∞; ∞⟩
- Su dominio es el conjunto de todos los números reales menos los múltiplos impares de π/2: IR– {(2k-1)π/2 / k∈Z}
- Es una función *impar*: tan(–x) = – tanx.

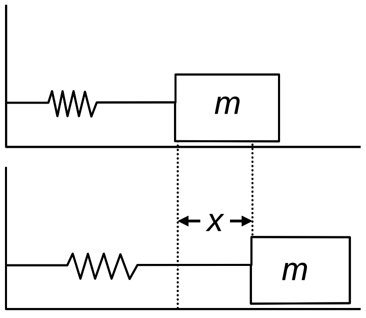
Veamos algunas magnitudes físicas que se relacionan con estas funciones trigonométricas.

1. Las denominadas corrientes alternas son cíclicas, esto es, tienen un carácter oscilatorio, por lo tanto se les puede asignar un modelo matemático de tipo senoidal. Así, por ejemplo, una corriente dada por:

$$i(t) = 4sen(200t)\ A$$

es una corriente alterna y se interpreta diciendo que su valor máximo (pico) es 4 A y su pulsación es de 200 rad/s

1. En el tema de vibraciones mecánicas consideremos una masa ***m*** sujeta a una pared mediante un resorte, cuya constante de rigidez es igual a ***k***, se estira una longitud ***x*** y se suelta. El cuerpo se encuentra sujeto a una fuerza restauradora igual a $F = -kx$.



Cuando no hay fuerza de resistencia o amortiguación, ni se encuentra sometido a una fuerza externa, el cuerpo oscila según la ecuación:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

la cual se puede llevar a la forma:

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha),$$

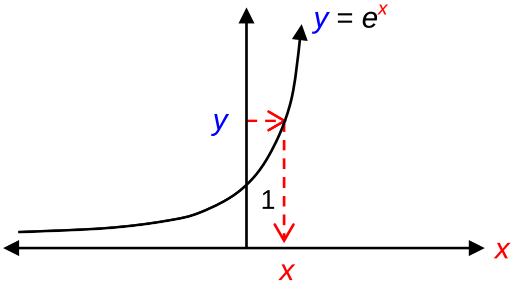
Donde: $C = \sqrt{A^2+B^2}$; $\tan\alpha = \frac{B}{A}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ se denomina *frecuencia circular.*

El *periodo* de oscilación es: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y la *frecuencia de oscilación* es: $f = \frac{1}{T}$.

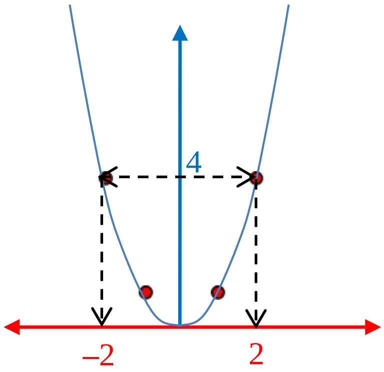
19. Función *inyectiva*

Es una función definida por $y=f(x)$ de modo que a cada valor de y le corresponde uno solo de x. En caso contrario la función no es inyectiva.

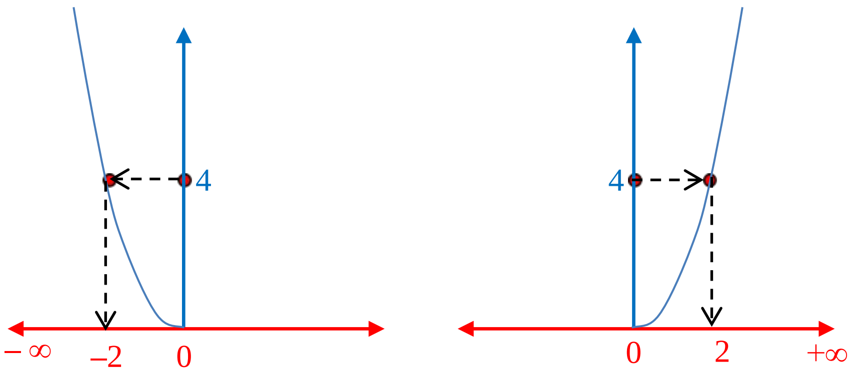
Por ejemplo la función exponencial es inyectiva



Ej. La función definida por $y=x^2$, no es inyectiva pues hay valores de y que se corresponden con dos de x. Así, por ejemplo, a $y = 4$ le corresponden dos valores de x: –2 y 2, a $y = 9$ le corresponden –3 y 3 para x, y así se pueden encontrar muchos más ejemplos.

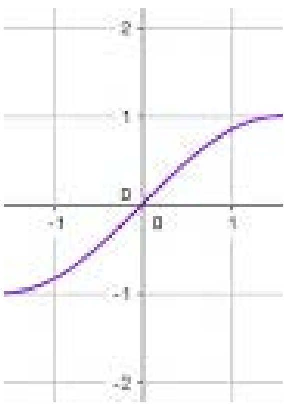


Si dividimos a la parábola en mitad izquierda y derecha, cada mitad, separada de la otra, es inyectiva

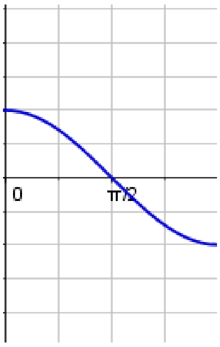


La primera está definida en el intervalo de <–∞, 0] y la segunda en [0, +∞>. Estos dominios se denominan ***dominios de inyectividad***.

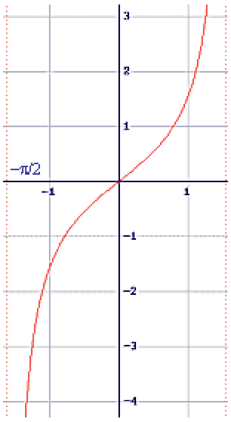
Las funciones seno, coseno y tangente no son inyectivas pero se puede dar para cada una de ellas, su respectivo dominio de inyectividad.



y=sen$x$ x∈[–π/2, π/2]



$y = \cos x \quad x \in [0, \pi]$



$y = \tan x \quad x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

20. *Función inversa*

Si $y = f(x)$ define una función inyectiva, intercambiando la x por la y, y viceversa, obtendremos la relación $x = f(y)$. Despejando de esta última la variable y, obtiene una nueva función que se denomina ***función inversa*** y comúnmente se denota por:

$$y = f^{-1}(x).$$

¡Para recordarlo! La nomenclatura f^{-1}, en este caso no representa a la inversa multiplicativa (*fracción inversa*). Es decir:

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f}$$

Ejemplos.

1. Dada la función $f(x)=2x + 3$, obtener su respectiva función inversa.

Sol.

Cambiamos f(x) por y: $\quad y = 2x + 3.$
Intercambiamos x e y: $\quad x = 2y + 3.$
Despejamos y: $\quad y = \frac{x-3}{2}$

Finalmente se obtiene: $\quad f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}.$

2. Dada la función $f(x) = \sqrt{x-4}$ obtener su respectiva función inversa.

   Sol.

   Escribimos: $y = \sqrt{x-4}$

   Intercambiamos *x* e *y*: $x = \sqrt{y-4}$

   Despejamos *y*: $y=x^2+4$

   Finalmente: $f^{-1}(x) = x^2 + 4$

3. Dada la función $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ obtener su respectiva función inversa.

   Sol.

   Siguiendo los pasos anteriores:

$$x = \frac{y-3}{y+1} \rightarrow xy+x=y-3 \rightarrow y = \frac{x+3}{1-x} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-x}$$

Para las funciones trigonométricas, en su respectivo dominio de inyectividad, las inversas se denominan ***arco***. Estudiaremos las tres principales: **arco seno, arco coseno y arco tangente**. Sus abreviaturas son, respectivamente:

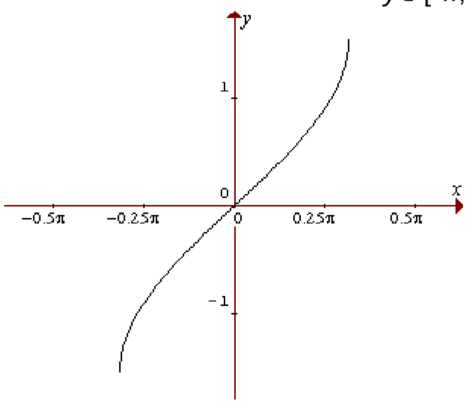
arcsen o **sen^{-1}**, arccos o **cos^{-1}** y arctan o **tan^{-1}**.

Para acceder a ellas en la calculadora se presiona la tecla "shift".

21. La función *arco seno*

Se define mediante la relación: $y = \text{arcsen}\, x \leftrightarrow x = \text{sen}\, y$

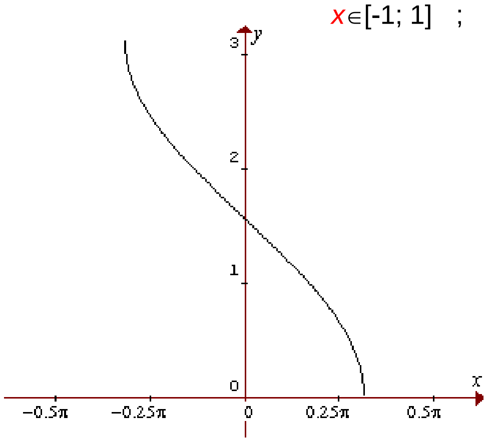
$y \in [-\pi; \pi]$; $x \in [-1; 1]$



22. La función
arco coseno

Se define mediante la relación: $y = \arccos x \leftrightarrow x = \cos y$

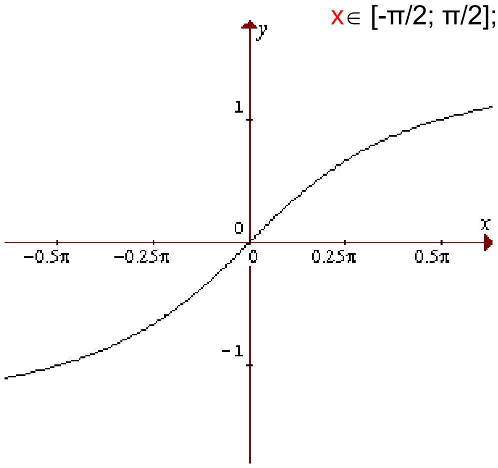
$x \in [-1; 1]$; $y \in [-\pi; \pi]$



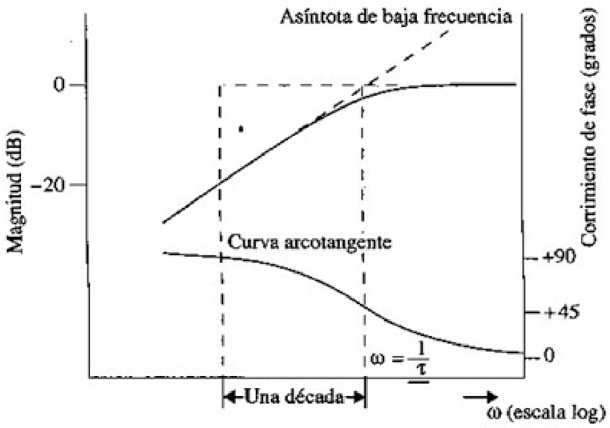
23. La función
arco tangente

Se define mediante la relación: $y = \arctan x \leftrightarrow x = \tan y$

$x \in [-\pi/2; \pi/2]$; $y \in \langle -\infty; \infty \rangle$



La función *arctan* es muy utilizada en diversas aplicaciones, entre ellas tenemos los diagramas de Bode



Fuente: Circuitos electrónicos analógicos.
https://sites.google.com/a/goumh.umh.es/circuitos-electronicos-analogicos/practicas/practica-1

24. *Operaciones con funciones*

Determinaremos 4 operaciones elementales:

- Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad x \in D_f \cap D_g$
- Resta: $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad x \in D_f \cap D_g$
- Multiplicación: $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad x \in D_f \cap D_g$
- División: $(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad x \in D_f \cap D_g - \{ x \,/\, g(x) = 0\}$

En la división debe cuidarse que el denominador no se anule para algunos valores de x, de ser el caso éstos deben excluirse del dominio.

Ej. Efectuar las operaciones anteriores para $f(x)=2x+3$ y $g(x)=4x-8$

$(f+g)(x) = (2x + 3) + (4x - 8) = 6x - 5 \qquad D_{f+g} = IR$

$(f-g)(x) = (2x + 3) - (4x - 8) = -2x + 11 \qquad D_{f-g} = IR$

$(fg)(x) = (2x + 3)(4x - 8) = 8x^2 - 4x - 24 \qquad D_{fg} = IR$

$(f/g)(x) = \dfrac{2x+3}{4x-8} \qquad D_{f/g} = IR - \{2\}$ Esta división tiene sentido para todo valor de x salvo para $x= 2$. Por lo tanto su dominio es: $IR - \{2\}$.

Si las funciones se dan con un dominio preestablecido, intersectamos los dominios dados para obtener el dominio de la función resultante.

Ej. Si $f(x) = x^2 \quad x\in[-2; 3\rangle$ y $g(x) = e^{2x} \quad x\in\langle-1; 6]$, determinar la suma y división g/f de ambas funciones.
Sol.

Su suma es: $(f+g)(x) = x^2 + e^{2x} \qquad x\in [-2; 3\rangle \cap \langle-1; 6] = \langle-1; 3\rangle$.

Su división es: $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{e^{2x}}{x^2} \qquad x\in\langle-1; 3\rangle - \{0\}$.

25. *Composición* de funciones

La composición de funciones $f \circ g$ - conocida, también, como función de función- se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad D_{f\circ g} = \{x \,/\, x \in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$$

Ejemplos.

1. Dadas $f(x)=2x + 5$ y $g(x)= 4x - 3$, determinar:
 a) $f \circ g$
 b) $g \circ f$.

Sol.

a) $f(g(x)) = 2(4x - 3)+ 5 = 8x - 1$
b) $g(f(x)) = 4(2x + 5)- 3 = 8x +17$

2. Si $f(x)=2x + 5$ $x \in [-2; 5]$ y $g(x)= 4x - 3$ $x \in \langle 0; 4]$, determinar su función compuesta y su respectivo dominio.

La compuesta $g \circ f$ es: $g(f(x)) = 4(2x + 5)- 3 = 8x +17$

El dominio es: $D_{g\circ f} =\{x / x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}=\{x / x\in[-2; 5] \wedge (2x+ 5) \in\langle 0; 4]\}$
$= \{ x / x\in[-2; 5] \wedge x \in\langle -5/2; -1/2]\}$
$= [-2; -1/2]$.

Si el dominio resultante es el conjunto vacío, la composición no se puede efectuar.

3. Si $f(x)=2x + 5$ $x \in [-4; -3]$ y $g(x)= 4x - 3$ $x \in \langle 0; 4]$, determinar su función compuesta y su respectivo dominio.

El dominio es: $D_{g\circ f} =\{x / x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}=\{x/ x\in[-4; -3]\wedge(2x+5) \in\langle 0; 4]\}$
$= \{ x / x\in[-4; -3] \wedge x \in\langle -5/2; -1/2]\}$
$= \phi$

¡Qué pena! La compuesta *no existe;* ya que el dominio es vacío.

Algunas funciones son el resultado de la composición de dos o más funciones

4. $\ln(4x - 3) = \ln(x) \circ (4x - 3)$

5. $4\ln(x) - 3 = (4x - 3) \circ \ln(x)$

6. $e^{sen(2x-!)} = e^x \circ senx \circ (2x - 1)$

Cuando se compone una relación con su inversa se obtiene la relación:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Se puede decir que cuando se compone una función y su inversa ambas “se cancelan mutuamente”.

Ej. En los siguientes ejemplos se sobreentiende que las funciones están definidas en sus correspondientes dominios de inyectividad.

1. arcsen(senx)= x

2. $\ln(e^x) = x$

3. $e^{\ln 2x} = 2x$

4. $\tan(\arctan x^2) = x^2$

¡Qué bien! *Esta propiedad es de gran utilidad para despejar incógnitas que se encuentren como argumentos de las funciones trigonométricas o logarítmicas*.

Veamos algunos ejemplos:

1. Resolver $e^{x+3} = 5$.

Sol. Tomamos logaritmos neperianos a ambos miembros de la ecuación, para cancelar la función exponencial que es donde se encuentra la incógnita.

$$\mathrm{Ln}(e^{x+3}) = \ln(5).$$
$$x + 3 = \ln(5).$$
$$x = \ln(5) - 3.$$
$$x = -1{,}39056\ldots$$

2. Resolver $\ln(3x + 1) = -2$.

Sol. Tomamos exponencial a ambos miembros de la ecuación, para cancelar la función *ln* que es donde se encuentra la incógnita, para despejarla posteriormente.

$$e^{\ln(3x+1)} = e^{-2}.$$
$$3x + 1 = e^{-2}.$$
$$x = \frac{e^{-2} - 1}{3}$$
$$x = -\,0{,}288\ldots.$$

3. Resolver $\cos(x^2 - 1) = 0{,}45$.

Sol. Tomamos $\cos^{-1}$ (o, lo que es lo mismo, *arccos*) a ambos miembros de la ecuación, para cancelar la función *cos* que es donde se encuentra la incógnita, para despejarla posteriormente.

$$\cos^{-1}(\cos(x^2 - 1)) = \cos^{-1}(0{,}45).$$
$$x^2 - 1 = \cos^{-1}(0{,}45).$$
$$x^2 = \cos^{-1}(0{,}45) + 1.$$

$$x = \pm\sqrt{\cos^{-1}(0{,}45) + 1}$$
$$x = \pm\, 2{,}104030\ldots.\mathrm{rad}$$

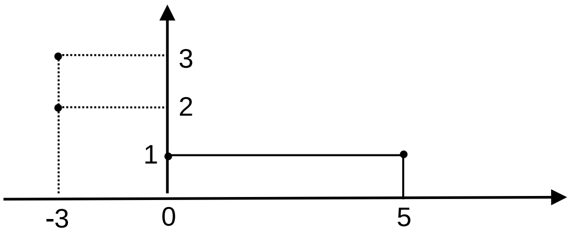
EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar si $R = \{(-3, 2), (5, 1), (-3, 3), (0,1)\}$ es función. Calcular su dominio, rango y determinar su gráfica.

Sol.

No, pues a -3, le corresponden dos valores diferentes: 2 y 3.

$D = \{-3,0, 5\}$ $R = \{0, 2, 3\}$

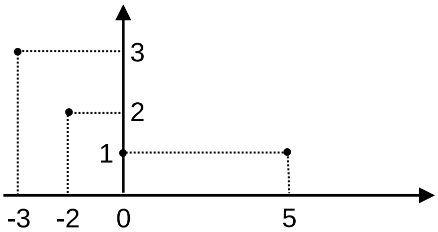


Obsérvese que si en el gráfico de una relación hay dos (o más) puntos ubicados en una misma vertical, entonces este *no corresponde a una función.*

2. Determinar si $f = \{(-2,2), (5,1), (-3,3), (0,1)\}$ es función. Calcular su dominio, rango y determinar su gráfica.

Sol.

Es función pues a cada valor de x, le corresponde un solo valor de y.



Su dominio es $D = \{-3, -2, 0, 5\}$ y su rango $R = \{1; 2; 3\}$

3. Determinar el dominio de: $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Sol.

$$4 - x^2 \geq 0 \longrightarrow x^2 \leq 4 \longrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

$$D_f = [-2, 2]$$

4. Determinar el dominio de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

Sol.

Recordemos que el denominador de una fracción no debe ser cero.

$$X^2 - 9 \neq 0 \longrightarrow X^2 \neq 9 \longrightarrow x \neq \pm 3.$$

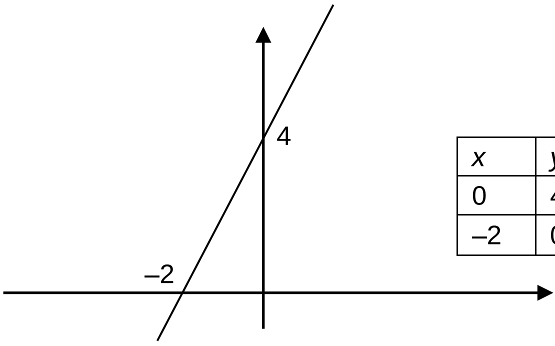
Esto significa que x puede tomar cualquier valor real ($x \in IR$) excepto 3 y –3. En términos de conjuntos, el dominio lo expresamos como:

$$D_f = IR - \{3; -3\}$$

5. Graficar $y = 2x + 4$

Sol.

Le asignamos a cada variable el valor cero y determinamos su correspondiente valor, los valores determinados son las respectivas intersecciones con los ejes coordenados



x	*y*
0	4
–2	0

6. Graficar $y = x^2 + 6x + 5$

Sol.

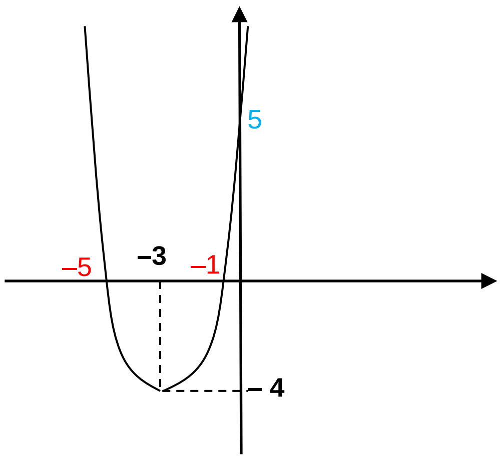
Determinamos su vértice:

$h = -\dfrac{6}{2(1)} = -\mathbf{3}$ $\quad k = (-3)^2 + 6(-3) + 5 = \mathbf{-4}$

Intersección con el eje Y: $y = 5$

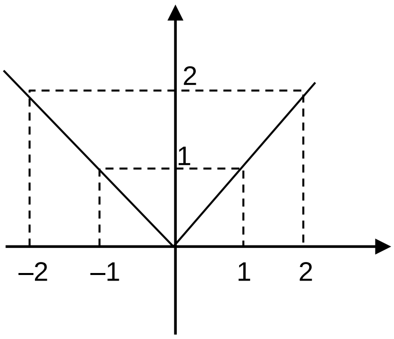
Intersección con el eje X:

$x^2 + 6x + 5 = 0 \longrightarrow x_1 = -5;\ x_2 = -1$



7. Se define el *valor absoluto* de *x* como: $|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$. Graficar la función definida por $f(x) = |x|$.

Sol.



8. Si $f(x) = 3x–4$, determinar su función inversa.

Sol.

$y= 3x–4 \quad \rightarrow \quad x= 3y–4 \rightarrow \quad 3y = x + 4 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{x+4}{3}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$$

9. Determinar la inversa de la función $f(x) = \frac{3}{2x-1}$.

Sol.

$y=\dfrac{3}{2x-1} \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{3}{2y-1} \quad \rightarrow \quad 2xy – x = 3 \rightarrow \quad 2xy = 3 + x \quad \rightarrow \quad y=\dfrac{x+3}{2x}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2x}$$

10. Determinar la inversa de la función $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

Sol.

$y=\dfrac{x+2}{x-1} \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{y+2}{y-1} \quad \rightarrow \quad xy – x = y + 2 \rightarrow \quad xy – y = x + 2$

$y(x – 1) = x + 2 \quad \rightarrow \quad y=\dfrac{x+2}{x-1}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

Notamos que la función inversa es la misma que la original. No debe asombrarnos este hecho que se presenta en algunas funciones como las del ejemplo.

11. Determinar la inversa de la función $f(x) = \sqrt{4x-5}$

Sol.

$y=\sqrt{4x-5} \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{4y-5} \quad \rightarrow \quad x^2= 4y –5 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{x^2+5}{4} \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+5}{4}$

12. Despejar t en la expresión $e^{2t-3} = 5$ y determinar su valor numérico.

Sol.

Empleamos la inversa de la función exponencial, que es la función logaritmo neperiano (ln):

$$2t - 3 = \ln 5 \quad \to \quad 2t = 3 + \ln 5 \quad \to \quad t = \frac{3+\ln 5}{2} = 2{,}305.$$

13. Despejar t en la expresión $\ln(t+2) = -1$ y determinar su valor numérico.

Sol.

Empleamos la función exponencial, que es la inversa de la función ln:

$$t+2 = e^{-1} \to t = -2 + e^{-1} \to t = -1{,}632.$$

14. Resolver $\operatorname{sen}(2x-2) = 0{,}8$.

Sol.

$$2x-2 = \operatorname{arcsen}(0{,}8) \to 2x = \operatorname{arcsen}(0{,}8) + 2 \to x = (\operatorname{arcsen}(0{,}8) + 2)/2$$

$$x = 1{,}4636 \text{ rad.}$$

15. Si $f(x) = x^2 + 2x + 5$ y $g(x) = x^2 + x$, determinar:

a) $(f-2g)(x)$; b) $(fg)(x)$; c) $(f/g)(x)$

Sol.

a) $(f-2g)(x) = f(x) - 2g(x) = x^2 + 2x + 5 - 2(x^2 + x) = .- x^2 + 5.$

b) $(fg)(x).= f(x)g(x).= (x^2 + 2x + 5)(x^2 + x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 5x.$

c) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + x}$, $x \neq 0; -1$

16. Si $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Calcular a) $f(x) - 2g(x)$, b) $f^2(x) + g^2(x)$, c) $f^2(x) - g^2(x)$.

Sol.

a) $f(x) - 2g(x) = \cos x - 2\operatorname{sen} x.$

b) $f^2(x) + g^2(x) .= \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) .= 1.$

c) $f^2(x) - g^2(x) .= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) .= \cos 2x.$

17. Si $f(x) = x^2 + 5$, calcular: a) $f(\sqrt{3})$ b) $f(f(1))$ c) $f(x-1)$

Sol.

a) $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^{\,2} + 5 = 8$.
b) $f(1) = 6 \rightarrow f(f(1)) = f(6) = 6^2 + 5 = 41$.
c) $f(x-1) = (x-1)^2 + 5 = x^2 - 2x + 1 + 5 = x^2 - 2x + 6$.

18. Si $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x - 2$, calcular: a) $(f \circ g)(x)$; b) $(g \circ f)(x)$; $(f \circ f)(x)$

Sol.

a) $f(g(x)) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x$
b) $g(f(x)) = (x^2 - 4) - 2 = x^2 - 6$
c) $f(f(x)) = (x^2 - 4)^2 - 4 = x^4 - 8x^2 + 16 - 4 = x^4 - 8x^2 + 12$.

19. Si $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = 3x - 2$, calcular: a) $(f \circ g)(x)$; b) $(g \circ f)(x)$; $(f \circ f)(x)$

Sol.

a. $f(g(x)) = \text{sen}(3x - 2)$
b. $g(f(x)) = 3\text{sen}(x) - 2$
c. $(f(x)) = \text{sen}(\text{sen}(x))$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Determinar cuáles de las siguientes relaciones definidas por las tablas respectivas son funciones. Asimismo determinar su dominio y rango.

x	-2	6	8	10
y	3	7	0	9

x	4	4	3	0	1
y	5	6	2	0	4

x	3	5	9	10	13
y	8	8	8	8	8

2. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son relaciones y cuáles son funciones:

a) $R = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,/\, 2x - 3y + 7 = 0\}$
b) $R = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,/\, 2x^2 + y + x = 2\}$
c) $R = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,/\, x^2 - y^2 = 4\}$
d) $R = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \,/\, x^2 > y\}$.

3. Determinar el dominio de:

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

d) $f(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x + 3}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4}$

f) $f(x) = |x - 3|$

g) $f(x) = 4 - (x - 3)^2$

h) $f(x) = \ln(x - 3)$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

j) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

4. Graficar las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x + 2$

b) $f(x) = 3x - 2$

c) $f(x) = 3x + 2$, $x \in [-1; 3\rangle$

d) $f(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = x^2 + 1$

f) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

g) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

h) $f(x) = 5$

I) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

j) $f(x) = \ln(x + 2)$

k) $f(x) = e^{-x}$

l) $f(x) = -\ln(x)$

5. Dadas las funciones: $f(x) = -x + 1$,
$g(x) = 3x - 4$,
$h(x) = x^2 + 2x$.

Efectuar las siguientes operaciones:

a) $(f + g)(x)$ b) $(f - g)(x)$

c) $(h + 2f)(x)$ d) $(h - f + g)(x)$

e) $(g^2 + 2f)(x)$ f) $(f - g)^2(x)$

g) $(f / g)(x)$ h) $(g / h)(x)$

i) $(fg + h)(x)$ j) $(f(g + h))(x)$

6. Dadas las funciones $f(x) = 3x - 1$, $x \in [-3; 4\rangle$ y
$g(x) = (x - 2)^2 + 1$, $x \in \langle -5; 3]$
$h(x) = x - 1$, $x \in \langle 0; 6\rangle$

Efectuar las siguientes operaciones:

a) $(f^2 - g)(x)$ b) $(2f - g)(x)$

c) $(f / g)(x)$ d) $(g / f)(x)$

e) $(h^2 - g)(x)$ f) $(3h - f + 2g)(x)$

a) $(3f - g)(x)$ b) $(2f + g)(x)$

e) $(g^2 + 4f)(x)$ f) $(3h - f + 2g)(x)$

7. Determinar la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x + 2$ b) $f(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = \sqrt{4x+5}$ d) $f(x) = 2\sqrt{2x-3}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

g) $f(x) = e^{x} + 2$ h) $f(x) = e^{-x} - 3$

i) $f(x) = \ln x + 1$ j) $f(x) = \ln(2x + 4)$

k) $f(x) = \text{sen}(3x - 4)$ l) $f(x) = \arctan(2x + 3)$

8. Dadas las funciones $f(x)=3x + 2$ y $g(x)= 2x - 1$, determinar:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

c) $(f \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

e) $((f \circ g) \circ g)(x)$

f) $((g^{-1} \circ g) \circ f)(x)$

g) $(f^2 \circ g)(x)$

h) $((f + g) \circ g)(x)$

i) $((f \circ g) - f)(x)$

9. Dadas las funciones $f(x) = x - 1$, $x \in [-3; 8\rangle$ y
$g(x) = 3x + 2$, $x \in \langle -2; 6]$
$h(x) = 2x + 1$, $x \in \langle 0; 4\rangle$

Efectuar las siguientes composiciones y calcular su dominio:

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(2f \circ g)(x)$

c) $(f \circ 3g)(x)$

d) $(g \circ f)(x)$

e) $(h \circ g)(x)$

f) $(3h \circ f \circ 2g)(x)$

g) $((h + g) \circ h)(x)$

10. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $e^{-x-1} = 4$

b) $e^{x^2-1} = 5$

c) $5 = 3(1 - e^{\frac{-t}{4}})$

d) cos(3x-1)=0.26

e) ln(2x-5) = 3

f) $\ln(2x-5)^3 = e^{-3}$

g) $\ln(\sqrt[5]{x+1}) = -1$

h) sen(4x+6) = –0,43

i) tan(6x–4) = 5

j) tan(4x+5) = cos(1,23)

k) $e^{\cos(x-1)} = 0,5$

l) $e^{\tan(\frac{x-1}{x+4})} = 1,2$